# EXAMEN DISCRETE WISKUNDE II

VRIJDAG 3 SEPTEMBER 2021

**Gebruik voor elke opgave een apart dubbelgevouwen examenpapier.**

Vermeld op elk blad je naam en het nummer van de opgave, schrijf op het eerste blad ook je stamnummer.

Het examen is *gesloten boek*. Theorie- en oefeningencursus en/of bijhorende geschreven notities mogen **niet** gebruikt worden.

Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM, smartphone, tablet, computer of andere elektronische toestellen. Deze moeten *volledig uitgeschakeld* zijn.

Je beschikt over 3 uur om dit examen op te lossen.

Als je klaar bent, gebruik een dubbelgevouwen A3 examenpapier om je opgaven, oplossingen en kladpapier te bundelen. Leg de bundel in de voorziene doos.

**Hanteer de anderhalve meter-regel op elke locatie en in elke situatie.**

Plaats je eigen jas/rugzak/tas in het examenlokaal onder de eigen tafel of stoel.

Etenswaren zijn niet toegestaan, tenzij medisch noodzakelijk. Een flesje water is toegelaten.

Hou het verkregen proceduremasker aan gedurende het hele examen, tot het moment dat je het gebouw hebt verlaten.

**Blijf na het examen niet hangen in of rond het gebouw.**

Veel succes!

## Opgaven

**Opgave 1** (theorie; 2 punten)**.** Toon aan dat een graaf $\Gamma$ een even aantal toppen heeft waarvan de graad oneven is.

**Opgave 2** (theorie; 4 punten)**.** Onderstel dat $\Gamma$ een graaf is met $n \geqslant 3$ toppen, en dat $u$ en $v$ twee niet-adjacente toppen van $\Gamma$ zijn waarvoor $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$. Toon dan aan dat $\Gamma$ hamiltoniaans is als en slechts als $\Gamma + uv$ hamiltoniaans is.

**Opgave 3** (theorie; 4 punten)**.** Zij $\Gamma = (V, E)$ een graaf waarvoor er een groep $G$ van automorfismen bestaat die scherp transitief werkt op $V$. Toon aan dat $\Gamma$ een Cayley graaf is.

**Opgave 4** (oefening; 5 punten)**.** Ga na of volgende uitspraken waar of vals zijn. Indien waar, bewijs. Indien vals, beredeneer waarom of geef een tegenvoorbeeld.

(1) Zij $\Gamma$ een samenhangende bipartiete graaf en zij $v \in V(\Gamma)$ een top. Dan geldt dat $d(x, v) \neq d(y, v)$ voor elke boog $\{x, y\} \in E(\Gamma)$.
(2) De stergraaf van orde 2021 (één centrumtop en 2020 bladeren) heeft eigenwaarde 2020.
(3) Er bestaat een graaf met 11 toppen, 5 bogen en 5 samenhangscomponenten.
(4) Als $\beta \in \mathbb{F}_{64}$, dan heeft de veelterm $X^2 + \beta$ een unieke wortel over $\mathbb{F}_{64}$.
(5) Zij $\Gamma$ een graaf met minstens drie toppen waarvoor $\Delta(\Gamma) - \delta(\Gamma) = |V(\Gamma)| - 2$. Dan bezit $\Gamma$ een door haar automorfismegroep gefixeerde top.

**Opgave 5** (oefening; 5 punten)**.** Zij $\mathcal{C}$ een lineaire binaire $[n, k]$-code die geen positie heeft waarin alle codewoorden nul zijn. Bewijs dat de som van de gewichten van de codewoorden van $\mathcal{C}$ gelijk is aan $n \cdot 2^{k-1}$.