

Jouw oplossing bestaat uit een geschreven oplossing op geruite bladen en een jupyter-notebook (*.ipynb) die je kan indienen via de opdrachten op Ufora. Vermeld dan duidelijk welke vragen op papier werden opgelost en welke antwoorden in het notebook te vinden zijn. Indien je geen jupyter-notebook indient, vermeld dit dan expliciet op de geruite bladen.

1. (5 pt) Beschouw een (Hamiltoniaans) systeem van de vorm

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= f(t, p, q) \quad (= -\nabla_q H) \\ \frac{dq}{dt} &= g(t, p, q) \quad (= \nabla_p H)\end{aligned}$$

Voor het oplossen van deze bewegingsvergelijkingen, wenden we ons tot onderstaande gepartitioneerde Runge-Kutta-methode:

$$\begin{aligned}p_1 &= p_0 + \frac{1}{3}hk_1 + \frac{2}{3}hk_2 \\ q_1 &= q_0 + \frac{1}{3}hl_1 + \frac{2}{3}hl_2\end{aligned}$$

waarbij

$$\begin{aligned}k_1 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, p_0 - \frac{1}{6}hk_1 + \frac{2}{3}hk_2, q_0 + ahl_1 + bhl_2\right) \\ k_2 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, p_0 + \frac{1}{2}hk_1, q_0 + chl_1 + dhl_2\right) \\ l_1 &= g\left(t_0 + \frac{1}{6}h, p_0 - \frac{1}{6}hk_1 + \frac{2}{3}hk_2, q_0 + ahl_1 + bhl_2\right) \\ l_2 &= g\left(t_0 + \frac{2}{3}h, p_0 + \frac{1}{2}hk_1, q_0 + chl_1 + dhl_2\right)\end{aligned}$$

We zullen deze methode toepassen op een systeem met Hamiltoniaan

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + q^2. \tag{1}$$

- (a) Geef de Butcher-tableaus die bij de bovenstaande PRK-methode horen. Bepaal de waarden voor a, b, c en d opdat de methode symplectisch zou zijn.
- (b) Aan welke stelsel van vergelijkingen zullen k_1, k_2, l_1 en l_2 voldoen indien de (symplectische) methode wordt toegepast op het Hamiltoniaans systeem gedefinieerd door (1). Toon aan dat de

uitdrukkingen voor k_1, k_2, l_1 en l_2 expliciet kunnen worden gegeven door

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{2 \left((8h^3 - 3h)p_0 + 6(2h^2 - 3)q_0 \right)}{8h^4 + 9h^2 - 18} \\ k_2 &= -\frac{2 \left(4(2h^3 - 3h)p_0 + 3(7h^2 - 6)q_0 \right)}{8h^4 + 9h^2 - 18} \\ l_1 &= \frac{6 \left((4h^2 - 3)p_0 - (4h^3 - 3h)q_0 \right)}{8h^4 + 9h^2 - 18} \\ l_2 &= \frac{6 \left((2h^2 - 3)p_0 - (2h^3 - 3h)q_0 \right)}{8h^4 + 9h^2 - 18} \end{aligned}$$

- (c) Pas nu de gegeven methode toe op de bewegingsvergelijking voor het probleem met $h = 0.01$ en $(p(0), q(0)) = (1, 1)$ over het interval $[0, 10]$. Plot jouw oplossing in het (q, p) -vlak.
 - (d) Verklaar het al dan niet constant zijn van H langs de oplossing. Illustreer dit door een duidelijke plot, met logaritmische schaal, van $|H - H_0|$ langs de oplossing.
 - (e) Bepaal de waarde van q waarvoor $H - H_0 = \mathcal{O}(h^r)$. Wat is de orde van de methode?
2. (5 pt) Beschouw het onderstaand dynamisch systeem:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y^3 - 4x \\ \dot{y} &= y^3 - y - 3x \end{cases}$$

- (a) Bepaal alle evenwichtspunten van het systeem. Bepaal telkens ook de stabiliteit en aard van het evenwichtspunt.
- (b) Toon aan dat de rechte $y = x$ invariant is, m.a.w. dat iedere fasebaan die op deze rechte start altijd op deze rechte zal blijven.
- (c) Maak een schets van het faseportret en teken daarbij enkele fasebanen voor verschillende beginpunten.
- (d) Leid uit de vergelijking voor $\dot{y} - \dot{x}$ af dat voor iedere fasebaan geldt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0$.