Groepen en Representaties
Examen 23-24

Tweede Bachelor Fysica en Sterrenkunde 30 juni 2024

1 Oefeningen (8pt)

Vraag 1 (5pt): We beschouwen $S_3 \simeq Z_3 \rtimes Z_2 \simeq \langle a, b | a^2 = b^3 = 1, aba = b^2 \rangle$ de permutatiegroep van 3 letters. We kiezen de generatoren als $a = (12)$ en $b = (123)$. Beschouw ook standaardbasis $e_1 = (100)^T$, $e_2 = (010)^T$, $e_3 = (001)^T$ van $\mathbb{C}$. Dan is de *definiërende representatie* D van S^3 gedefinieerd op $\mathbb{C}^3$ via $D(\sigma) : e_i \to e_{\sigma(i)}$.

1. Geef de matrix representaties $D(a)$ en $D(b)$ in deze basis e_1, e_2, e_3. Je kan ter controle checken (hoeft niet) dat ze voldoen aan $D(a)^2 = D(b)^3 = \mathbb{1}$ en $D(a)D(b)D(a) = D(b)^2$.

2. Toon aan dat

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   commuteert met $D(\sigma)$ voor alle σ. Doe dit in twee stappen: toon aan dat P commuteert met $D(a)$ en $D(b)$ en argumenteer dan waarom P automatisch ook commuteert met alle $D(\sigma)$ voor alle $\sigma \in S^3$. Wat impliceert dit volgens Schurs lemma? *(deze laatste vraag is belangrijk)*

3. Toon aan dat $W = span_{\mathbb{C}}\{e_1 + e_2 + e_3\}$ een invariante deelruimte is van deze representatie. Hint: je kan een argument geven zonder expliciete berekeningen te doen.

4. Toon aan dat P een projector op W is.

5. Beschouw het orthogonaal complement $W^\perp := \{v \in \mathbb{C}^3 | v \cdot (e_1 + e_2 + e_3) = 0\}$, met $\cdot$ het standaardproduct. Een projector op $W^\perp$ is $\mathbb{1} - P$. Toon aan dat $W^\perp$ ook een invariante deelruimte van D is.

6. We noteren $\omega = exp(2\pi i/3)$, $\omega^3 = 1$, $\omega + \omega^2 = -1$. Een basis voor het orthogonaal complement $W^\perp$ is $\{u_1 = \omega e_1 + e_2 + \omega^3 e_3, u_2 = e_1 + \omega e_2 + \omega^2 e_3\}$. Bereken $U^\dagger D(a) U$ en $D^\dagger D(b) U$ met Clebsch-Gordan coëfficiënten:

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \omega & 1 \\ 1 & 1 & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

7. Argumenteer waarom $D \simeq \underline{1} \oplus \underline{2}$ en verklaar de notatie.

8. Gebruik karaktertheorie om aan te tonen dat $\underline{2}$ irreducibel is.

Vraag 2 (3pt): In deze oefening berekenen we conjugacy classes van SU(2). Herinner uit lineaire algebra dat elke unitaire matrix W gediagonaliseerd kan worden met een unitaire matrix X, i.e. $XWX^\dagger$ is diagonaal.

1. Gegeven een $U \in \mathrm{SU}(2)$, toon aan dat er een $V \in \mathrm{SU}(2)$ bestaat zodat $VUV^\dagger = D$ met $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ een diagonale matrix.

2. Toon aan dat λ_1 kan geschreven worden als $\lambda_1 = e^{i\varphi}$ en $\lambda_2 = e^{-i\varphi}$ met $\varphi \in [0, \pi)$.
3. Wat zijn de conjugacy classes van SU(2)?
4. Herinner dat elk element van van SO(3) kan worden geschreven als $e^{i\theta\overline{n}\cdot\overline{L}}$ met L_x, L_y, L_z de 3 generatoren van $\mathfrak{so}(3)$ in de 3 dimensionale irrep en $\overline{n} \in \mathbb{R}^3$ een eenheidsvector. Men kan aantonen dat $e^{i\phi\overline{n}\cdot\overline{L}}e^{i\theta\overline{n'}\cdot\overline{L}}e^{-i\phi\overline{n}\cdot\overline{L}} = e^{i\theta\overline{n''}\cdot\overline{L}}$ waar $\overline{n''} = R_{\overline{n}}(\phi)\overline{n'}$. Wat zijn de klasses van SO(3)?

2 Theorie (12pt)

Heb de vragen nie. Er waren 3 vragen op elk 4pt met 3-4 deelvragen. Ongeveer 1 'bewijs dit' per vraag, 1 keer basically definitie geven en dan paar keer 'wat is de hoofdvraag in de kristallografie', 'wat zijn alle irreps en hun dimensies van SU(2) of SO(2) idk', 'hoe weet je of een representatie irreducibel is', ...

1. Bewijs van 1, 2, 3, 4 en 6 talligheid werd gevraagd.