Informatie over het examen

- Het examen duurt 3 uur.
- Alle antwoorden dienen op papier ingediend te worden. **Gelieve wel de theorie op de dubbele bladen te beantwoorden en de oefeningen op aparte geruite bladen te beantwoorden. Elke oefening dient op een apart enkel geruit blad beantwoord te worden.**
- Schrijf uw naam op elk blad. Ook steeds een blad indienen als u een vraag niet beantwoordt.
- De antwoorden dienen een grondige uitwerking te hebben. Uitleg is dus heel belangrijk! Een oplossing zonder bijhorende uitleg is zeker niet voldoende.

Theorie

1. (a) Geef en bewijs de volledige classificatie van alle cyclische groepen.
   (b) Toon aan dat de groep $(\mathbb{R}, +)$ niet cyclisch is.
   (c) Beschouw de cyclische groep $(G, +)$ van de orde n en de cyclische group $(H, +)$ van de orde m, met $\text{ggd}(n, m) = 1$. Toon aan dat het direct product $(G \times H, +)$ van de groepen $(G, +)$ en $(H, +)$ een cyclische groep is van de orde nm.
2. (a) Toon aan dat de verzameling $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oneindig aftelbaar is.
   (b) Beschouw ons alfabet $A = \{a, \ldots, z\}$.
   Een *woord* over dit alfabet A is een eindige reeks letters uit de verzameling A met lengte minstens één. Een woord hoeft geen betekenis te hebben; het hoeft enkel een eindige reeks letters uit de verzameling A met lengte minstens één te zijn.
   Toon aan dat het aantal woorden over dit alfabet A oneindig aftelbaar is.

Oefeningen Geef ook bij elke oplossing voor een oefening een gedetailleerde verklaring.

Oefening 1

- Toon aan dat $p|(2^p - 2)$ voor elk priemgetal p.
- Toon aan via de Chinese reststelling dat $(\forall n \in \mathbb{N})(n^{13} \equiv n \pmod{1365})$.
- Stel dat p en q twee verschillende oneven priemgetallen zijn. Stel dat a een positief natuurlijk getal is met $\text{ggd}(a, pq) = 1$.

  Toon aan dat de vergelijking $X^2 \equiv a \pmod{pq}$ ofwel nul oplossingen heeft ofwel 4 verschillende oplossingen heeft.

Oefening 2

Op de planeet COMPUTER gebruiken de inwoners de munteenheid BINAIR. Zij hebben enkel bankbiljetten die een waarde 2^k hebben. Voor elk natuurlijk getal k is er een bankbiljet met waarde 2^k.

Zij $w(n,k)$ het aantal manieren waarop een bedrag van n BINAIR, $n \in \mathbb{N}$, betaald kan worden met bankbiljetten met waarde hoogstens 2^k.

- Toon dat $w(n,k) = w(n-2^k,k) + w(n,k-1)$.
- Toon aan dat als $4|n$, dan $w(n,2) = (\frac{n}{4}+1)^2$ en $w(n,1) = \frac{n}{2}+1$.
- Toon aan: Zij n een veelvoud van 2^k, $k > 0$, dan is $w(n,k) \leq \frac{n}{2^k} w(n,k-1) + 1$.