EXAMEN DISCRETE WISKUNDE II

VRIJDAG 26 JUNI 2020

Gebruik voor elke opgave een apart dubbelgevouwen examenpapier.

Vermeld op elk blad je naam en het nummer van de opgave, schrijf op het eerste blad ook je stamnummer.

Het examen is *gesloten boek*. Theorie- en oefeningencursus en/of bijhorende geschreven notities mogen **niet** gebruikt worden.

Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM, smartphone, tablet, computer of andere elektronische toestellen. Deze moeten *volledig uitgeschakeld* zijn.

Je beschikt over 3 uur om dit examen op te lossen.

Als je klaar bent, gebruik een dubbelgevouwen A3 examenpapier om je opgaven, oplossingen en kladpapier te bundelen. Leg de bundel in de voorziene doos.

Hanteer de anderhalve meter-regel op elke locatie en in elke situatie.

Plaats je eigen jas/rugzak/tas in het examenlokaal onder de eigen tafel of stoel.

Etenswaren zijn niet toegestaan, tenzij medisch noodzakelijk. Een flesje water is toegelaten.

Hou het verkregen proceduremasker aan gedurende het hele examen, tot het moment dat je het gebouw hebt verlaten.

Blijf na het examen niet hangen in of rond het gebouw.

VEEL SUCCES!

Opgaven

Opgave 1 (theorie; 5 punten). Onderstel dat Γ een graaf is met minstens drie toppen waarvan we de karakteristieke veelterm gelijk stellen aan $x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_n$. Bestaat er een oneven getal ℓ met $c_\ell \neq 0$, dan stelt i het kleinste natuurlijke getal voor met de eigenschap dat $c_{2i+1} \neq 0$. Toon dan het volgende aan:

(1) c_{2i+1} is even en $-c_{2i+1}/2$ is gelijk aan het aantal cykels van lengte $2i+1$ in Γ;
(2) Γ heeft geen cykels van oneven lengte kleiner dan $2i+1$.

Opgave 2 (theorie; 5 punten). Onderstel dat (G, X) een permutatievoorstelling is met $|G|, |X| \in \mathbb{N}$.

(1) Toon aan dat $t \cdot |G| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$, waarbij t het aantal banen is en $\mathrm{Fix}(g)$ de verzameling is van alle elementen van X die gefixeerd worden door $g \in G$.
(2) Toon eveneens aan dat er een fixpuntvrije permutatie bestaat als $|X| \geqslant 2$ en (G, X) transitief is.

Opgave 3 (oefening; 5 punten). Zij $k \in \mathbb{N}$. Een natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ noemen we *k-bijzonder* als élke (enkelvoudige) graaf Γ van orde n voldoet aan op z'n minst één van de volgende voorwaarden:

- Γ bezit een kliek van grootte k.
- Γ bezit een cokliek[1] van grootte k.

Het *vereenvoudigd Ramseygetal* r_k wordt gedefinieerd als volgt:

$$r_k := \min\{n \in \mathbb{N} : n \text{ is } k\text{-bijzonder}\}.$$

(1) Bewijs dat $r_3 = 6$.
(2) Beschouw een verzameling R van zes rechten in de reële, driedimensionale (affiene) ruimte, met de eigenschap dat geen drie verschillende rechten van R coplanair[2] zijn. Bewijs dat er drie verschillende rechten in R bestaan die
  (a) oftewel paarsgewijs scheef[3] zijn,
  (b) oftewel paarsgewijs parallel[4] zijn,
  (c) oftewel concurrent[5] zijn.

Opgave 4 (oefening; 5 punten). De vectorruimte $\mathbb{F}_p^n$ (p priem, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$) kan uitgerust worden met een *inproduct*. Het inproduct $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ van twee vectoren $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{F}_p^n$ is namelijk gelijk aan

$$v_1w_1 + \cdots + v_nw_n \quad \in \mathbb{F}_p.$$

Is C een p-aire lineaire code van lengte n, dan definiëren we de *duale code* $C^\perp$ als

$$C^\perp := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{F}_p^n : \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{c} = 0, \forall \boldsymbol{c} \in C\}.$$

Een lineaire code wordt *zelforthogonaal* genoemd als $C \subseteq C^\perp$.

Bewijs dat een ternaire lineaire code C zelforthogonaal is als *en slechts als* het gewicht van elk codewoord deelbaar is door 3.

[1] Ook gekend als 'onafhankelijke verzameling'.
[2] Twee rechten zijn *coplanair* als ze in een vlak gelegen zijn.
[3] Twee rechten zijn *scheef* als ze niet in een vlak gelegen zijn.
[4] Twee rechten zijn *parallel* als ze coplanair en disjunct zijn.
[5] Drie rechten zijn *concurrent* als ze precies één punt gemeenschappelijk hebben.