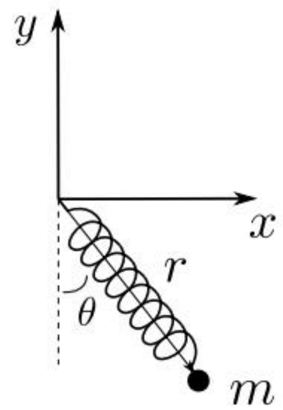
Inleiding tot de theoretische fysica

Oefeningenexamen 1 juli 2020

Enkele afspraken:

- Begin elke opgave op een nieuw antwoordenblad. Schrijf op elk blad je naam en studentennummer. Ook al los je een opgave niet op, dien dan toch een blad in (met je naam en studentennummer). Schrijf duidelijk!
- Werk alles grondig uit. Stukken overschrijven uit het boek of de cursus levert echter geen punten op. Als je iets gebruikt uit het boek of de cursus, mag je de vergelijking gewoon overnemen. Vermeld echter het nummer van de vergelijking!
- Er zijn 2 opgaven. Elke opgave staat op evenveel punten. De tweede opgave staat op de ommezijde van dit blad!

Opgave 1



Werk in het verticale xy-vlak. Een massa m hangt met een veer met veerconstante k en rustlengte ℓ verbonden aan de oorsprong van het xy-vlak. Op de massa m werkt de zwaartekracht in. Gebruik de veralgemeende coordinaten r en θ zoals aangeduid op de tekening. Voor de uitwijking van de veer r geldt steeds dat $r > 0$.

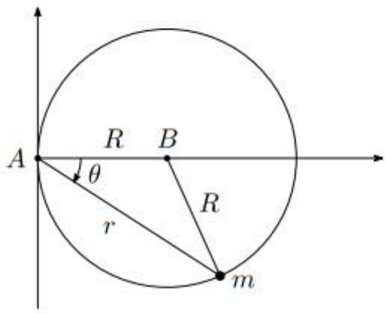
(a) Stel de kinetische en de potentiële energie op in functie van de veralgemeende coördinaten.

(b) Bepaal de stabiele evenwichtspunten en de hessiaan in deze evenwichtspunten.

(c) Bepaal de frequenties van de (kleine) normaaltrillingen.

Opgave 2

We beschouwen het volgende probleem met een centrale kracht. Een deeltje met massa m en draaimoment ℓ beweegt op een cirkelvormige baan met straal R. Het krachtcentrum bevindt zich deze keer echter niet in het middelpunt B van de cirkel maar *op* de cirkel in punt A dat als oorsprong wordt gekozen van het bewegingsvlak. Een schets hiervan is gegeven in onderstaande figuur:



(a) Bepaal de vergelijking $r(\theta)$ voor deze cirkelvormige baan.

(b) Toon aan dat de cirkelvormige beweging van het deeltje enkel mogelijk is indien de potentiaal van de centrale kracht (op een constante na) vanuit A voldoet aan

$$V(r) = -\frac{2R^2\ell^2}{mr^4} \tag{1}$$

Tip: gebruik hiervoor vergelijking 227 in de slides:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{\ell^2}\frac{\partial}{\partial u}V(1/u) = 0 \qquad \text{met } u = \frac{1}{r}\ . \tag{2}$$

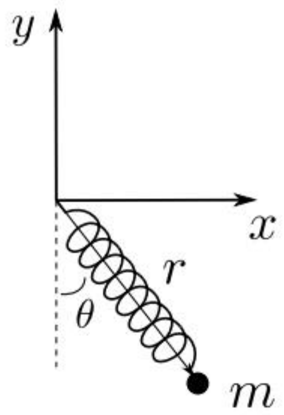
(c) Toon aan dat de totale energie van het deeltje gelijk aan nul is.

Tip: gebruik behoud van energie en bereken T en V in een goed gekozen punt langs de baan (zoals $r = 2R,\ \theta = 0$), of gebruik vergelijking 229 in de slides:

$$\frac{2mE}{\ell^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 + \frac{2m}{\ell^2}V \qquad \text{met } u = \frac{1}{r}\ . \tag{3}$$

(d) Bereken de periodiciteit van de beweging. Een volledige omwenteling gebeurt hier in een interval van $\theta = -\pi/2$ tot $\pi/2$.

Oplossing 1



Voor de veralgemeende coördinaten geldt:

$$x = r\sin\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y = -r\cos\theta \qquad \dot{y} = -\dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta$$

Voor de kinetische en de potentiële energie bekomen we:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \tag{4}$$
$$V = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(r-l\right)^2 \tag{5}$$

Voor het vinden van de stabiele evenwichtspunten bepalen we de extrema van de potentiaal en onderzoeken of deze minima zijn.

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = mgr\sin\theta = 0 \;\Rightarrow\; \sin\theta = 0 \text{ (aangezien } r > 0) \Rightarrow\; \theta = 0 \text{ of } \pi \tag{6}$$
$$\frac{\partial V}{\partial r} = -mg\cos\theta + k(r-l) = 0 \;\Rightarrow\; r = l + \frac{mg}{k} \text{ of } r = l - \frac{mg}{k} \tag{7}$$

en de Hessiaan:

$$[V] = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right] = \begin{bmatrix} k & mg\sin\theta \\ mg\sin\theta & mgr\cos\theta \end{bmatrix} \tag{8}$$

Deze is enkel positief definiet voor het geval $\theta = 0$ en $r = l + \frac{mg}{k}$.
De Hessiaan in dit stabiel evenwichtspunt is gegeven door:

$$[V] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mg\left(l + \frac{mg}{k}\right) \end{bmatrix} \tag{9}$$

De massamatrix in het stabiele evenwicht kan uit de kinetische energie worden afgeleid:

$$[T] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(l + \frac{mg}{k}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Het eigenwaardeprobleem $[V][a] = \omega^2[M][a]$ kan nu opgelost worden door te stellen dat:

$$\det \begin{bmatrix} k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & mg\left(l + \frac{mg}{k}\right) - m\left(l + \frac{mg}{k}\right)^2 \omega^2 \end{bmatrix} = 0 \tag{11}$$

Hieruit volgen de 2 eigenfrequenties:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{12}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l + \frac{mg}{k}}} \tag{13}$$

Oplossing 2

(a) $r(\theta) = 2R\cos\theta$.

(b)

$$u = \frac{1}{2R\cos\theta} \tag{14}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2R}\tan\theta\frac{1}{\cos\theta} \tag{15}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2R}\left(\tan^2\theta + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)\frac{1}{\cos\theta} \tag{16}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{\ell^2}\frac{\partial}{\partial u}V(1/u) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{1}{2R\cos\theta}\left(\tan^2\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} + 1\right) = \frac{m}{u^2\ell^2}V'(1/u) \tag{18}$$

$$V'(1/u) = \frac{u\ell^2}{m}\frac{2}{\cos^2\theta} \tag{19}$$

$$V'(r) = \frac{8R^2\ell^2}{mr^5} \tag{20}$$

$$V(r) = -\frac{2R^2\ell^2}{mr^4} \tag{21}$$

(c) Behoud van energie: Totale energie op $\theta = 0$ is hetzelfde als op andere tijdstippen. Op dit tijdstip is er geen radiale snelheid; dus:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{\ell^2}{2m(2R)^2} \tag{22}$$

en

$$\begin{aligned} E(\theta = 0) &= V(2R) + \frac{\ell^2}{8mR^2} && (23) \\ &= -\frac{2R^2\ell^2}{m16R^4} + \frac{\ell^2}{8mR^2} && (24) \\ &= 0 && (25) \end{aligned}$$

Alternatief: via vergelijking 229:

$$\begin{aligned} \frac{2mE}{\ell^2} &= \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 + \frac{2m}{\ell^2}V && (26) \\ &= \left(\frac{\sin\theta}{2R\cos^2\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{2R\cos\theta}\right)^2 - \frac{2m}{\ell^2}\frac{2R^2\ell^2}{mr^4} && (27) \\ &= \frac{1}{4R^2\cos^2\theta} - \frac{1}{4R^2\cos^2\theta} && (28) \\ &= 0 && (29) \end{aligned}$$

(d) Omlooptijd voor $\theta = -\pi/2 \to \pi/2$:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dot{\theta}^{-1} d\theta && (30) \\ t &= \frac{m}{\ell}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta && (31) \\ t &= \frac{4mR^2}{\ell}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta && (32) \\ t &= \frac{4mR^2}{\ell}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta && (33) \\ t &= \frac{2\pi mR^2}{\ell} && (34) \end{aligned}$$

via

$$\ell = mr^2\dot{\theta} \tag{35}$$