1ste Ba Wiskunde – 7/6/2022
Analyse II (recto verso)

1. Toon aan: als f van de klasse C^2 is in de open verzameling $G \subseteq \mathbb{R}^2$, dan is $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in G.
   Zie cursus, stelling 4.3.2.

2. Beantwoord de vragen:

   Stelling. *Veronderstel dat*

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$
$$\boldsymbol{\psi}(u) = (\psi_1(u), \psi_2(u)) \qquad (c \leqslant u \leqslant d)$$

twee parametervoorstellingen van eenzelfde gladde vlakke kromme Γ zijn. Dan bestaat er een functie $\theta : [a,b] \to [c,d]$ met de volgende eigenschappen:

1. $\theta : [a,b] \to [c,d]$ is strikt stijgend of strikt dalend
2. $\theta \in C^1[a,b]$
3. $\theta'(t) \neq 0$ voor alle $a \leqslant t \leqslant b$
4. $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} \circ \theta$.

Bewijs. We gaan na dat $\theta := \boldsymbol{\psi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}$ de eigenschappen 1-2-3 heeft. Als we bewijzen dat θ aan 2. en 3. voldoet, dan zou θ' ofwel steeds positief ofwel steeds negatief op $[a,b]$ zijn[1]. Bijgevolg zou θ strikt stijgend of strikt dalend zijn. Het volstaat dus de eigenschappen 2. en 3. te bewijzen.

2. Neem willekeurig $a \leq t_0 \leq b$ en stel $u_0 = \theta(t_0)$ zodat $c \leqslant u_0 \leqslant d$. We hebben dat

$$\varphi_1(t) = \psi_1(\theta(t)), \quad \varphi_2(t) = \psi_2(\theta(t)).$$

Ook weten we dat $\psi_1'(u_0) \neq 0$ of $\psi_2'(u_0) \neq 0$[2]. Veronderstel dat $\psi_1'(u_0) \neq 0$. (Het andere geval verloopt analoog.) Dan bestaan er zekere omgevingen van u_0 en $\psi_1(u_0)$ waarin ψ_1 inverteerbaar is en ψ_1^{-1} van de klasse C^1 is[3]. Wegens de continuïteit van φ_1 vinden we dat

$$\theta(t) = (\psi_1^{-1} \circ \varphi_1)(t)$$

in een zekere open omgeving van t_0. Bijgevolg is θ glad in een omgeving van t_0 als samenstelling van twee functies van de klasse C^1. Omdat het punt t_0 willekeurig was, kunnen we besluiten dat θ van klasse C^1 is op heel $[a,b]$.

(Vervolgt met het bewijs van deel 3.) □

[1,2,3] Verklaar het onderlijnde.

[1]*: (uit het ongerijmde) Stel dat $\theta'(t_1) > 0$ en $\theta'(t_2) < 0$ voor zekere $t_1, t_2 \in [a,b]$. Omdat θ' continu verondersteld is, zou dan $\theta'(t) = 0$ voor zekere $t \in [a,b]$ door de tussenwaardestelling, in strijd met het gegeven (3).*

[2]*: tot de definitie van parametervoorstelling van een gladde kromme behoort o.a. dat $\boldsymbol{\psi}'(u) \neq 0$ voor elke $u \in [c,d]$, i.h.b. $\boldsymbol{\psi}'(u_0) = (\psi_1'(u_0), \psi_2'(u_0)) \neq \mathbf{0}$, d.w.z. $\psi_1'(u_0) \neq 0$ of $\psi_2'(u_0) \neq 0$.*

[3]*: dit volgt onmiddellijk uit de* stelling van de inverse functies.
Alternatief: z.v.v.a. is $\psi_1'(u_0) > 0$. Door continuïteit is dan $\psi_1'(u) > 0$ in een zeker interval $]\alpha, \beta[\ni u_0$, waardoor ψ_1 strikt stijgend is op $]\alpha, \beta[$. Dan is door eigenschappen uit Wiskundige structuren en functies *$\psi_1^{-1} :]\psi_1(\alpha), \psi_1(\beta)[\to]\alpha, \beta[$ ook strikt stijgend, continu en afleidbaar met afgeleide $(\psi_1^{-1})'(x) = \frac{1}{\psi_1'(\psi_1^{-1}(x))}$. Omdat het rechterlid continu is als combinatie van continue functies, is dus ψ_1^{-1} van klasse C^1 op $]\psi_1(\alpha), \psi_1(\beta)[$.*

3. Beantwoord met JA (J) of NEE (N) (geen verdere uitleg):

(NEE) Is $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding op een (niet noodzakelijk open) gebied $K \subseteq \mathbb{R}^2$, dan is $f(K)$ compact.

(NEE) Is f een scalairenveld op $\mathbb{R}^3$ waarvoor de gemengde afgeleiden van tweede orde onderling gelijk zijn, dan is $\operatorname{div}(\nabla f) = 0$.

4. Zij α en β integratoren op $I = [a, b]$ met $\alpha \leq \beta$. Schrijf (zo zwak mogelijke) voorwaarden op voor f waaronder je zeker bent dat $\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f d\beta$ (dit houdt o.a. in dat beide leden van de ongelijkheid zinvol moeten zijn). Licht je redenering toe. Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.

Dit was een bonusvraag op 0,5 pt., omdat er geen eenduidig beste antwoord is. Een voorbeeld van een zinvol antwoord is:
Opdat beide leden zin hebben, moet f Riemann-Stieltjes-integreerbaar zijn m.b.t. α en m.b.t. β.
Als α en β van klasse C^1 zijn, dan wordt de ongelijkheid $\int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\beta'(x)\,dx$, of dus $\int_a^b f(x)(\beta'(x) - \alpha'(x))\,dx \geq 0$. Hiervoor is een voldoende voorwaarde dat $f(x) \geq 0$ wanneer $\beta - \alpha$ stijgend is (m.a.w. wanneer β sneller stijgt dan α) en $f(x) \leq 0$ wanneer $\beta - \alpha$ dalend is (m.a.w. wanneer α sneller stijgt dan β).
(Uit de vorm van de boven- en ondersommen zien we in feite dat die voorwaarde ook voldoende is als α en β niet noodzakelijk C^1 zijn, zolang $\beta - \alpha$ op elk deelinterval van een goedgekozen partitie hetzij stijgend, hetzij dalend is.)

5. Zij $E \subseteq \mathbb{R}^2$ een eenvoudig gebied. Toon aan of weerleg:

$$\operatorname{opp}(E) = \frac{1}{2}\int_{(\partial E)_+} x\,dy - y\,dx.$$

We passen de stelling van Green toe op het vectorveld $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (-y, x)$. We vinden dat

$$\frac{1}{2}\int_{(\partial E)_+} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\iint_E \Big(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_E 2\,dx\,dy = \operatorname{opp}(E).$$

6. We bekijken de differentiaalvergelijking $x''(t) - (1 - x(t)^2 - x'(t)^2)x'(t) + x(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$.

   (a) Vind een equivalent stelsel van differentiaalvergelijkingen van de vorm $\begin{cases} x'(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(x(t), y(t)). \end{cases}$

   (b) Bepaal de evenwichtspunten (x_0, y_0) van het stelsel uit deel (a).

   (c) Bepaal de beste lineaire benadering van $f_1(x, y)$ en van $f_2(x, y)$ in elk evenwichtspunt (x_0, y_0).

   (d) We bekijken nu telkens het gelineariseerd stelsel t.o.v. elk evenwichtspunt (x_0, y_0), d.w.z., we vervangen $f_1(x, y)$ en $f_2(x, y)$ in het stelsel door hun beste lineaire benaderingen in (x_0, y_0).
   Is (x_0, y_0) stabiel voor het gelineariseerd stelsel? Is (x_0, y_0) asymptotisch stabiel?

(a) $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = (1 - x(t)^2 - y(t)^2)y(t) - x(t). \end{cases}$
(b) De evenwichtspunten zijn de oplossingen van $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$, wat in dit geval betekent $x = y = 0$.
(c) De beste lineaire benaderingen in $(0, 0)$ worden gegeven door $x\frac{\partial f_j}{\partial x}(0, 0) + y\frac{\partial f_j}{\partial y}(0, 0)$ $(j = 1, 2)$. Het gelineariseerd stelsel wordt hier dus $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = y(t) - x(t). \end{cases}$

(d) Het gelineariseerd stelsel is $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *met* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$*. De eigenwaardenvergelijking voor de eigenwaarden van A is* $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$*, of dus* $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$*. Omdat* $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ *voor tenminste één eigenwaarde, is* $(0,0)$ *een instabiel (en dus ook niet asymptotisch stabiel) evenwichtspunt voor het gelineariseerd stelstel.*

7. Zij $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ met $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ en $|b_n| \leq \frac{1}{n^2}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$.

   Als $f(x) := \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, is dan $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ voor elke $n \in \mathbb{N}$? Leg uit.

   De integraalvorm voor de Fourier-coëfficiënten van een Fourierreeks geldt zodra de reeks gelijkmatig *convergeert (cursus, stelling 2.1.3). De gelijkmatige convergentie volgt uit de M-test van Weierstrass:* $|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{2}{n^2}$*, en de reeks* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *convergeert.*

8. Verkrijg je met de volgende redenering de correcte waarde voor $\frac{\partial \theta}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$? Leg uit waarom (niet). Als je gebruik maakt van stellingen uit de cursus, dan hoef je deze hier niet te bewijzen.

   Zij $\begin{cases} x(\theta, r) = r\cos\theta \\ y(\theta, r) = r\sin\theta. \end{cases}$ Dan is $\dfrac{\partial x}{\partial \theta}(\theta, r) = -r\sin\theta.$

   Voor de inverse transformatie vinden we dan $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{1}{\frac{\partial x}{\partial \theta}(\theta, r)} = -\dfrac{1}{r\sin\theta}.$

   Nee: voor een functie x van één veranderlijke θ kunnen we de afgeleide $\theta'(x)$ *van de inverse functie* $\theta(x)$ *berekenen als* $\frac{1}{x'(\theta(x))}$*. Voor functies van twee veranderlijken krijg je de inverse van* $\boldsymbol{\varphi}(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ *door de Jacobiaanse matrix te inverteren:*

$$(D\boldsymbol{\varphi}^{-1})(r\cos\theta, r\sin\theta) = (D\boldsymbol{\varphi}(\theta, r))^{-1} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

   zodat $\frac{\partial \theta}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\frac{\sin\theta}{r}$*, of* $\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$*.*
   (Je kan ook expliciet $\theta(x, y)$ *berekenen door de transformatie te inverteren en zo zien dat de bewering niet klopt.)*