

Theoretische mechanica

Theorie-examen

Academiejaar 2024-25

2e Zit

- Verzorg je wiskundige notatie! Vectorgrootheden krijgen een pijltje bovenaan.
- Geef voldoende tekst en uitleg bij je afleidingen.
- Als je een vraag niet beantwoordt: schrijf in elk geval het nummer van de vraag op je antwoordblad en vul aan met "geen antwoord".
- Er zijn vier vragen (zie ook achterkant blad).

Vraag 1 (2/10)

(Zwaartepunt van een systeem met meerdere deeltjes)

- Toon aan dat het totaal draaimoment (rond de oorsprong) de som is van het draaimoment van het zwaartepunt plus het draaimoment van de beweging van de deeltjes t.o.v. het zwaartepunt.
- Toon aan dat de totale kinetische energie gelijk is aan de som van de kinetische energie van het zwaartepunt plus de kinetische energie van de beweging van de deeltjes rond het zwaartepunt.

Opgave 2 (3/10)

- De Lagrangiaan voor een deeltje in een conservatief centraal krachtveld is gegeven door $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$. Toon aan, via behoud van zowel draaimoment als energie, dat het probleem kan gereduceerd worden tot een 1e orde differentiaalvergelijking in $r(t)$.
- Geef een formele oplossing voor $r(t)$ en $\theta(t)$.

Opgave 3 (3/10)

Leid de normaaltrillingsvergelijking af voor een conservatief systeem met holonoom-tijdsonafhankelijke bindingen (beschreven door een Lagrangiaan met n veralgemeende coördinaten), voor kleine uitwijkingen rond een stabiel evenwichtspunt.

Vraag 4 (2/10)

Leid de bewegingsvergelijkingen van Hamilton af voor een systeem met Lagrangiaan $L(q_k, \dot{q}_k, t)$.

Theoretische Mechanica

Oefeningenexamen – 2e zit

Academiejaar 2024 -25

Opgave 1 (5/10)

Een deeltje met massa m beweegt op een gekromd oppervlak in de driedimensionale ruimte. Het gekromd oppervlak is cilindrisch symmetrisch en heeft als vergelijking $z = f(\rho)$ met $f(\rho)$ een bepaalde gladde functie en $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ de afstand tot de z -as. Het deeltje beweegt onder invloed van de zwaartekracht.

1. Bepaal een uitdrukking voor de kinetische en potentiële energie in functie van cilindrische coördinaten.
2. Stel de Lagrangiaan op en bepaal de bewegingsvergelijkingen. Toon aan dat er een cyclische coördinaat is en bepaal de bijhorende behouden grootte. Wat is de fysische interpretatie van deze constante van beweging? Gebruik deze om een ééndimensionale bewegingsvergelijking op te stellen.
3. Zoek een effectieve massa $\tilde{m}(\rho)$ en een effectieve potentiaal $\tilde{V}(\rho)$ (beide zijn functies van ρ) zodat de nieuwe Lagrangiaan $\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{V} = \frac{1}{2}\tilde{m}(\rho)\dot{\rho}^2 - \tilde{V}(\rho)$ resulteert in dezelfde ééndimensionale bewegingsvergelijking. Toon dit aan.
4. Beperk je nu tot een machtswet $f(\rho) = C\rho^\alpha$ met C en α reële parameters. Voor welke waarden van C en α bestaan er cirkelvormige bewegingen? Voor welke waarden zijn deze cirkelbewegingen stabiel?

Opgave 2 (5/10)

Werk in het verticale vlak (dus twee dimensies). Figuur zie ommezijde. Een gelijkbenige winkelhaak ABC is opgehangen in het punt B en kan vrij scharnieren in dit punt. De massaloze benen AB en BC hebben dezelfde lengte ℓ , en de hoek tussen de benen is 90° . In C is een puntmassa m bevestigd. In A is een vrij scharnierende massaloze staaf AD met lengte $\sqrt{2}\ell$ bevestigd. Aan het uiteinde D is opnieuw een puntmassa met massa m bevestigd. Op beide massa's werkt de zwaartekracht in.

1. Hoeveel veralgemeende coördinaten zijn nodig en waarom? Kies geschikte veralgemeende coördinaten.
2. Stel de kinetische en potentiële energie op.
3. Bepaal de evenwichtspunten en onderzoek de stabiliteit.
4. Bepaal de frequenties en het karakter van de normaaltrillingen.

