EXAMEN DISCRETE WISKUNDE II

VRIJDAG 4 SEPTEMBER 2020

Gebruik voor elke opgave een apart dubbelgevouwen examenpapier.

Vermeld op elk blad je naam en het nummer van de opgave, schrijf op het eerste blad ook je stamnummer.

Het examen is *gesloten boek*. Theorie- en oefeningencursus en/of bijhorende geschreven notities mogen **niet** gebruikt worden.

Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM, smartphone, tablet, computer of andere elektronische toestellen. Deze moeten *volledig uitgeschakeld* zijn.

Je beschikt over 3 uur om dit examen op te lossen.

Als je klaar bent, gebruik een dubbelgevouwen A3 examenpapier om je opgaven, oplossingen en kladpapier te bundelen. Leg de bundel in de voorziene doos.

Hanteer de anderhalve meter-regel op elke locatie en in elke situatie.

Plaats je eigen jas/rugzak/tas in het examenlokaal onder de eigen tafel of stoel.

Etenswaren zijn niet toegestaan, tenzij medisch noodzakelijk. Een flesje water is toegelaten.

Hou het verkregen proceduremasker aan gedurende het hele examen, tot het moment dat je het gebouw hebt verlaten.

Blijf na het examen niet hangen in of rond het gebouw.

VEEL SUCCES!

Opgaven

Opgave 1 (theorie; 5 punten).

(1) Zij Γ een graaf met $n \in \mathbb{N}$ toppen, en onderstel dat Γ_1 en Γ_2 twee grafen zijn die uit Γ bekomen worden door recursief paren van niet-adjacente toppen te verbinden waarvan de som van de graden minstens n is (totdat geen dergelijke paren meer overblijven). Bewijs dat $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

(2) Geef zonder bewijs de Stelling van Dirac. Gebruik deze stelling om aan te tonen dat een niet-lege eindige graaf met n toppen een Hamiltoniaans pad heeft als elke top graad tenminste $\frac{n-1}{2}$ heeft.

Opgave 2 (theorie; 5 punten).

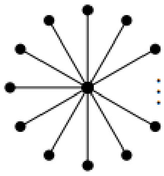
(1) Toon aan dat elke graaf die een automorfismegroep G heeft die scherp transitief werkt op de toppenverzameling een Cayleygraaf $\Gamma(G, S)$ is voor een zekere $S \subset G$.

(2) Welke van de volgende grafen Γ zijn Cayleygrafen (hier worden geen bewijzen gevraagd):

(i) K_n met $n \geqslant 2$;
(ii) $K_{n,n}$ met $n \geqslant 2$;
(iii) C_n met $n \geqslant 3$;
(iv) de Petersengraaf.

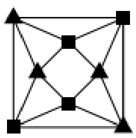
Indien dit zo is, geef dan telkens een groep G en een $S \subset G$ waarvoor $\Gamma \cong \Gamma(G, S)$.

Opgave 3 (oefening; 5 punten). Zij $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Beschouw de stergraaf van orde $n + 1$, met andere woorden, deze graaf heeft één 'centrumtop' verbonden met n 'randtoppen':



Bepaal de karakteristieke veelterm en het spectrum van deze graaf.

Opgave 4 (oefening; 5 punten). Beschouw de graaf Γ



waarbij elke top gelabeled is als een driehoek of een vierkant. Zij $\mathrm{Aut}^*(\Gamma)$ de verzameling van alle automorfismen die de label (vorm) van een top bewaren.

(1) Wat zijn de banen van Γ onder $\mathrm{Aut}^*(\Gamma)$?

(2) Zij $v \in V(\Gamma)$. Bewijs dat $\left(\mathrm{Aut}^*(\Gamma)\right)_v$ triviaal is.

(3) Lijst alle elementen van $\mathrm{Aut}^*(\Gamma)$ op (en bewijs dat dit ze allemaal zijn). Met welke bekende groep is $\mathrm{Aut}^*(\Gamma)$ isomorf?