Examen WSF 2024-2025

Eerste Bachelor Fysica en Sterrenkunde
24 januari 2025

1 Vraag 1 (5p)

Gegeven: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$.

a) Als $A \neq 0$, bewijs dat:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}. \tag{1}$$

b) Stel dat $A = 0$ en f integreerbaar is over [0, x] met $x > 0$. Toon dan aan dat:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \right) = 0. \tag{2}$$

(*Let op*: gebruik in uw bewijzen de formele definitie van de limiet naar $+\infty$.)

2 Vraag 2 (2,5p)

Gegeven de driehoekfunctie met voorschrift:

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| \leq 1, \\ 0 & |t| > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Bepaal de Fourier-transformatie van deze functie door directe berekening.

Gebruik daarnaast een eigenschap om de Fourier-transformatie te bepalen van de uitgerekte driehoeksfunctie, waarbij $a > 0$:

$$tri_a(t) = tri\left(\frac{t}{a}\right). \tag{4}$$

3 Vraag 3 (2,5p)

Definieer voor $x \geq 0$ de functie har als volgt:

$$har(x) = \int_0^1 \frac{1 - t^x}{1 - t}\, dt. \tag{5}$$

Toon aan dat deze functie een uitbreiding van de harmonische reeks is van de natuurlijke getallen naar de positieve reële getallen. Toon vervolgens volgende recursiebetrekking aan:

$$har(x) = har(x + 1) - \frac{1}{x + 1}. \tag{6}$$

4 Vraag 4 (2,5p)

Gegeven de kromme in het vlak met parametrische vergelijking (hierbij is $t > 0$):

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2, \\ y(t) = ln(t). \end{cases} \tag{7}$$

Bepaal nu de oppervlakte begrensd door deze kromme, de x-as en de rechte met vergelijking x = 3 (gegeven: grafiek van de functie).

5 Vraag 5 (2,5p?)

Bepaal de Maclaurinreeks van $e^{cos(x)}$ tot en met x^3, zonder gebruik te maken van gekende reeksen. Noteer daarbij ook het maximale O-symbool en verklaar in één of twee zinnen waarom je die koos.

6 Vraag 6 (2p?)

Bereken de volgende integraal:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{1}{1+cos^2(\frac{x}{4})}\delta(sin(x))\,dx. \tag{8}$$

7 Vraag 7 (3p)

Bepaal de algemene oplossing van volgende differentiaalvergelijking:

$$y'' + y' - 12y = xe^x. \tag{9}$$