# EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA EN MEETKUNDE I

VRIJDAG 8 JANUARI 2021

EERSTE BACHELOR WISKUNDE

- **Vermeld je naam op elk blad.**
- Schrijf je antwoorden op het geruite papier.
  - **Noteer je antwoorden op theorievragen op de dubbelgevouwen bladen.**
  - **Noteer je antwoorden op oefeningen op *aparte*, enkele bladen.**
  - **Dien voor iedere vraag een antwoord in, ook al heb je deze niet opgelost.**
- Leg je studentenkaart (of een ander identificatiebewijs) zichtbaar klaar tijdens het opnemen van de aanwezigheden.
- Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM, smartphone, tablet, computer of andere elektronische toestellen. Deze moeten **volledig uitgeschakeld** zijn.
- Elke **poging** tot spieken kan leiden tot (ernstige) sancties, zoals bijvoorbeeld het nietig verklaren van al je examens.
- Je beschikt over 3 uur om dit examen op te lossen.
- Alle nota's mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit examen. *Let er echter op niet te veel tijd te verliezen door te veel op te zoeken.*
- Resultaten uit de cursus (definities, stellingen, lemma's, enz.) die je gebruikt in je argumentatie moet je niet expliciet opschrijven, een verwijzing volstaat. Wel moet je zeer duidelijk aangeven hoe je een dergelijk resultaat gebruikt.
- Bij de oefeningen mag je tijdens het oplossen van een deeltje (x) gebruik maken van alle voorgaande deeltjes, ook als je die niet hebt kunnen oplossen.
- Veel succes!

## Theorie

*Begin een nieuw dubbelgevouwen, geruit blad.*

**Opgave 1.** (4 punten) In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen uit de cursusnota's in detail te verklaren.

(i) Op pagina 71 staat "Uit Opmerking 3.1.2 volgt nu dat $f = \sum_{ij} \mu_{ij} f_{ij}$". Verklaar deze overgang in detail.

(ii) Op pagina 122 staat dat $SO_n(\mathbb{R})$ een deelgroep is van $O_n(\mathbb{R})$. Verklaar deze bewering in detail.

(iii) Op pagina 169 staat in het midden dat $A_{f^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i} = (A_f)^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i (A_f)^i$. Verklaar deze overgang in detail.

**Opgave 2.** (2 punten) Zij $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte van dimensie 3.

Stel dat $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ een symmetrische matrix is.

Toon aan dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

a) Alle eigenwaarden van $A$ zijn strikt positief

b) Voor alle $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^t\}$ geldt $\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$.

**Opgave 3.** (4 punten) Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een argument; indien fout, geef een tegenvoorbeeld. (Enkel "juist" of "fout" antwoorden, zonder verklaring, levert geen punten op.)

(i) Zij $V$ een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Stel dat $F : V \to V$ een lineaire afbeelding is met $\dim(V) = 2$. Heeft dan $F$ altijd tenminste een reële eigenwaarde? Heeft $F$ altijd tenminste een reële eigenwaarde indien $\dim(V) = 2020$ in plaats van $\dim(V) = 2$? Heeft $F$ altijd tenminste een reële eigenwaarde indien $\dim(V) = 2021$ in plaats van $\dim(V) = 2$?

(ii) Stel dat $A, B \in Mat_n(\mathbb{R})$ en dat $A \cdot B = 0$ waarbij $A \neq 0 \neq B$. Dan is $\det(A) = 0$ en $\det(B) = 0$.

(iii) Zij $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ een vierkante matrix van rang één. Dan bestaat er een unieke $\lambda \in \mathbb{R}$ met $A^2 = \lambda A$.

Begin een nieuw enkel geruit blad.

**Opgave 4.** (5 punten) Zij $K$ een veld en $V$ een eindigdimensionale $K$-vectorruimte. Beschouw een lineaire operator $f$ op $V$ met de eigenschap dat $f(W) \subseteq W$ voor elke deelruimte $W \leq V$.

(i) Bewijs de volgende uitspraak:

$$(\forall v \in V)(\exists \lambda \in K)(f(v) = \lambda v).$$

(ii) Bewijs de volgende uitspraak:

$$(\exists \lambda \in K)(\forall v \in V)(f(v) = \lambda v).$$

*Hint: pas (i) toe op een som van twee niet-nulvectoren uit $V$.*

**Oplossing.**

(i) Zij $v \in V$ willekeurig. Merk op dat $\langle v \rangle \leq V$, en dus wegens de gegevens dat $f(\langle v \rangle) \subseteq \langle v \rangle$. Hieruit volgt dat $f(v) \in \langle v \rangle$, wat impliceert dat $f(v)$ een scalair veelvoud is van $v$.

(ii) Uit punt $(i)$ weten we dat er voor elke vector $v \in V$ een element $\lambda_v \in K$ bestaat zodat $f(v) = \lambda_v v$. Kies nu twee vectoren $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ willekeurig. Dan weten we dat

- $f(v_1) = \lambda_{v_1} v_1$,
- $f(v_2) = \lambda_{v_2} v_2$, en
- $f(v_1 + v_2) = \lambda_{v_1+v_2}(v_1 + v_2)$.

Combineren we dit, dan weten we dat

$$\begin{aligned} \lambda_{v_1} v_1 + \lambda_{v_2} v_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) &= \lambda_{v_1+v_2}(v_1 + v_2) \\ &= \lambda_{v_1+v_2} v_1 + \lambda_{v_1+v_2} v_2, \end{aligned}$$

met andere woorden,

$$(\lambda_{v_1} - \lambda_{v_1+v_2}) v_1 + (\lambda_{v_2} - \lambda_{v_1+v_2}) v_2 = 0.$$

Als $v_1$ en $v_2$ lineair onafhankelijk zijn, betekent dit dus dat $\lambda_{v_1} = \lambda_{v_1+v_2} = \lambda_{v_2}$. Als $v_1$ en $v_2$ lineair afhankelijk zijn, dan is $v_1 = \mu v_2$ voor een zekere $\mu \in K^\times$, waaruit volgt dat $\lambda_{v_1} v_1 = f(v_1) = f(\mu v_2) = \mu \lambda_{v_2} v_2 = \lambda_{v_2} v_1$, waaruit tevens volgt dat $\lambda_{v_1} = \lambda_{v_2}$.

Begin een nieuw enkel geruit blad.

**Opgave 5.** (5 punten) Beschouw de vectorruimte $M_2(\mathbb{R})$ en de matrix $D \in M_2(\mathbb{R})$, met $D := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zij $f$ de volgende lineaire operator op $M_2(\mathbb{R})$:

$$f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}) : C \mapsto CD - DC.$$

(i) Bepaal de matrixvoorstelling $A_f$ van $f$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ van $M_2(\mathbb{R})$, waarbij

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Is de matrix $A_f$ diagonaliseerbaar? Verklaar waarom (niet).

(iii) Beschouw de lineaire vorm

$$\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : C \mapsto \mathrm{tr}(C).$$

1. Bewijs dat $\varphi \in \ker(f^*)$.
2. Bewijs dat $f^*$ geen automorfisme is van $M_2(\mathbb{R})^*$.

*Hierbij is $f^*$ de duale afbeelding van $f$.*

**Oplossing.**

(i) Er geldt dat

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dus de matrixvoorstelling $A_f$ is gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) De determinant $\det(xI_4 - A_f) = x^4$ is gemakkelijk te berekenen als men eerst ontwikkelt naar de tweede kolom (of derde rij) en vervolgens naar de tweede rij (of tweede kolom). Aangezien $A_f$ eigenwaarde 0 heeft met algebraïsche multipliciteit 4, is de matrix $A_f$ slechts diagonaliseerbaar als de oplossingsruimte van het homogeen stelsel met coëfficiëntenmatrix $A_f$ gelijk is aan de volledige ruimte $\mathbb{R}^4$. Dit is enkel het geval als $A_f = \boldsymbol{O}$, wat niet zo is. De matrix $A_f$ is bijgevolg niet diagonaliseerbaar.