EXAMEN DISCRETE WISKUNDE II

MAANDAG 20 JUNI 2022

pic1_paper.jpg

Gebruik voor elke opgave een apart examenpapier.

pic2_write.jpg

Vermeld op elk blad je naam en het nummer van de opgave, schrijf op het eerste blad ook je stamnummer.

pic3_nobooks.jpg

Het examen is *gesloten boek*. Theorie- en oefeningencursus en/of bijhorende geschreven notities mogen **niet** gebruikt worden.

pic4_nodevices.jpg

Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM, smartphone, tablet, computer of andere elektronische toestellen. Deze moeten *volledig uitgeschakeld* zijn.

VEEL SUCCES!

Opgaven

Opgave 1 (theorie; 4.5 punten)**.** Formuleer en bewijs de stelling van Brooks omtrent chromatische getallen in een graaf.

Opgave 2 (theorie; 3.5 punten)**.** Toon aan dat een niet-lege graaf $\Gamma = (V, E)$ een Cayleygraaf is als en slechts als Γ een groep G van automorfismen heeft die scherp transitief werkt op V.

Opgave 3 (theorie; 2 punten)**.** Wat verstaat men onder een (n, M, d)-code? Als $d \in \mathbb{N}$ oneven is, toon dan aan dat er een binaire (n, M, d)-code bestaat als en slechts als er een binaire $(n+1, M, d+1)$-code bestaat.

Opgave 4 (oefening; 5 punten)**.** Zij T een boom van orde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

(1) Stel dat T geen toppen van graad 2 heeft.

(a) Bewijs dat T op z'n minst

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

bladeren[1] heeft.

(b) Bewijs dat deze grens scherp is voor elke $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

(2) Zij $d \in \{2, \ldots, n-1\}$; stel dat elke top die geen blad is graad op z'n minst d heeft. Bewijs dat T op z'n minst

$$\left\lceil \frac{(d-2)n + 2}{d-1} \right\rceil$$

bladeren heeft.

Opgave 5 (oefening; 5 punten)**.** Bepaal het spectrum van de complete bipartiete graaf $K_{n,m}$ ($n, m \in \mathbb{N}$).

[1] *Bladeren* van een boom zijn precies de toppen van graad 1.