Examen vectoranalyse 2021-2022

Hans Vernaeve
Eerste bachelor fysica en sterrenkunde Datum 07/06/2022

1 Theorie

1.1 Vraag 1

Is f van de klasse C^2 in de open verzameling $G \subseteq \mathbb{R}^2$, dan is $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in G. Bewijs.

1.2 Vraag 2

Gegeven het bewijs: Stelling: Veronderstel dat

$$\vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \qquad (a \leq t \leq b) \tag{1}$$

$$\vec{\psi}(u) = (\psi_1(u), \psi_2(u)) \qquad (c \leq u \leq d) \tag{2}$$

twee parametervoorstellingen van eenzelfde gladde kromme Γ zijn. Dan bestaat er één en juist één functie $\theta : [a, b] \to [c, d]$ met de volgende eigenschappen:

1. $\theta : [a, b] \to [c, d]$ is strikt stijgend of strikt dalend
2. $\theta \in C^1[a, b]$
3. $\theta'(t) \neq 0$ voor alle $a \leq t \leq b$
4. $\vec{\varphi} = \vec{\psi} \circ \theta$

Bewijs: Eigenschap 4. toont dat er hoogstens één dergelijke θ kan bestaan, nl. $\vec{\psi}^{-1} \circ \vec{\varphi}$. We gaan nu na dat $\theta := \vec{\psi}^{-1} \circ \vec{\varphi}$ de eigenschappen 1-2-3 heeft. Als we bewijzen dat θ aan 2. en 3. voldoet, dan zou θ' ofwel steeds positief ofwel steeds negatief op [a,b] zijn [1]. Bijgevolg zou θ strikt stijgend of strikt dalend zijn. Het volstaat dus eigenschappen 2. en 3. te bewijzen. Als samenstelling van bijecties is $\theta = \vec{\psi}^{-1} \circ \vec{\varphi}$ zeker zelf een bijectie van [a, b] op [c,d].

2. θ' bestaat en is continu in [a, b]. Neem willekeurig $a \leq t_0 \leq b$ en stel $u_0 = \theta(t_0)$ zodat $c \leq u_0 \leq d$. We hebben dat

$$\varphi_1(t) = \psi_1(\theta(t)), \qquad \varphi_2(t) = \psi_2(\theta(t)) \tag{3}$$

Dit betekent dat minstens één van de 2 getallen $\psi_1'(u_0)$ of $\psi_2'(u_0)$ verschillend van nul is [2]. Veronderstel dat $\psi_1'(u_0) \neq 0$. (Het andere geval verloopt analoog). Er bestaan zekere omgevingen van u_0 en $\psi_1(u_0)$ waarin ψ_1 inverteerbaar is en ψ_1^{-1} van de klasse C^1 is [3]. Wegens de continuïteit van φ_1 en (3) vinden we dat

$$\theta(t) = (\psi_1^{-1} \circ \varphi_1)(t) \tag{4}$$

in een zekere open omgeving van t_0. Bijgevolg is θ glad in een omgeving van t_0 als samenstelling van 2 functies van de klasse C^1. Omdat het punt t_0 willekeurig was, kunnen we besluiten dat θ van klasse C^1 is op heel [a, b]. 3. (staat in cursus maar is niet belangrijk voor deze vraag)

Verklaar [1]-[1]-[3].

1.3 Vraag 3

Geef de gradiënt in poolcoördinaten.

1.4 Vraag 4

Waar of niet waar, uitleg is niet nodig.

1. Als f continu is over ..., dan is de waardenverzameling compact.
2. Als $\vec{F}$ een vectorveld is in $\mathbb{R}^3$ van de klasse C^2 dan is $div(\nabla \vec{F}) = 0$.
3. Als f een scalairenveld is in $\mathbb{R}^3$ en van de klasse C^2, dan is $rot(f\vec{F}) = \nabla f.\vec{F} + frot(\vec{F})$.

1.5 Vraag 5

Als E een eenvoudig gebied is, klopt volgende stelling dan?

$$opp(\Sigma) = \frac{1}{2}\int_{(\partial E)_+} ydx - xdy \tag{5}$$

1.6 Vraag 6

Klopt het volgende? Beargumenteer.

$$\vec{a} \times \int\int_{\Sigma} \vec{F}.d\vec{\sigma} = \int\int_{\Sigma} (\vec{a} \times \vec{F}) d\vec{\sigma} \tag{6}$$

1.7 Vraag 7

Als Γ een vlakke kromme is in het xy-vlak gedefinieerd als f(x,y) = 0 en $\nabla f(x,y) \neq \vec{0}$ voor alle punten (x, y) op Γ. Klopt dan de volgende stelling? De raaklijn aan de kromme staat verticaal (parallel aan de y-as) in het punt (x_0, y_0) als en slechts als $\nabla f(x,y)$ horizontaal staat (parallel aan de x-as).

1.8 Vraag 8

Gegeven: $x = rcos\theta$ en $y = rsin\theta$. Als $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -rsin\theta = -y$ geldt dan voor $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-1}{y}$? Beargumenteer.

2 Oefeningen

2.1 Oefening 1

Geef de lengte van de spiraal $(e^{-t}cos(t), e^{-t}sin(t))$ geprojecteerd op de kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2.2 Oefening 2

Geef de oppervlakte van het vlak $z = xy + 1$ begrensd door de cilinder $x^2 + y^2 = 1$.

2.3 Oefening 3

$$ycos(xy) + ((xcos(xy) + 2ysin(xy))y' = 0 \tag{7}$$

Is deze oplossing wervelvrij? Indien ja los op en indien nee, zoek de integrerende factor en los daarmee op.