EXAMEN DISCRETE WISKUNDE II

VRIJDAG 25 JUNI 2021

Gebruik voor elke opgave een apart dubbelgevouwen examenpapier.

Vermeld op elk blad je naam en het nummer van de opgave, schrijf op het eerste blad ook je stamnummer.

Het examen is *gesloten boek*. Theorie- en oefeningencursus en/of bijhorende geschreven notities mogen **niet** gebruikt worden.

Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM, smartphone, tablet, computer of andere elektronische toestellen. Deze moeten *volledig uitgeschakeld* zijn.

Je beschikt over 3 uur om dit examen op te lossen.

Als je klaar bent, gebruik een dubbelgevouwen A3 examenpapier om je opgaven, oplossingen en kladpapier te bundelen. Leg de bundel in de voorziene doos.

Hanteer de anderhalve meter-regel op elke locatie en in elke situatie.

Plaats je eigen jas/rugzak/tas in het examenlokaal onder de eigen tafel of stoel.

Etenswaren zijn niet toegestaan, tenzij medisch noodzakelijk. Een flesje water is toegelaten.

Hou het verkregen proceduremasker aan gedurende het hele examen, tot het moment dat je het gebouw hebt verlaten.

Blijf na het examen niet hangen in of rond het gebouw.

VEEL SUCCES!

Opgaven

Opgave 1 (theorie; 3.5 punten)**.** Toon aan dat een koppeling K in een graaf Γ geen maximum koppeling is als en slechts als er twee verschillende onverzadigde toppen bestaan die verbonden kunnen worden door een pad dat alternerend bogen van $\Gamma - K$ en K bevat.

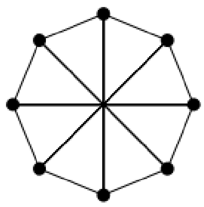
Opgave 2 (theorie; 3.5 punten)**.** Beschouw een permutatievoorstelling (G, X) met kern K. Als L een nevenklasse is van K en $x \in X$, toon dan aan dat $x^g = x^h$ voor alle $g, h \in L$. Als we x^L gelijk stellen aan x^g voor een willekeurige $g \in L$, toon dan eveneens aan dat $(G/K, X)$ hiervoor een getrouwe permutatievoorstelling is.

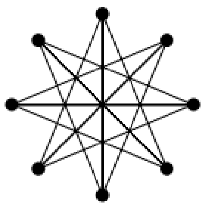
Opgave 3 (theorie; 3 punten)**.** Als $\mathcal{C}$ een q-aire (n, M, d)-code is met $M > 1$, toon dan aan dat $M \cdot \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{n}{j} (q-1)^j \right) \leqslant q^n$. Hoe wordt de code $\mathcal{C}$ genoemd indien er gelijkheid optreedt?

Opgave 4 (oefening; 3 punten)**.** Ga na of volgende uitspraken waar of vals zijn. Indien waar, bewijs. Indien vals, geef een tegenvoorbeeld.

(1) Twee grafen met dezelfde gradenrij zijn isomorf.
(2) Zij Γ een graaf met twee verschillende, niet-adjacente toppen $u, v \in V(\Gamma)$ waarvoor geldt dat $N_\Gamma(u) = N_\Gamma(v)$. Dan is 0 een eigenwaarde van Γ.
(3) Het product van alle niet-nul elementen van een eindig veld $\mathbb{F}_q$ is gelijk aan $-1 \in \mathbb{F}_q$.

Opgave 5 (oefening; 7 punten)**.** Maak kennis met de *Wagnergraaf* Γ, genoemd naar de Duitse wiskundige Klaus Wagner. Kies zelf met welke figuur je het liefste werkt.





De graaf bulkt van de mooie eigenschappen, waaronder het feit dat ze op isomorfisme na uniek bepaald is door haar spectrum.

(1) Bewijs dat de grootte van de automorfismegroep $G := \mathrm{Aut}(\Gamma)$ gelijk is aan 16 en bepaal alle elementen van deze groep.
(2) Beschouw de actie van G op $P := \{\{u, v\} \| u, v \in V(\Gamma)\}$ door $\{u, v\}^g := \{u^g, v^g\}$. Hoeveel banen heeft G op P? Met andere woorden, hoeveel kwalitatief verschillende paren van toppen bestaan er in Γ?
(3) Bewijs dat de minimaalveelterm van Γ gelijk is aan $x^5 - x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 7x - 3$.