1ste Ba Wiskunde – 01.06.2021
Analyse II (recto verso)

- *Beantwoord elk van de vragen met een Romeins cijfer op één van de geruite bladen. Neem telkens een nieuw blad* (niet enkel een nieuwe bladzijde) *per vraag. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad. Alles moet ingediend worden: het blad met de opgave, de antwoorden en de kladbladen.* ***Alleen de geruite bladen zullen verbeterd worden.***
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus "analoog" of "wegens de stelling van X", dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

———————— NIEUW GERUIT BLAD ————————

Vraag I.

1. Beantwoord met JA of NEE (geen verdere uitleg):
   (a) Zij f een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ afbeelding. Als f afleidbaar is in $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, dan bestaan $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, en zijn deze partiële afgeleiden continu. NEE
   (b) Als $\mathbf{F}$ een vectorveld is in $\mathbb{R}^3$ van de klasse C^2, dan is $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$. JA
2. Definieer wanneer een functie $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een *lokaal C^k-diffeomorfisme* is in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. (cursus p. 40).
3. Beantwoord de volgende vragen:

   Stelling. *Zij $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een functie van klasse C^k $(k \geq 1)$ in een omgeving van $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Als $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{a})) \neq 0$, dan is $\mathbf{f}$ een lokaal C^k-diffeomorfisme in $\mathbf{a}$.*

   Bewijs. Beschouw de functie
   $$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \quad \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}.$$
   Dan bestaan $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$ zo dat voor elke $\mathbf{x} \in U := B(\mathbf{f}(\mathbf{a}), \delta)$ een unieke $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ bestaat zo dat $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ en is $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ een C^k-afbeelding $U \to \mathbb{R}^n$ **[1]**. Dit toont aan dat $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ de inverse afbeelding is van de bijectie $\mathbf{f} : \mathbf{y}(U) \to U$. We gaan na dat $\mathbf{y}(U)$ een omgeving is van $\mathbf{a}$. Omdat $\mathbf{f}$ continu is, vinden we een $r \in]0, \varepsilon[$ met de eigenschap dat $\mathbf{f}(\xi) \in U$ voor elke $\xi \in B(\mathbf{a}, r)$. Dan is $B(\mathbf{a}, r) \subseteq \mathbf{y}(U)$, want als $\xi \in B(\mathbf{a}, r)$ dan is $\xi = \mathbf{y}(\mathbf{f}(\xi)) \in \mathbf{y}(U)$ **[2]**. □

   Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.

   [1] Verklaar het bestaan van deze δ en ε.
   Deze bestaan door de stelling van de impliciete functies. Het nagaan van de voorwaarden om deze toe te passen, gebeurt zoals in de cursus op p. 40.

   [2] Verklaar de gelijkheid.
   Als $\xi \in B(\mathbf{a}, r)$, dan is ξ het unieke element $\mathbf{z} \in B(a, \varepsilon)$ waarvoor $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\xi) \in U$, wat bij definitie van $\mathbf{y}$ ook gelijk is aan $\mathbf{y}(\mathbf{f}(\xi))$.
4. Beschouw de n-de kernfunctie van Dirichlet $D_n(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{n=-k}^{k} e^{ikt}$.

(a) Toon aan dat $2\pi D_n(t) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$ voor $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. (cursus p. 14)

(b) Zij s_n de n-de partieelsom van de Fourierontwikkeling van een 2π-periodieke functie die integreerbaar is op $[-\pi, \pi]$. Toon aan dat

$$s_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)D_n(t)dt.$$

(cursus p. 14)

(c) Formuleer (geen bewijs!) de stelling over *Convergentie van de Fourierontwikkeling* voor 2π-periodieke functies. (cursus p. 17)

NIEUW GERUIT BLAD

Vraag II.

1. Formuleer de stelling van Stokes (geen bewijs). (cursus p. 85)

2. Beantwoord met JA of NEE (geen verdere uitleg):

   Als een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ functie f van klasse C^2 is in een omgeving van een kritiek punt (a, b), en de Hessiaanse determinant van f is strikt positief (resp. strikt negatief), dan bereikt f een lokaal minimum (resp. maximum). NEE

3. Zij f een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ afbeelding van klasse C^1 en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Toon aan of weerleg: $\nabla f(a, b)$ staat loodrecht op het oppervlak met vergelijking $z = f(x, y)$ in het punt $(a, b, f(a, b))$.
   Vatten we $\nabla f(a,b) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b))$ op als een vector in het xy-vlak (anders is de eigenschap trivialerwijs nooit vervuld), dan zien we dat dit niet kan kloppen, omdat de grafiek van een gladde functie van twee veranderlijken bijna nergens loodrecht staat op een vector in het xy-vlak. Als $\nabla f(a,b) \neq \mathbf{0}$, dan zou dat immers betekenen dat het raakvlak aan de grafiek evenwijdig is met de z-as, wat niet kan (intuïtief zou dit betekenen dat een van de richtingsafgeleiden oneindig groot wordt—het raakvlak is immers opgespannen door $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b))$ en $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b))$). (Je kan ook expliciet de normaal berekenen en zien dat die doorgaans niet parallel is met $\nabla f(a, b)$.)

4. Vul aan en bewijs:

   Zij $a < c < b$. Als f linkscontinu is in c en $\alpha = 1_{[c,+\infty[}$, dan is $\displaystyle\int_a^b f\, d\alpha = \ldots$ (cursus p. 25)

5. Beantwoord met JA of NEE (geen verdere uitleg): Als de afbeelding $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ van klasse C^1 is, dan heeft $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ een unieke oplossing op heel $\mathbb{R}$. NEE

6. Zij $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Kan een baan van de vergelijking $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ een gegeven vectorrechte snijden in juist twee punten? Zo ja, wat weet je dan over die baan? Licht je redenering toe.

   Dit kan zich zeker voordoen, bijv. als $m = 2$ hebben we als banen ellipsen met symmetriemiddelpunt $\mathbf{0}$ als $\mathbf{0}$ een centrum is.

   Stel $\mathbf{v}_1$ is een snijpunt van de gegeven vectorrechte en de gegeven baan $\{\boldsymbol{\varphi}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ (we hebben $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, want de unieke baan door $\mathbf{0}$ is een singleton). Dan is $\boldsymbol{\varphi}(t_1) = \mathbf{v}_1$ voor zekere $t_1 \in \mathbb{R}$. Het andere snijpunt $\boldsymbol{\varphi}(t_2) = \lambda\mathbf{v}_1$ voor zekere $\lambda \notin \{0, 1\}$. Merk op dat ook $\lambda\boldsymbol{\varphi}$ een oplossing is (lineaire vergelijking). De banen $\{\boldsymbol{\varphi}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ en $\{\lambda\boldsymbol{\varphi}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ gaan dan door hetzelfde punt $\lambda\mathbf{v}_1$, en moeten dus samenvallen. Daardoor is $\boldsymbol{\varphi}(t_3) = \lambda\boldsymbol{\varphi}(t_2) = \lambda^2\mathbf{v}_1$ (voor zekere t_3) nog een punt op dezelfde vectorrechte dat tot de baan behoort, en moet dus door het gegeven samenvallen met een van de punten $\mathbf{v}_1$ of $\lambda\mathbf{v}_1$, zodat $\lambda = -1$ en de baan symmetrisch is t.o.v. de oorsprong.