Voorbeeld-examen (samengesteld uit examens van 2019 en 2020)
Vectoranalyse (recto verso)

- *Beantwoord elk van de vragen met een Romeins cijfer op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad. Alles moet ingediend worden: het blad met de opgave, de antwoorden en de kladbladen.* ***Alleen de dubbele geruite bladen zullen verbeterd worden.***
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus "analoog" of "wegens de stelling van X", dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag I.

1. Definieer: open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$.
2. Vul aan en bewijs: Is $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ in het open ...... $G \subset \mathbb{R}^2$, dan is f ...... in G.
3. Beantwoord met JA of NEE (geen verdere uitleg):
   (a) Als f afleidbaar is in het punt (a, b), dan is f continu in (a, b).
   (b) E is een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ en $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is een convergente rij in $\mathbb{R}^2$. Als $z_k \in E$ voor alle $k \in \mathbb{N}$, dan is de limiet van $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ook een punt van E.
   (c) Als $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ bestaan, dan is $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$.
4. Toon aan of weerleg: de functie $f(x, y) = x^2 y - \dfrac{e^{xy}}{2019}$ wordt nooit nul in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag II.

1. Definieer: (i) gladde kromme in $\mathbb{R}^2$; (ii) oppervlakte-integraal van een continu vectorveld.
2. Formuleer (geen bewijs) de divergentiestelling.
3. Formuleer en bewijs de formule voor het berekenen van de oppervlakte van het omwentelingsoppervlak dat ontstaat door een vlakke gladde kromme Γ over een hoek α te wentelen.
4. Beantwoord de vragen:
   Zij $K_1 = [0, \pi/2] \times [0, 1]$, $K_2 = [\pi/2, \pi] \times [0, 1]$ en $K = K_1 \cup K_2$, en bekijk de transformatie $\boldsymbol{\theta}$
   $$x = \sin u, \ y = v.$$
   Er geldt dat
   $$\operatorname{opp}(\boldsymbol{\theta}(K_j)) \overset{[1,2]}{=} \int_{K_j} \left| \frac{\partial(\theta_1, \theta_2)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv \quad (j = 1, 2)$$
   maar
   $$\operatorname{opp}(\boldsymbol{\theta}(K)) \overset{[3]}{\neq} \int_{K} \left| \frac{\partial(\theta_1, \theta_2)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv = \int_{K_1} \left| \frac{\partial(\theta_1, \theta_2)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv + \int_{K_2} \left| \frac{\partial(\theta_1, \theta_2)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv.$$
   [1] Verklaar de gelijkheid zonder beide leden uit te rekenen.
   [2] Reken beide leden van de gelijkheid rechtstreeks uit.
   [3] Waarom is de verklaring uit [1] niet van toepassing om de gelijkheid aan te tonen voor K?

5. Beantwoord de vragen. Als je gebruik maakt van eigenschappen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.

1 Stelling. *Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ een open interval, $t_0 \in I$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ en $\mathbf{f}$ een continue afbeelding $I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ die lokaal gelijkmatig Lipschitz-continu is. Dan heeft het beginwaardenprobleem*

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{1}$$

een oplossing in I.

Bewijs. Kies willekeurig $[a, b] \subseteq I$ met $t_0 \in [a, b]$. Definiëren we $\mathbf{x}_0(t) := \mathbf{x}_0$ en

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_n(s))\, ds$$

dan volgt uit de Lipschitz-voorwaarde na enkele berekeningen dat $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{n-1}(t))$. Uit de M-test volgt dat deze laatste reeks gelijkmatig convergeert over $[a, b]$ naar een zekere functie $\mathbf{x}(t)$. Door de gelijkmatige convergentie is $\mathbf{x}(t)$ continu in $[a, b]$. Ook $\underline{\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_n(t)) \rightrightarrows \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \text{ op } [a, b]}$ `[1]`, want

$$\underline{\sup_{t\in[a,b]} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_n(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))\| \overset{[2]}{\leq} C \sup_{t\in[a,b]} \|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)\|} \to 0 \text{ als } n \to \infty.$$

Dan is $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\, ds$ op elk interval $[a, b] \subseteq I$, m.a.w. op heel I. Door beide leden van deze gelijkheid af te leiden is $\mathbf{x}(t)$ dan de gezochte oplossing van (1). □

`[1]` Waar gebruiken we verderop dat $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_n(t)) \rightrightarrows \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ op $[a, b]$? Leg uit hoe de gelijkmatige convergentie daar gebruikt wordt. Er wordt hier *niet* gevraagd uit te leggen waarom de gelijkmatige convergentie geldt!

`[2]` Leg uit waarom de ongelijkheid $\sup_{t\in[a,b]} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_n(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))\| \leq C \sup_{t\in[a,b]} \|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)\|$ geldt.

6. Toon aan of weerleg: het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 z e^{xy^2 z}, 2xyze^{xy^2 z}, xy^2 e^{xy^2 z})$ is een wervelvrij vectorveld in $\mathbb{R}^3$.

7. Noem γ_1 de vlakke kromme op de figuur die achtereenvolgens door de punten a, c, d gaat en γ_2 de vlakke kromme op de figuur die achtereenvolgens door de punten b, c, d gaat.
Kunnen γ_1 en γ_2 twee banen zijn van dezelfde differentiaalvergelijking $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$?
(Hierbij is $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een afbeelding van de klasse C^1.)
Leg kort uit. Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.