
Examen Vectoranalyse 2023 - 2024

1 Theorie

1.1 Vraag 1

Bewijs de volgende stelling: Zij $E \subseteq \mathbb{R}^2$ een open gebied en \vec{F} een conservatief vectorveld in E . Zij $(\alpha, \beta) \in E$. Toon dan aan dat $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ met

$$f(x, y) := \int_{(\alpha, \beta)}^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (1)$$

1.2 Vraag 2

Vul aan: Zij $(0, 0) \in G$ een open deelverzameling van \mathbb{R}^2 en $f \in C^m(G) (m \geq 1)$. Als het gesloten lijnstuk met uiteinden $(0, 0)$ en (x, y) helemaal in G ligt, dan bestaat er op dat lijnstuk een punt (ξ, η) waarvoor

$$f(x, y) = f(0, 0) + \dots$$

1.3 Vraag 3

Passief bewijs van stelling van impliciete functies (2.1.4) paar dingen verklaren en stelling (7.2.3) verklaren waarom $(f(\varphi(t)))' = 0$ en ook verklaren waarom de stelling volgt uit het bewijs.

1.4 Vraag 4

Antwoord met JA of NEE, uitleg niet nodig

J/N Zij K een compacte verzameling, dan convergeert elke rij in K naar elementen in K .

J/N Zij de jacobiaan van f inverteerbaar in \mathbf{a} , dan is f ook inverteerbaar in een omgeving van \mathbf{a}

J/N zij $\iint_{B(0,1)} f d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(\cos\theta, \sin\theta) dr$

1.5 Vraag 5

Zij $f(t\mathbf{r}) = t^\alpha f(\mathbf{r})$. Toon dan aan door af te leiden naar t , dat $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_r} = \alpha \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|}$. Hierbij is $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$

1.6 Vraag 6

Bespreek volgende stelling: Is $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \nabla(\mathbf{F})\mathbf{G} + \nabla(\mathbf{G})\mathbf{F}$? \mathbf{F} en \mathbf{G} vectorvelden over \mathbb{R}^n

1.7 Vraag 7

Bespreek volgende stelling: zij f scalairveld waarvan alle tweede partieel afgeleiden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ bestaan en continu zijn over \mathbb{R}^2 . zijn dan $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu over heel \mathbb{R}^2 ?

1.8 Vraag 8

Toon aan dat

$$\iint_{\Sigma} (\nabla f \cdot \mathbf{x}\mathbf{F}) \cdot d\sigma = \int_{(\partial\Sigma)_+} (f\mathbf{F}) \cdot d\sigma - \iint_{\Sigma} (f \operatorname{rot}(\mathbf{F})) \cdot d\sigma$$

2 Oefeningen

2.1 Oefening 1

Bereken de volgende integraal

$$\iint_{\Sigma} z \cdot d\vec{\sigma} \quad (2)$$

Hier is Σ het oppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, met $z \leq 0$. Hiervan wordt de projectie op het xy-vlak begrensd door $16(x^2 + y^2) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

2.2 Oefening 2

Beschouw $x + y + z = c$ voor alle $c \geq 0$

- 1) Bepaal voor $f(x, y, z) = xyz$ onder bovenstaande voorwaarde een globaal maximum.
- 2) Verklaar waarom f in het punt $x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$ geen maximum kan bereiken.
- 3) Bepaal voor $f(x, y, z)$ nu een globaal maximum. Wegens de vorige deelvraag mag je ervan uitgaan dat $x, y, z \geq 0$
- 4) Verklaar waarom $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$.

2.3 Oefening 3

Beschouw de volgende differentiaalvergelijking:

$$1 + \left(\frac{1}{y \cos^2(y)} + \frac{x}{y}\right)y' = 0 \quad (3)$$

- 1) Is deze differentiaalvergelijking exact? Zo ja, los op. Zo nee, bepaal de integrerende factor en los op. Deze uitkomst mag in de impliciete vorm staan.

Stel nu alle constanten die nog in je vergelijking staan gelijk aan nul.

- 2) Bepaal alle punten waarvoor een impliciete vergelijking $y(x)$ bestaat en van C^1 -klasse is.
- 3) Bepaal voor een vergelijking voor het raakvlak aan de functie in deze punten.

Voor de mensen die deelvraag (1) van vraag (3) niet konden oplossen, werd een vergelijking gegeven om alsnog deelvraag (2) en (3) te kunnen oplossen en hiervoor punten te kunnen ontvangen.

$$e^{xy} + xy = 0 \quad (4)$$

Disclaimer: Deze vergelijking heeft niets te maken met de oplossing van deelvraag (1), dit is puur ter vervanging.
