Examen *Kwantummechanica I*: 16 januari 2023

DEEL 1: GESLOTEN BOEK EXAMEN MET FORMULARIUM

Antwoord bondig en gevat maar toch zo volledig mogelijk! Hou er rekening mee dat je 3 uur hebt om dit gesloten-boek gedeelte van het examen te vervolledigen. HEEL VEEL SUCCES!

V1: HOEKSTENEN VAN DE KWANTUMMECHANICA [12/30]

(V1a) **Positieoperator**

Geef een overtuigend bewijs van het feit dat in de kwantummechanica de verwachtingswaarde van de positie in de impulsruimte gegeven wordt door

$$\langle \vec{r}\, \rangle = \int d\vec{p}\; \Phi^*(\vec{p},t) \left[+i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{p}}\, \Phi(\vec{p},t) \right] \; .$$

Maak hierbij gebruik van het verband tussen een golffunctie in de $\vec{r}$-ruimte en de $\vec{p}$-ruimte

$$\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\vec{p}\; \Phi(\vec{p},t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p}\cdot\vec{r} \right) \; .$$

(V1b) **Deeltje onder invloed van een potentiaal met een niet verdwijnend imaginair gedeelte**

We beschouwen een deeltje met massa $m \neq 0$ dat gedwongen wordt in één dimensie te bewegen. De hamiltoniaan van het deeltje wordt gegeven door

$$H(x,p_x) = \frac{p_x^2}{2m} + \left[V_0(x) + iV_1(x) \right] \; ,$$

met $V_0(x)$ en $V_1(x)$ niet verdwijnende reële potentialen. Start van de TDSE om een verband te leggen tussen de positie waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x,t)$ en de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid $j(x,t)$ van het deeltje.

(V1c) **Tijdsevolutieoperator**

1. Hoe wordt de tijdsevolutieoperator $U(t,t_0)$ gedefinieerd in de kwantummechanica?
2. Leg een verband tussen $U(t,t_0)$ en de hamiltoniaan van het systeem.
3. Toon aan dat de definitie van de tijdsevolutieoperator na de nodige manipulaties ook toelaat een uitdrukking voor de "propagator" te vinden. Wat is de fysische betekenis van een propagator in de kwantummechanica?

V2: FORMALISME VAN KWANTUMMECHANICA [10/30]

(V2a) Bereken het resultaat van de volgende uitdrukking:

$$\left[p_x^3 + g(y,z), x^2\right] \psi_n(\vec{r}\,) \ ,$$

waarbij $\psi_n(\vec{r}\,)$ een niet nader gespecifieerde oplossing is van de TISE voor een deeltje met massa m dat in drie dimensies beweegt onder invloed van een potentiaal $V(\vec{r}\,)$. De $g(y,z)$ is een functie van (y,z).

(V2b) Een deeltje beweegt in één dimensie onder de invloed van een potentiaal van het type "oneindige vierkante put" met breedte a (ter herinnering: $V(x) = 0$ voor $0 \leq x \leq a$ en $V(x) = +\infty$ voor de andere waarden van x). De stationaire toestanden van dit systeem worden gegeven door

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots, +\infty \ .$$

(V2b1) Gebruik argumenten gebaseerd op het oscillatietheorema om de energie-eigenwaarden E_n van het systeem te bepalen.

(V2b2) Veronderstel dat op $t = 0$ de golffunctie van het systeem gegeven wordt door $\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$. Bepaal de positiewaarschijnlijkheids-dichtheid op een arbitrair tijdstip t.

(V2b3) Veronderstel dat op $t = 0$ de golffunctie van het systeem gegeven wordt door

$$\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{7}} \psi_1(x) + i\sqrt{\frac{5}{7}} \psi_3(x)$$

Bereken de verwachtingswaarde van de energie van het systeem op een arbitrair tijdstip $t > 0$.

(V2b4) Veronderstel dat het deeltje zich in de stationaire toestand $\psi_1(x)$ bevindt en dat op $t = 0$ de breedte van de put verdubbeld wordt (na de manipulatie bevindt de put zich dus in het gebied $0 \leq x \leq 2a$). De verandering van de breedte van de put is zo dat het deeltje zijn golffunctie niet kan wijzigen tijdens de wijziging van de potentiaal. Welke van de volgende vijf verklaringen zijn juist? Duid je antwoorden (voor een antwoord zonder duiding krijg je geen punten)

i. De golffunctie van het deeltje zal $\psi_1(x)$ (eigenfunctie van de oorspronkelijke put) blijven voor alle $t > 0$.

ii. De golffunctie van het deeltje zal evolueren naar de grondtoestands-golffunctie van een put met breedte $2a$ en zal daarna in die toestand blijven.

iii. De golffunctie van het deeltje zal evolueren naar de golffunctie voor de eerste aangeslagen toestand van een put met breedte $2a$ en zal daarna in die toestand blijven.

iv. De positiewaarschijnlijkheidsdichtheid van het deeltje zal wijzigen met de tijd voor alle $t > 0$.

v. Geen enkele van de bovenstaande beweringen is correct.

<u>V3:</u> Systeem van twee interagerende deeltjes [8/30]

Beschouw een systeem van twee interagerende deeltjes die bewegen in drie dimensies. De deeltjes hebben respectievelijk massa m_1 en m_2 en interageren door middel van een potentiaal $V(\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ die enkel afhangt van de relatieve afstand $\vec{r}$ tussen de deeltjes. *Bij de berekeningen kun je aannemen dat de twee massa's gelijk zijn:* $m_1 = m_2$.

(V3a) Start van de hamiltoniaan van het beschouwde systeem om de TDSE voor de golffunctie $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$ in de coördinatenruimte af te leiden.

(V3b) Toon aan hoe na introductie van een relatieve coördinaat $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ en een massacentrum coördinaat $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$ er oplossingen van de TDSE in de coördinatenruimte bestaan van het type

$$\Psi\left(\vec{R}, \vec{r}, t\right) = \Phi\left(\vec{R}\right)\psi(\vec{r})\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_{CM} + E)\,t\right]$$

(V3c) Bepaal de TISE voor $\Phi\left(\vec{R}\right)$ en $\psi(\vec{r})$.

(V3d) Bepaal de oplossingen van de TISE voor $\Phi\left(\vec{R}\right)$ voor de volgende situatie: men weet dat (i) $E_{CM} = W$; (ii) het deeltje 2 zich in rust bevindt en; (iii) het deeltje 1 langs de positieve z as beweegt.

Examen *Kwantummechanica I*: 16 januari 2023

DEEL 2: OPEN-BOEK EXAMEN

- Hou er rekening mee dat je 2 uur hebt om dit open-boek gedeelte van het examen te vervolledigen.

- Bij het oplossen van het open-boek gedeelte mogen ENKEL gebruikt worden

  1. je persoonlijke versie van de cursusnota's (TRANSPARANTEN); daarin kunnen normale hoeveelheden nota's staan die direct slaan op de inhoud
  2. je persoonlijke versie van het handboek *Quantum Mechanics* van Bransden en Joachain; daarin kunnen normale hoeveelheden nota's staan die direct slaan op de inhoud
  3. lijst met integralen uit het boek van Michael A. Morrison (meegeleverd)
  4. het formularium (meegeleverd)

- Je kunt bij het oplossen van de oefeningen gebruik maken van de formules en/of uitdrukkingen van de hierboven vermelde vier bronnen. Het is wel nodig om te vermelden waar een bepaalde formule vandaan komt (bijvoorbeeld, we maken gebruik van Vergelijking (2.304) om . . .). Het gebruik van rekenmachines is niet toegelaten.

- Je kunt eventueel gebruik maken van een tablet (geen smartphone) voor het doorzoeken van de TOEGELATEN bronnen, maar daarbij verklaar je je akkoord met de volgende regels:

  1. je tablet staat in flight mode
  2. je geeft toestemming om op elk ogenblik je scherm te mogen bekijken+historie van de pdf viewer bijvoorbeeld
  3. je kunt ENKEL gebruiken op je tablet: een digitale versie van de slides+handboek (geen extra pagina's notities ...)
  4. je meldt op je antwoordblad dat je gebruik gemaakt hebt van een digitale versie van de cursusnota'en de transparanten
  5. het gebruik van een tablet zal beperkt worden tot een aantal rijen in het examenlokaal

O1: LINEAIRE HARMONISCHE OSCILLATOR IN ÉÉN DIMENSIE [5/20]

Beschouw de één-dimensionale lineaire harmonische oscillator (LHO) beschreven door de hamiltoniaan

$$H(x, p_x) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \ .$$

(O1a) Bepaal de matrixrepresentatie van de kinetische-energie operator in de basis van de genormeerde energie-eigentoestanden $\psi_n(x)$ (golffunctie in de coördinatenruimte) van de lineair harmonische oscillator. Maak hierbij gebruik van het formalisme van de "raising operator" a_+ en de "lowering operator" a_- voor de LHO.

(O1b) Maak gebruik van de "raising operator" a_+ en de "lowering operator" a_- om een algemene uitdrukking te bepalen voor de genormeerde LHO golffunctie in de impulsruimte $\phi_n(p_x)$.

(O1c) Bereken expliciet de p_x afhankelijkheid van $\phi_{n=0}(p_x)$ en $\phi_{n=1}(p_x)$ op basis van de algemene uitdrukking uit (O1b). Hebben je uitdrukkingen voor $\phi_{n=0}(p_x)$ en $\phi_{n=1}(p_x)$ de verwachte eigenschappen met betrekking tot "pariteit"? Verklaar je antwoord.

O2: VRIJ DEELTJE IN EEN PARTICULIERE BEGINSITUATIE [10/20]

Beschouw een deeltje met een massa $m \neq 0$ dat beweegt in één dimensie. Op $t = 0$ wordt het deeltje in een situatie gebracht beschreven door de volgende genormeerde golffunctie

$$\begin{cases} \Psi(-\alpha \leq x \leq +\alpha, t = 0) &= A(\mid x \mid - \alpha) \\ \Psi(\mid x \mid > \alpha, t = 0) &= 0 \end{cases}$$

(O2a) Bepaal de constante A.

(O2b) Bereken de waarschijnlijkheid om bij meting van de positie van het deeltje bij $t = 0$ een waarde te vinden in het interval $\left[-\frac{\alpha}{2}, +\frac{\alpha}{2}\right]$

(O2c) Bereken de verwachtingswaarden $\langle x \rangle$ en $\langle x^2 \rangle$ bij $t = 0$.

(O2d) Bereken de waarschijnlijkheidsdistributie $\Pi(p_x, t = 0) = \Phi^*(p_x, t = 0)\Phi(p_x, t = 0)$ van de impuls p_x van het deeltje bij $t = 0$.

O3: DEELTJE IN EEN ONEINDIGE DIEPE PUT [5/20]

Beschouw een deeltje met een massa $m \neq 0$ dat beweegt in een oneindige diepe put ($V(-a \leq x \leq +a) = 0$ en $V(\mid x \mid > +a) = +\infty$). De golffunctie van het deeltje op $t = 0$ wordt gegeven door

$$\Psi(x, t = 0) = \alpha_1 \psi_2(x) + i\alpha_2 \psi_3(x) \ ,$$

met $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\psi_2(x)$ de golffunctie horend bij de eerste aangeslagen toestand, en $\psi_3(x)$ de golffunctie horend bij de tweede aangeslagen toestand.

(O3a) Bepaald de verwachtingswaarde van de energie op een arbitrair tijdstip t.

(O3b) Bereken de verwachtingswaarde van de positie op een arbitrair tijdstip t ($= \langle x \rangle_t$).

(O3c) Is de waarde van de limiet $\lim_{\alpha_2 \to 0} \langle x \rangle_t$ in de lijn van je fysische verwachtingen op basis van het concept "pariteit"? Verklaar je antwoord.

Examen *Kwantummechanica I*: 19 januari 2022

DEEL 1: GESLOTEN BOEK EXAMEN MET FORMULARIUM

Antwoord bondig en gevat maar toch volledig! Hou er rekening mee dat je 3 uur hebt om dit gesloten-boek gedeelte van het examen te vervolledigen. HEEL VEEL SUCCES!

V1: MASSIEF DEELTJE IN ÉÉN DIMENSIE [7/30]

Beschouw een systeem bestaande uit een massief deeltje met massa $m \neq 0$ dat beweegt in één dimensie en beschreven wordt door een Hamiltoniaan van de vorm

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p_x}^2}{2m} + \widehat{V}(x) \; . \tag{1}$$

(V1a) Start van de TDSE om aan te tonen dat de tijdsafgeleide van de verwachtingswaarde van de operator $\widehat{x}\widehat{p_x}$ in een kwantumtoestand Ψ

$$\frac{d \langle \widehat{x}\widehat{p_x} \rangle}{dt} \; ,$$

kan geschreven in termen van een commutator. Becommentarieer alle stappen in de afleiding.

(V1b) Veronderstel dat de potentiaal kan geschreven worden als

$$\widehat{V}(x) = \alpha \widehat{x}^n \;\; \text{met, } \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \; .$$

Bewijs voor deze vorm van de potentiaal de volgende gelijkheid:

$$\frac{d \langle \Psi | \widehat{x}\widehat{p_x} | \Psi \rangle}{dt} = 2 \langle \Psi | \frac{\widehat{p_x}^2}{2m} | \Psi \rangle - n\alpha \langle \Psi | \widehat{x}^n | \Psi \rangle \;\; .$$

V1: LINEAIR HARMONISCHE OSCILLATOR [10/30]

Beschouw de lineair harmonische oscillator (LHO) in één dimensie

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \ .$$

Na introductie van de operatoren

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \mp i \frac{p_x}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right] \ , \tag{2}$$

kan de Hamiltoniaan geschreven worden als

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \left(a_- a_+ + a_+ a_- \right) \ .$$

(V2a) Toon aan dat $[a_-, a_+] = 1$.

(V2b) Noem $|E\rangle$ de eigenfunctie horende bij de eigenwaarde E. Toon dan aan dat $a_+ |E\rangle$ ($a_- |E\rangle$) een eigenfunctie is van de Hamiltoniaan bij de eigenwaarde $E + \hbar\omega$ ($E - \hbar\omega$).

(V2c) Uit het bovenstaande volgt dat

$$|E_{n+1}\rangle = C_{n+1} a_+ |E_n\rangle \ .$$

Bepaal C_{n+1} zodat $|E_{n+1}\rangle$ op één genormeerd wordt als $|E_n\rangle$ genormeerd is. Bewijs in dit verband

$$|E_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} a_+^{n+1} |E_0\rangle \ .$$

(V2d) Bepaal de x-afhankelijkheid van de golffunctie van de grondtoestand $\psi_0(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x)$ door gebruik te maken van de operatoren van bovenstaande vergelijking (2).

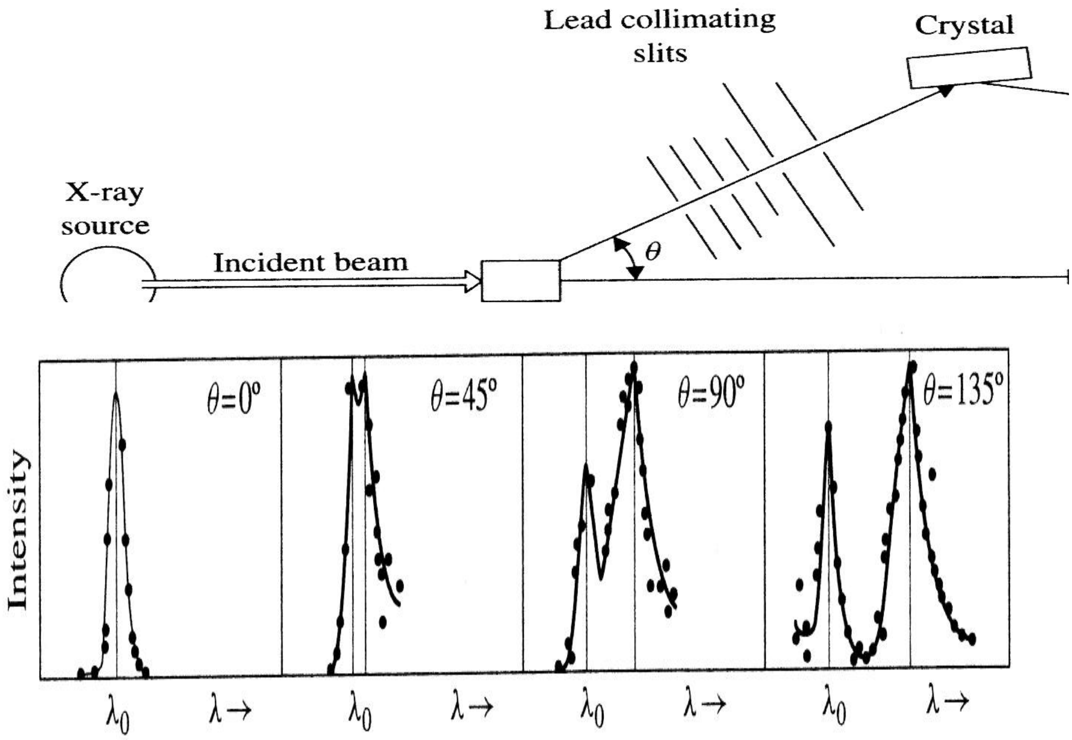
(V2e) Bewijs dat in de klassieke fysica de positiewaarschijnlijkheidsdichtheid van de LHO gegeven wordt door

$$P_c(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} \ ,$$

en definieer de grootheid x_0. In hoeverre benadert dit resultaat $P_c(x)$ de voorspellingen van de kwantummechanica? Verklaar heel duidelijk je antwoord.

V3: COMPTON EFFECT [6/30]

(V3a) Wat wordt er bedoeld met het Compton effect? Welk revolutionair idee uit de kwantummechanica resulteerde in een correcte beschrijving van de meetgegevens van A.H. Compton van 1923 (zie onderstaande figuren)?



(V3b) Bewijs de relatie die het verschil geeft tussen de golflengte van het inkomend en verstrooid foton

$$\Delta\lambda \equiv \lambda_1 - \lambda_0 = 2\lambda_C \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) ,$$

met de Compton golflengte $\lambda_C = \frac{h}{mc}$, waarin m staat voor de rustmassa van een elektron.

V4: OPERATOREN EN HUN MATRIXREPRESENTATIE [7/30]

(V4a) Leg uit in algemene termen hoe de matrixrepresenatie van een operator gedefinieerd wordt in de kwantummechanica.

(V4b) Pas je uitleg toe op de matrixrepresentatie van de kinetische-energie operator voor een deeltje met massa $m \neq 0$ dat beweegt in een oneindig diepe potentiaalput: $V(x < 0) = +\infty$; $V(0 \leq x \leq L) = 0$; $V(x > L) = +\infty$.

(V4c) Beschouw drie operatoren A, B, C waarvoor geldt dat $C = AB$. Toon aan dat de matrixrepresentatie van C gegeven wordt door het product van de matrixrepresentaties van A en B.

(V4d) Stel A is een hermitische operator. Start van de algemene definitie van een functie van operatoren om aan te tonen dat $B = e^{iA}$ een unitaire operator is.

(V4e) Hoe wordt de tijdsevolutieoperator $U(t, t_0)$ gedefinieerd in de kwantummechanica? Leg een verband tussen $U(t, t_0)$ en de Hamiltoniaan van het systeem. Toon aan dat de tijdsevolutieoperator een unitaire operator is.

Examen *Kwantummechanica I*: 19 januari 2022

DEEL 2: OPEN-BOEK EXAMEN

- Hou er rekening mee dat je 2 uur hebt om dit open-boek gedeelte van het examen te vervolledigen.
- Bij het oplossen van het open-boek gedeelte mogen ENKEL gebruikt worden
  1. je persoonlijke versie van de syllabus (TRANSPARANTEN); daarin kunnen normale hoeveelheden nota's staan die direct slaan op de inhoud
  2. je persoonlijke versie van het handboek *Quantum Mechanics* van Bransden & Joachain; daarin kunnen normale hoeveelheden nota's staan die direct slaan op de inhoud
  3. lijst met integralen uit het boek van Michael A. Morrison (meegeleverd)
  4. het formularium (meegeleverd)
- Je kunt bij het oplossen van de oefeningen gebruik maken van de formules en/of uitdrukkingen van de vier vermelde bronnen. Het is wel nodig om te vermelden waar een bepaalde formule vandaan komt (bijvoorbeeld, we maken gebruik van Vergelijking (2.304) om ...).

O1: HELLMANN-FEYNMAN THEOREMA [6/20]

Veronderstel een hermitische Hamiltoniaan die onder meer functie is van een parameter γ: $\widehat{H}(\gamma)$. Het is duidelijk dat ook de energie-eigenwaarden en energie-eigenfuncties afhangen van γ: $\widehat{H}(\gamma)\psi_m(\gamma) = \epsilon_m(\gamma)\psi_m(\gamma)$.

(O1a) Bewijs het theorema van Hellmann-Feynman:

$$\frac{\partial \epsilon_m(\gamma)}{\partial \gamma} = \left\langle \psi_m(\gamma) \middle| \frac{\partial \widehat{H}(\gamma)}{\partial \gamma} \middle| \psi_m(\gamma) \right\rangle .$$

(O1b) Het Hellmann-Feynman theorema is niet geldig voor een tijdsafhankelijke golffunctie $\Psi_\gamma(t)$. Bewijs dat voor dergelijke tijdsafhankelijke golffunctie $\Psi_\gamma(t)$ wel de volgende relatie geldt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \Psi_\gamma(t) \middle| \frac{\partial \Psi_\gamma(t)}{\partial \gamma} \right\rangle = \left\langle \Psi_\gamma(t) \middle| \frac{\partial \widehat{H}(\gamma)}{\partial \gamma} \middle| \Psi_\gamma(t) \right\rangle .$$

O2: GAUSSISCHE GOLFFUNCTIE [8/20]

Een deeltje met massa m beweegt in één dimensie met een golffunctie die op $t = 0$ gegeven wordt door:

$$\Psi(x, t = 0) = \mathcal{C} e^{iqx} e^{-\alpha x^2} \ ,$$

waarbij $\mathcal{C} \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{R}$, en $\alpha \in \mathbb{R}$.

(O2a) Bepaal de constante $\mathcal{C}$ zodat aan de normalisatievoorwaarde voor de golffunctie $\Psi(x, t = 0)$ wordt voldaan.

(O2b) Bereken expliciet de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid $j(x, t = 0)$ van het deeltje en interpreteer je resultaat.

(O2c) Bereken de verwachtingswaarde $\langle p \rangle$ van de impuls rechtstreeks uit de bovenstaande golffunctie $\Psi(x, t = 0)$.

(O2d) Bereken de corresponderende genormeerde golffunctie $\phi(p)$ in de impulsruimte. Bereken expliciet uit de kennis van $\phi(p)$ de verwachtingswaarde $\langle x \rangle$.

(O2e) Bereken expliciet de verwachtingswaarde $\langle p^2 \rangle$. Maak een schets van hoe $\langle p^2 \rangle$ afhangt van de parameter α. Toon aan dat je de α-afhankelijkheid van $\langle p^2 \rangle$ kunt begrijpen op basis van het onzekerheidsbeginsel van Heisenberg.

TIP: Je kunt de volgende integraal nuttig vinden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\left(-\alpha u^2\right) \exp\left(-\beta u\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \ .$$

O3: ONEINDIG DIEPE POTENTIAALPUT [6/20]

Een deeltje met massa $m \neq 0$ beweegt in één dimensie in een oneindige vierkante put $(V(\mid x \mid \leq L) = -V_0 \ (V_0 > 0); V(\mid x \mid > L) = +\infty)$ met een golffunctie gegeven door:

$$\Psi(-L \leq x \leq +L, t = 0) = \mathcal{A}\left(\mid x \mid - L\right) \ ,$$

waarbij $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$.

(O3a) Bepaal de waarde van $\mathcal{A}$ zodat aan de normalisatievoorwaarde voor de golffunctie $\Psi(x, t = 0)$ wordt voldaan.

(O3b) Bereken Δx op tijdstip $t = 0$.

(O3c) Noem E_1 de energie-eigenwaarde van de grondtoestand, en E_2 de energie-eigenwaarde van de eerste aangeslagen toestand van de beschouwde oneindig diepe potentiaalput. Bereken de probabiliteiten $P(E_1)$ en $P(E_2)$ om bij meting van de energie van het deeltje op tijdstip $t > 0$ de waarden E_1 en E_2 te vinden.

Examen *Kwantummechanica I*: 22 januari 2021

GESLOTEN BOEK EXAMEN MET FORMULARIUM (Covid-19)

Antwoord bondig en gevat maar toch volledig! Hou er rekening mee dat je 3 uur hebt om dit examen te vervolledigen. HEEL VEEL SUCCES!

V1: HOEKSTENEN VAN DE KWANTUMMECHANICA [15/50]

(V1a) **Impulsoperator**

Leg uit waarom in de kwantummechanica de verwachtingswaarde van de impuls gegeven wordt door

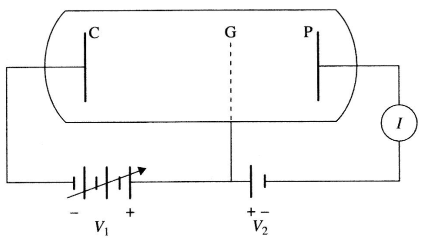
$$\langle \vec{p} \rangle = \int d\vec{r} \Psi^*(\vec{r},t) \left[-i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Psi(\vec{r},t) \right] .$$

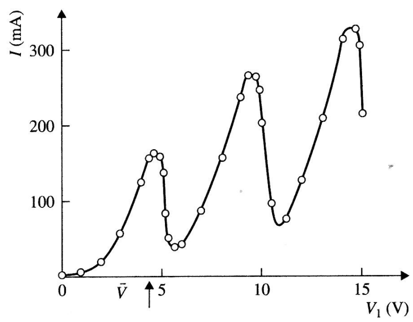
Maak hierbij gebruik van het verband tussen een golffunctie in de $\vec{r}$-ruimte en de $\vec{p}$-ruimte

$$\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\vec{p} \Phi(\vec{p},t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r} \right)$$

(V1b) **Frank en Hertz experiment**

Hierbij een schets van het experiment van Frank en Hertz, alsook een figuur met de belangrijkste meetresultaten.





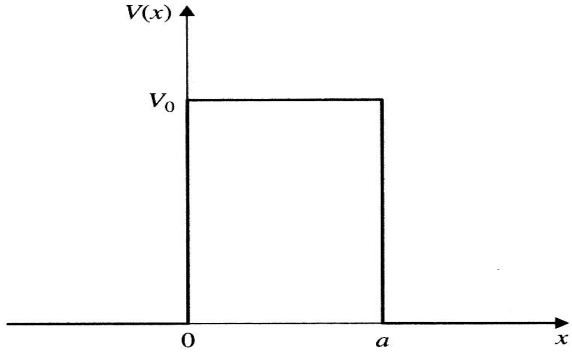
Beschrijf in maximaal 10 lijnen de werking van het experiment en toon aan dat het een direct bewijs is voor het discreet karakter van de energieniveau's van atomen.

(V1c) **Tijdsevolutieoperator**

1. Hoe wordt de tijdsevolutieoperator $U(t,t_0)$ gedefinieerd in de kwantummechanica?
2. Leg een verband tussen $U(t,t_0)$ en de hamiltoniaan van het systeem. Toon aan dat de tijdsevolutieoperator een unitaire operator is.
3. Toon aan dat de tijdsevolutieoperator toelaat een uitdrukking voor de "propagator" te vinden.

V2: REFLECTIE EN TRANSMISSIE [10/50]

Beschouw de potentiaalbarrière



(V2a) Hoe wordt de reflectie- en transmissiecoëfficiënt gedefineerd? Wat is de fysische interpretatie?

(V2b) Beschouw de situatie waarbij er <u>*rechts van de barrière*</u> een bron is van deeltjes met $E < V_0$ die ingestuurd worden op de barrière. Uit welk stelsel (NIET OPLOSSEN!) kun je de reflectie- en transmissiecoëfficiënt berekenen.

(V2c) Beschouw de situatie $E \approx \frac{3}{4}V_0$. Maak een schets van het reëel gedeelte van de golffunctie $\psi(x)$.

(V2d) De transmissiecoëfficiënt voor $E < V_0$ is van de vorm

$$T = \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\kappa a)}{4E(V_0 - E)}\right]^{-1} .$$

Bepaal de T in de limietsituaties $\frac{E}{V_0} \to 0$ en $\frac{E}{V_0} \to 1^-$. Bespreek je resultaat. Bepaal ook een uitdrukking voor de κ in bovenstaande uitdrukking.

V3: DEELTJE IN EEN POTENTIAAL [10/50]

Beschouw een deeltje met massa $m \neq 0$ dat beweegt in één dimensie onder de invloed van een potentiaal $V(x) = V(-x)$ van het type

$$V(-\infty < x < +\infty) = -\frac{|\, A \,|}{\sqrt{|\, x \,|}} \quad (A \neq 0 \in \mathbb{R}) \ . \tag{1}$$

(V3a) Gebruik het onzekerheidsbeginsel van Heisenberg voor de positie en impuls om de energie van de grondtoestand af te schatten (de beweging is niet-relativistisch).

(V3b) Schets de golffunctie van de grondtoestand EN de eerste aangeslagen toestand van het deeltje. Geef duidelijk de buigpunten aan en verwijs daarbij naar de vorm van de potentiaal. Welke pariteit hebben de geschetste golffuncties?

(V3c) Op tijdstip $t = 0$ wordt het deeltje in een kwantumtoestand gebracht gegeven door de genormeerde golffunctie

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \exp \frac{-x^2}{2\sigma^2} \ ,$$

met σ van de grootteorde 1. Schrijf de golffunctie van dit deeltje op een arbitrair tijdstip t in termen van de energie-eigenwaarden en de energie-eigenfuncties van het beschouwde systeem. *(in deze vraag moet je duidelijk de te volgen stappen schetsen; het is absoluut niet de bedoeling om de Schrödingervergelijking voor de gegeven potentiaal op te lossen)*

V4: FUNCTIES VAN OPERATOREN [5/50]

Beschouw twee functies $F(\vec{p})$ en $G(\vec{r})$ ($\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$) die kunnen ontwikkeld worden in machten van (p_x, p_y, p_z) en (x, y, z) respectievelijk. Toon aan dat in de coördinatenruimte de volgende twee gelijkheden gelden:

$$\begin{aligned}
[y, F(\vec{p})] &= +i\hbar \frac{\partial F(\vec{p})}{\partial p_y} \\
[p_z, G(\vec{r})] &= -i\hbar \frac{\partial G(\vec{r})}{\partial z} \ .
\end{aligned}$$

V5: LINEAIRE HARMONISCHE OSCILLATOR IN ÉÉN DIMENSIE [10/50]

Een deeltje in een één-dimensionale lineaire harmonische oscillator (LHO) bevindt zich op $t = 0$ in de toestand

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x) \ (\gamma \in \mathbb{R}),$$

waarbij $\psi_1(x)$ de genormeerde golffunctie is horend bij de eerste aangeslagen energie-eigentoestand $(n = 1)$ en $\psi_2(x)$ de genormeerde golffunctie is horend bij de tweede aangeslagen energie-eigentoestand $(n = 2)$.

(V5a) Als men op een arbitrair tijdstip t de energie van dit deeltje meet, welke waarden kan men dan vinden en met welke waarschijnlijkheid?

(V5b) Bereken $P(x, t) = |\Psi(x, t > 0)|^2$ voor een arbitrair tijdstip $t > 0$. Beschrijf bij vaste x de tijdsafhankelijkheid van de $|\Psi(x, t)|^2$.

(V5c) Bereken met behulp van de raising en lowering operatoren a_+ en a_- EXPLICIET de verwachtingswaarde $\langle p_x \rangle$ op een arbitrair tijdstip t. *Tip: men heeft* $a_+ |E_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|E_{n+1}\rangle$ *en* $a_- |E_n\rangle = \sqrt{n}\,|E_{n-1}\rangle$*, met* $|E_n\rangle$ *een genormeerde energie-eigenfunctie van de LHO.*

(V5d) Bepaal de matrixrepresentatie van de operator $\widehat{x}\widehat{p_x}$ in de basis van de genormeerde energie-eigentoestanden $\psi_n(x)$ van de lineair harmonische oscillator.

(V5e) Ga expliciet na of de bekomen matrix horend bij de operator $\widehat{x}\widehat{p_x}$ hermitisch is. Is het resultaat hiervan in de lijn van je verwachtingen?

Examen “Kwantummechanica I”: 13 januari 2020

THEORIE (30 punten)

Antwoord bondig en gevat maar toch volledig! HEEL VEEL SUCCES!

THEORIE VRAAG 1 (10 PUNTEN):

(A) Beschouw een systeem bestaande uit een massief deeltje met massa $m \neq 0$ dat beweegt in één dimensie en beschreven wordt door een Hamiltoniaan van het type

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p_x}^2}{2m} + \widehat{V}(x) \quad (V(x) \in \mathbb{R}) \; . \tag{1}$$

(T1a) Start van de TDSE om aan te tonen dat de tijdsafgeleide van de verwachtingswaarde van de operator $\widehat{x}\widehat{p_x}$ in een kwantumtoestand Ψ

$$\frac{d\left\langle \widehat{x}\widehat{p_x} \right\rangle}{dt} \; ,$$

kan geschreven in termen van een commutator. Becommentarieer alle stappen in de afleiding.

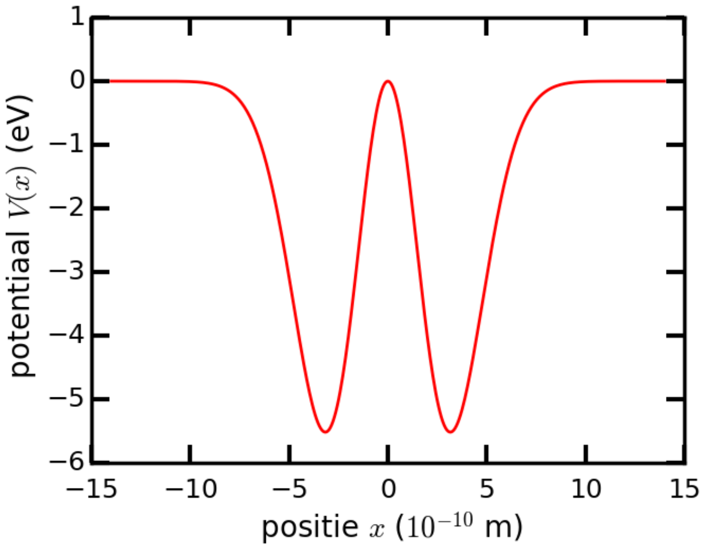
(T1b) Veronderstel dat de potentiaal kan geschreven worden als

$$\widehat{V}(x) = \alpha \widehat{x}^n \;\; \text{met, } \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \; .$$

Bewijs voor deze vorm van de potentiaal de volgende gelijkheid:

$$\frac{d \left\langle \Psi \right| \widehat{x}\widehat{p_x} \left| \Psi \right\rangle}{dt} = 2 \left\langle \Psi \right| \frac{\widehat{p_x}^2}{2m} \left| \Psi \right\rangle - n\alpha \left\langle \Psi \right| \widehat{x}^n \left| \Psi \right\rangle \; .$$

(B) Beschouw een massief deeltje met massa $m \neq 0$ dat beweegt in één dimensie en onderhevig is aan een potentiaal $V(x)$ zoals geschetst in de figuur.



(T1c) In welk energiegebied zijn er gebonden toestanden van het deeltje? Hoe zijn gebonden toestanden gedefinieerd? Leg ook uit waarom de energie-eigenwaarden van het deeltje horend bij gebonden toestanden gekwantiseerd zijn.

(T1d) Maak een schets van de golffunctie $\psi(x)$ van de grondtoestand van het systeem. Je schets moet duidelijk de variabelen op al de assen geven (inclusief de eenheden) en ook de klassieke buigpunten aangeven.

THEORIE VRAAG 2 (20 PUNTEN): *MONDELING EXAMEN*

Examen “Kwantummechanica I”: 13 januari 2020

OEFENINGEN (20 punten)

- BELANGRIJK: Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.
- Bij het oplossen van het oefeningengedeelte mogen ENKEL gebruikt worden
  1. de cursusnota’s (TRANSPARANTEN)
  2. het handboek *Quantum Mechanics* van Bransden en Joachain
  3. lijst met integralen uit het boek van Michael A. Morrison
- Je kunt bij het oplossen van de oefeningen gebruik maken van de formules en/of uitdrukkingen van de hierboven vermelde drie bronnen. Het is wel nodig om te vermelden waar een bepaalde formule vandaan komt (bijvoorbeeld, we maken gebruik van Vergelijking (2.304) om . . .).

Oefening 1 (5 punten)

Beschouw twee functies $F(\vec{p})$ en $G(\vec{r})$ ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$) die kunnen ontwikkeld worden in machten van (p_x, p_y, p_z) en (x, y, z) respectievelijk. Toon aan dat in de coördinatenruimte de volgende twee gelijkheden gelden:

$$\begin{aligned} [y, F(\vec{p})] &= +i\hbar \frac{\partial F(\vec{p})}{\partial p_y} \\ [p_z, G(\vec{r})] &= -i\hbar \frac{\partial G(\vec{r})}{\partial z} \; . \end{aligned}$$

Oefening 2 (5 punten)

De lineaire operator $\widehat{A}$ horend bij observabele $\mathcal{A}$ heeft twee genormeerde eigenfuncties (ψ_1, ψ_2) met bijbehorende eigenwaarden (a_1, a_2). De lineaire operator $\widehat{B}$ horend bij observabele $\mathcal{B}$ heeft twee genormeerde eigenfuncties (ϕ_1, ϕ_2) met bijbehorende eigenwaarden (b_1, b_2). De eigenfuncties zijn gerelateerd via

$$\psi_1 = \frac{3.0\phi_1 + 4.0\phi_2}{5} \qquad\qquad \psi_2 = g\phi_1 + h\phi_2 \tag{2}$$

(O2a) Bepaal de mogelijke waarden voor de variabelen g en h.

(O2b) Op tijdstip $t = t_0$ meet men verschillende keren de observabele $\mathcal{A}$ en men vindt steevast het resultaat a_1. Bepaal de golffunctie $\Psi(x, t = t_0)$ van het systeem op tijdstip $t = t_0$.

(O2c) Wanneer men op tijdstip $t = t_0$ ook de observabele $\mathcal{B}$ meet wat zijn dan de mogelijke uitkomsten? Met welke probabiliteiten kan men die uitkomsten bekomen?

(O2d) Bepaal een uitdrukking voor de golffunctie van het system op een arbitrair tijdstip $t_1 > t_0$ in de wetenschap dat je op tijdstip t_0 de waarde a_1 voor de observabele $\mathcal{A}$ gemeten hebt.

(O2e) Bepaal een uitdrukking voor de golffunctie van het system op een arbitrair tijdstip $t_1 > t_0$ in de wetenschap dat je op tijdstip t_0 de waarde a_1 voor de observabele $\mathcal{A}$ EN op tijdstip t_1 de waarde b_1 voor de observabele $\mathcal{B}$ gemeten hebt.

OEFENING 3 (10 PUNTEN): Lineaire Harmonische Oscillator in één dimensie

Een massief deeltje met massa $M \neq 0$ beweegt in een potentiaal $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Noem E_n en $\psi_n(x)$ de energie-eigenwaarden en corresponderende genormeerde energie eigenfuncties van de beschouwde Hamiltoniaan.

Op $t = 0$ wordt het deeltje gebracht in een genormeerde toestand die een lineaire combinatie is van eigenfuncties van twee opeenvolgende kwantumgetallen

$$\Psi(x, t = 0) = \gamma\psi_n(x) + \sqrt{1-\gamma^2}\psi_{n+1}(x) \ (\gamma \in \mathbb{R}).$$

(O3a) Bereken de positiewaarschijnlijkheidsdichtheid $P(x, t > 0)$ van het deeltje.

(O3b) Wat is de verwachtingswaarde van de positie van het deeltje $< x >$ op een welbepaald tijdstip t? Is de γ-afhankelijkheid van $< x >$ op een vast tijdstip t in de lijn van je fysische verwachtingen? Verklaar je antwoord.

(O3c) Wat is de matrixrepresentatie van de operator $\widehat{x}\widehat{p_x}$ in de basis van de energie-eigentoestanden $\psi_n(x)$?

(O3d) Wat is de matrixrepresentatie van de operator $\widehat{p_x}\widehat{x}$ in de basis van de genormeerde energie-eigentoestanden $\psi_n(x)$ van de lineair harmonische oscillator?

(O3e) *Gebruik de bovenstaande resultaten voor de matrixrepresentaties* om aan te tonen dat voor een stationaire toestand ψ_E van de lineaire harmonische oscillator in één dimensie voldaan is aan

$$\langle\psi_E| \, [\widehat{x}\widehat{p_x}, H] \, |\psi_E\rangle = 0.$$

Ga ook na of aan deze gelijkheid wordt voldaan voor toestanden van de ééndimensionale lineair harmonische oscillator die NIET stationair zijn.

Examen Kwantummechanica I: 14 januari 2019

THEORIE (30 punten)

Antwoord bondig en gevat maar toch volledig!
HEEL VEEL SUCCES!

Theorie vraag 1 (10 punten):

(T1a) In de coördinatenruimte wordt de operator die hoort bij de positie $\vec{r}$ van een deeltje in een driedimensionale ruimte gegeven door $\vec{r}$. Maak gebruik van het verband tussen de golffunctie in de coördinatenruimte en de golffunctie in de impulsruimte

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\vec{p}\, \phi(\vec{p})\ \exp \frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\,,$$

om de operator die hoort bij de positie $\vec{r}$ in de impulsruimte AF TE LEIDEN (het volstaat dus niet om enkel de vorm van de operator op te schrijven).

(T1b) Start van de meest algemene vorm van het onzekerheidsbeginsel van Heisenberg

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left|\langle [A, B] \rangle\right|$$

om op een KWALITATIEVE MANIER de grondtoestandsenergie van het waterstofatoom af te leiden. Welke grondtoestandsenergie zou je verwachten binnen de context van de klassieke fysica?

(T1c) Een anti-hermitische operator is een operator Q die voldoet aan de volgende eigenschap $Q^\dagger = -Q$.

(i) Toon aan dat de eigenwaarden van anti-hermitische operatoren zuiver imaginair zijn.

(ii) Toon aan dat de commutator van twee hermitische operatoren een anti-hermitische operator oplevert.

(iii) Beschouw nu de commutator van twee anti-hermitische operatoren. Kun je enige conclusie trekken met betrekking tot de "aard" (=hermitisch, anti-hermitisch, iets anders) van deze operator?

Theorie vraag 2 (20 punten): *MONDELING EXAMEN*

OEFENINGEN (20 punten)

- BELANGRIJK: Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.
- Bij het oplossen van het oefeningengedeelte mogen ENKEL gebruikt worden
  1. de cursusnota's (TRANSPARANTEN)
  2. het handboek *Quantum Mechanics* van Bransden en Joachain
  3. lijst met integralen uit het boek van Michael A. Morrison
- Je kunt bij het oplossen van de oefeningen gebruik maken van de formules en/of uitdrukkingen van de hierboven vermelde drie bronnen. Het is wel nodig om te vermelden waar een bepaalde formule vandaan komt (bijvoorbeeld, we maken gebruik van Vergelijking (2.304) om . . .).

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Een vrij deeltje in één dimensie

Een <u>*VRIJ*</u> deeltje met rustmassa $m \neq 0$ beweegt met niet-relativistische snelheden in één dimensie. Op $t = 0$ wordt het deeltje in een kwantumtoestand gebracht beschreven door de volgende golffunctie ($a \in \mathbb{R} > 0$)

$$\Psi(x, t = 0) = \begin{cases} 0 & \mid x \mid > \mid a \mid \\ A\,(\mid x \mid - a) & -a \leq x \leq +a \end{cases}$$

(O1a) Bepaal de grootheid A.

(O1b) Wat is de waarschijnlijkheid dat het deeltje zich ergens bevindt in het interval $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ op $t = 0$?

(O1c) Bereken de verwachtingswaarden $\langle x \rangle$ en $\langle x^2 \rangle$ op $t = 0$.

(O1d) Bereken de golffunctie $\Phi\,(p_x, t)$ in de impulsruimte.

(O1e) Verklaar waarom de grootheid $\Pi(p_x, t) = |\Phi\,(p_x, t)|^2$ in lijn is met de fysische verwachtingen op basis van het onderzekerheidsbeginsel van Heisenberg.

(O1f) Als men op een welbepaald tijdstip t de energie meet van het deeltje, welke waarden kan men dan vinden? Wat zijn de bijbehorende waarschijnlijkheden?

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Coherente toestanden van de Lineaire Harmonische Potentiaal

In memoriam: Roy Glauber (1 september 1925 — 26 december 2018) was een prominent theoretisch fysicus en kreeg ondermeer in 2005 de Nobelprijs fysica voor "his contribution to the quantum theory of optical coherence". Hij was actief in veel vakgebieden en één van zijn vele originele contributies tot de fysica is gekend als de "de coherente toestanden van de Lineaire Harmonische Potentiaal". Deze toestanden vormen het onderwerp van deze examenoefening.

Beschouw de linear harmonische oscillator in één dimensie. De energie-eigenfuncties worden gegeven door $|E_n\rangle$ $(n \in \mathbb{N})$ en de bijbehorende energie-eigenwaarden door E_n.

(O2a) Bewijs de volgende gelijkheid voor een systeem dat zich in een toestand $|E_n\rangle$ bevindt:

$$\Delta x \; \Delta p_x = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \; .$$

Beschouw nu de genormeerde eigenfuncties $|\alpha\rangle$ van de "lowering operator" a_-

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x + i \frac{p_x}{\sqrt{m\hbar\omega}} \right] \; .$$

Dit betekent dat: $a_- |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$ en $\langle \alpha \mid \alpha \rangle = 1$, met α **een arbitrair complex getal** $(\alpha \in \mathbb{C})$. Men verwijst naar de toestanden $|\alpha\rangle$ als de "coherente toestanden van de lineair harmonische oscillator".

(O2b) Toon aan dat voor de toestanden $|\alpha\rangle$ het merkwaardige resultaat geldt dat

$$\Delta x \; \Delta p_x = \frac{\hbar}{2} \; .$$

Dit betekent dat de toestanden $|\alpha\rangle$ dezelfde $\Delta x \; \Delta p_x$ hebben als de grondtoestand van de lineair harmonische oscillator.

(O2c) De genormeerde $|\alpha\rangle$ kunnen ontwikkeld worden in termen van de energie-eigenfuncties $|E_n\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \, |E_n\rangle \; .$$

Bepaal de expansie-coëfficiënten c_n.

****REST VAN DE OPGAVE OP VOLGEND BLAD****

(O2d) Beschouw twee genormeerde eigenfuncties van de operator a_-

$$a_- |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \;\; (\alpha \in \mathbb{C}) \qquad\qquad a_- |\beta\rangle = \beta |\beta\rangle \;\; (\beta \in \mathbb{C}) \; .$$

Toon aan dat $\langle \alpha \mid \beta \rangle \neq 0$. Is dit resultaat in tegenspraak met de "orthonormaliteit van eigenfuncties"? Verklaar je antwoord.

(O2e) Beschouw de situatie waarbij een deeltje op $t = 0$ in een coherente toestand $|\alpha\rangle$ wordt gebracht. Bepaal de golffunctie van dit deeltje op een arbitrair tijdstip t. In hoevere blijven de deeltjes in een coherente toestand naarmate de tijd evolueert? Wat gebeurt er met de grootheid $\Delta x \, \Delta p_x$ naarmate de tijd evolueert?

Examen Kwantummechanica I: 15 januari 2018

THEORIE (30 punten)

Antwoord bondig en gevat maar toch volledig!
HEEL VEEL SUCCES!

1. **Theorie vraag 1 (10 punten):**

   (a) Leg duidelijk uit waarom het kwantummechanisch equivalent van het klassieke product xp_x gegeven wordt door een gesymmetriseerde vorm

   $$\frac{xp_x + p_x x}{2} \, .$$

   Wat is de rol van hermiticiteit hierbij?

   (b) Orbitaal impulsmoment wordt in de klassieke mechanica gedefinieerd door $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

   i. Wat is de corresponderende kwantummechanische operator in de coördinatenruimte EN in de impulsruimte? In het licht van voorgaande discussie omtrent de kwantummechanische vorm voor xp_x, is het al dan niet nodig om de kwantummechanische vorm van $\vec{L}$ te construeren via een gesymmetriseerde vorm

   $$\frac{\vec{r} \times \vec{p} - \vec{p} \times \vec{r}}{2} \quad ?$$

   Beargumenteer heel duidelijk je antwoord.

   ii. Geef de wiskundige definitie en de fysische interpretatie van de vectorgrootheid $\Delta\vec{L}$. Voor de duidelijkheid van de notatie: Δ slaat hier NIET op een afgeleide en Δ slaat hier NIET op een verschil.

   iii. Onder welke omstandigheden is het orbitaal impulsmoment $\vec{L}$ een behouden grootheid? Met andere woorden, welke voorwaarden moeten worden voldaan opdat

   $$\frac{d\left\langle \vec{L} \right\rangle}{dt} = \vec{0} \, ?$$

   iv. Bereken het kwantummechanisch equivalent van de volgende klassieke uitdrukking

   $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \, .$$

2. **Theorie vraag 2 (20 punten):** *MONDELING EXAMEN*

Examen Kwantummechanica 1: 15 januari 2018

OEFENINGEN (20 punten)

- BELANGRIJK: Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.
- Bij het oplossen van het oefeningengedeelte mogen ENKEL gebruikt worden
  1. de cursusnota's (TRANSPARANTEN)
  2. het handboek *Quantum Mechanics* van Bransden en Joachain
  3. lijst met integralen uit het boek van Michael A. Morrison
- Je kunt bij het oplossen van de oefeningen gebruik maken van de formules en/of uitdrukkingen van de hierboven vermelde drie bronnen. Het is wel nodig om te vermelden waar een bepaalde formule vandaan komt (bijvoorbeeld, we maken gebruik van Vergelijking (2.304) om . . .).

OEFENING 1 (4 PUNTEN): LINEAIRE POTENTIAAL

Een deeltje met een massa $m \neq 0$ beweegt in een één-dimensionale potentiaal $V(x) = |x|V_0$ met $V_0 > 0$.

1. Maak gebruik van het Heisenberg onzekerheidsbeginsel om een goede schatting te bekomen van de grondtoestandsenergie E_1 van het deeltje.

2. De grondtoestandsenergie E_1 is een functie van m en V_0: $E_1(m, V_0)$. Leg uit waarom de bekomen m-afhankelijkheid van E_1 in lijn is met de fysische verwachtingen. Toon aan dat de twee limietgevallen: $\lim_{V_0 \to 0} E_1(m, V_0)$ en $\lim_{V_0 \to +\infty} E_1(m, V_0)$ wel degelijk het te verwachten resultaat voor E_1 opleveren.

3. Noem E_1 de grondtoestandsenergie en E_4 de energie corresponderend met de derde aangeslagen toestand. Maak een schets van de bijbehorende golffuncties $\psi_1(x)$ en $\psi_4(x)$ in een figuur waarbij de potentiaal $V(x) = |x|V_0$ en de energieën E_1 en E_4 duidelijk aangegeven zijn. Duid op je figuur ook aan waar je ergens E_2 en E_3 verwacht. Verklaar al je antwoorden en verantwoord al de keuzes die je maakt.

OEFENING 2 (4 PUNTEN): VERWACHTINGSWAARDE

Bereken het resultaat van de volgende verwachtingswaarde

$$\langle \Psi(\vec{r}, t) | \left[x^2 p_x^2, x p_z - z p_x \right] | \Psi(\vec{r}, t) \rangle \ .$$

Hierbij is $\Psi(\vec{r}, t)$ een niet nader bepaalde oplossing van de TDSE. Je wordt gevraagd om het eindresultaat zo eenvoudig mogelijk te schrijven.

OEFENING 3 (12 PUNTEN): LINEAIRE HARMONISCHE OSCILLATOR

Een deeltje in een één-dimensionale harmonische oscillator bevindt zich op $t = 0$ in de toestand

$$\Psi\left(x, t = 0\right) = \mathcal{C}\left[\sqrt{2}\psi_0(x) + \sqrt{5}\psi_1(x) - \psi_3(x)\right] \;,$$

waarbij $\psi_n(x)$ de golffunctie is horend bij de n-de energie-eigentoestand $\left(E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)$.

O3.1 *(1 punt)* Bepaal de constante $\mathcal{C}$.

O3.2 *(1 punt)* Construeer $\Psi(x,t)$ en $|\Psi(x,t)|^2$ voor een arbitrair tijdstip $t > 0$. Wat is de tijdsperiode van $\Psi(x,t)$ en van $|\Psi(x,t)|^2$?

O3.3 *(1 punt)* Als men op een arbitrair tijdstip t de energie van dit deeltje meet, welke waarden kan men dan vinden en met welke waarschijnlijkheid?

O3.4 *(4 punten)* Bepaal de matrixrepresentatie van de operator x in de basis $\{\psi_n\}$ en gebruik de matrixrepresentatie om de verwachtingswaarde $\langle x \rangle$ op een arbitrair tijdstip t te berekenen.

O3.5 *(3 punten)* Bereken EXPLICIET de verwachtingswaarde $\langle p_x \rangle$ op een arbitrair tijdstip t. Door combinatie van de berekende $\langle x \rangle$ en $\langle p_x \rangle$, toon aan dat wel degelijk voldaan is aan het Ehrenfest theorema

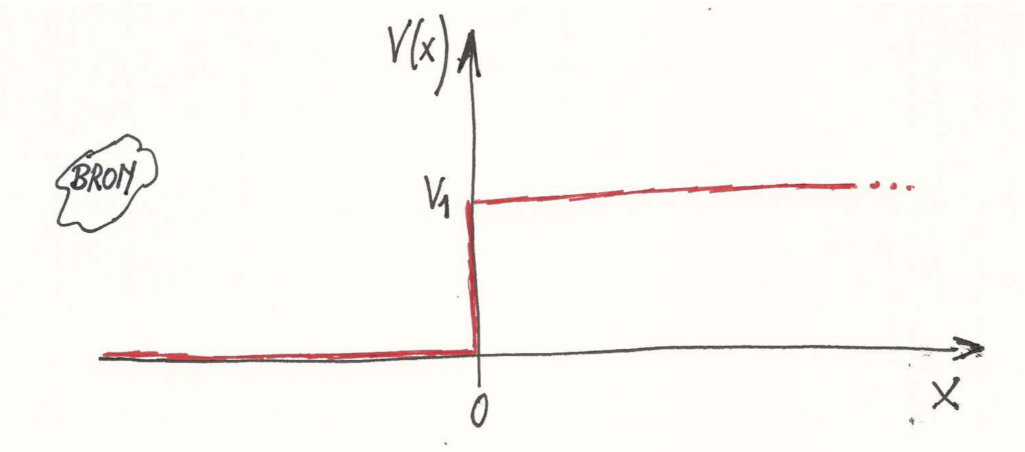
$$\frac{d\left\langle x\right\rangle}{dt} = \frac{\left\langle p_x\right\rangle}{m} \;.$$

O3.6 *(2 punten)* Stel dat men op een welbepaald tijdstip met arbitraire precisie de potentiële energie E_{pot} van het beschouwde systeem meet en systematisch de waarde $\frac{7}{4}\hbar\omega$ vindt. Wat is de verwachtingswaarde van de kinetische energie T_{kin} en de bijbehorende onzekerheid ΔT_{kin} direct na de meting van E_{pot}? Beargumenteer heel duidelijk je antwoord.

Examen “Kwantummechanica 1”: 16 januari 2017

THEORIE (30 punten)

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)



Deeltjes met massa $m \neq 0$ bewegen in één dimensie onder de invloed van een potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \ -\infty < x < 0 \\ V_1(>0) & , \ 0 \leq x < +\infty \end{cases} .$$

De deeltjes worden gecreëerd met een welbepaalde vaste energie $E \geq 0$ in een bron die zich aan de linkerkant van de oorsprong bevindt. Om de volgende vragen te beantwoorden maak je gebruik van de technieken die tijdens de theorielessen ontwikkeld werden.

- Beschouw de situatie $E < V_1$:
  - (a) Geef de definitie van de reflectie- en transmissiecoëfficiënt.
  - (b) Bereken de reflectie- en transmissiecoëfficiënt.
  - (c) Bereken de positie waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x,t)$ **voor het gebied** $-\infty < x < +\infty$.
- Beschouw de situatie $E > V_1$:
  - (a) Toon aan dat de reflectiecoëfficiënt R gegeven wordt door een uitdrukking van het type

    $$R = \frac{(1-\mathcal{C})^2}{(1+\mathcal{C})^2} ,$$

    en bepaal de grootheid $\mathcal{C}$.

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen “Kwantummechanica 1”: 16 januari 2017

OEFENINGEN (20 punten)

- BELANGRIJK: Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.
- BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL GEBRUIKT WORDEN
    1. de cursusnota’s (TRANSPARANTEN)
    2. het handboek “Quantum Mechanics” van Bransden en Joachain
    3. lijst met integralen uit het boek van Michael A. Morrison

OEFENING 1 (15 PUNTEN)

Deeltje in een oneindig diepe potentiaalput en het correspondentiebeginsel van Bohr

Een massief deeltje met massa $M \neq 0$ beweegt in een oneindig diepe potentiaal tussen $x = 0$ en $x = 2L$. Dit betekent dat de potentiaal $V(x) = 0$ voor $x \in [0, 2L]$ en $V(x) = +\infty$ voor alle andere waarden van x.

Noem E_n de energie-eigenwaarden van de beschouwde hamiltoniaan met corresponderende genormeerde eigenfuncties $\psi_n(x)$. Op $t = 0$ wordt het deeltje in een toestand gebracht die een lineaire combinatie is van eigenfuncties van twee opeenvolgende kwantumgetallen

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_n(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{n+1}(x) \ .$$

- Als men op een welbepaald tijdstip t de energie meet van het deeltje, welke waarden kan men dan vinden? Wat zijn de bijbehorende waarschijnlijkheden?
- Bereken de positiewaarschijnlijkheidsdichtheid $P(x, t)$ van het deeltje.
- Wat is de verwachtingswaarde van de positie van het deeltje $< x >$ op een welbepaald tijdstip t?
- Bereken expliciet de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid $j(x, t)$ van het deeltje en toon expliciet aan dat voldaan is aan het principe van behoud van waarschijnlijkheid in het interval $[0, L]$ (dit is de linkerhelft van de put).
- Bereken de klassieke positiewaarschijnlijkheidsdichtheid $P_{klasiek}(x, t)$ en waarschijnlijkheidsstroomdichtheid $j_{klassiek}(x, t)$ van het deeltje bij een welbepaalde waarde van de energie E_c.
- Toon aan dat in de limiet van grote kwantumgetallen n het kwantummechanisch resultaat voor $< x >$ het klassiek resulaat benadert (illustratie van het correspondentiebeginsel van Bohr).
- Toon aan dat voor kleine kwantumgetallen n er een vrij groot verschil kan zijn tussen de kwantummechanische en klassieke voorspelling van $< x >$.

OEFENING 2 (5 PUNTEN)

Bewijs de volgende identiteit

$$e^{cA}Be^{-cA} = B + c[A, B] + \frac{c^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots \ ,$$

waarbij c een reëel getal is en A, B operatoren zijn die horen bij niet nader bepaalde dynamische variabelen. Vervolledig de bovenstaande uitdrukking en **BEREKEN EXPLICIET** ook de coëfficiënt die hoort bij de term in c^3.

Examen “Kwantummechanica 1” (11 januari 2016)

THEORIE (30 punten)

Antwoord bondig, gevat en toch compleet!

1. THEORIE VRAAG 1 (10 PUNTEN)

   - Bereken het resultaat van de volgende uitdrukking:

     $$\left[p_y^2, y^3\right] \psi_n(\vec{r}\ ) ,$$

     waarbij $\psi_n(\vec{r}\ )$ een niet nader gespecifieerde oplossing is van de TISE voor een deeltje met massa m dat in drie dimensies beweegt onder invloed van een potentiaal $V(\vec{r}\ )$.

   - Een deeltje beweegt in één dimensie onder de invloed van een potentiaal van het type “oneindige vierkante put” met breedte a (ter herinnering: $V(x) = 0$ voor $0 \leq x \leq a$ en $V(x) = +\infty$ voor de andere waarden van x). De stationaire toestanden van dit systeem worden gegeven door

     $$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots, +\infty \ .$$

     (a) Gebruik het oscillatietheorema om de energie-eigenwaarden van het systeem te bepalen.

     (b) Veronderstel dat op $t = 0$ de golffunctie van het systeem gegeven wordt door $\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$. Bepaal de positiewaarschijnlijkheidsdichtheid op een arbitrair tijdstip t.

     (c) Veronderstel dat op $t = 0$ de golffunctie van het systeem gegeven wordt door

     $$\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{7}}\psi_1(x) + i\sqrt{\frac{5}{7}}\psi_3(x)$$

     Bereken de verwachtingswaarde van de energie van het systeem.

     (d) Veronderstel dat het deeltje zich in de stationaire toestand $\psi_1(x)$ bevindt en dat op $t = 0$ de breedte van de put verdubbeld wordt (de put bevindt zich dus in het gebied $0 \leq x \leq 2a$). De verandering van de breedte van de put is zo dat het deeltje zijn golffunctie niet kan wijzigen tijdens de wijziging van de potentiaal. Welke van de volgende vijf verklaringen zijn juist? Duid je antwoorden (voor een antwoord zonder duiding krijg je geen punten)

        i. De golffunctie van het deeltje zal $\psi_1(x)$ (eigenfunctie van de oorspronkelijke put) blijven voor alle $t > 0$.

ii. De golffunctie van het deeltje zal evolueren naar de grondtoestands-golffunctie van een put met breedte $2a$ en zal daarna in die toestand blijven.
iii. De golffunctie van het deeltje zal evolueren naar de golffunctie voor de eerste aangeslagen toestand van een put met breedte $2a$ en zal daarna in die toestand blijven.
iv. De positiewaarschijnlijkheidsdichtheid van het deeltje zal wijzigen met de tijd voor alle $t > 0$.
v. Geen enkele van de bovenstaande beweringen is correct.

2. THEORIE VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen "Kwantummechanica 1": 11 januari 2016

OEFENINGEN (20 punten)

- Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.
- BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKE: GEBRUIKT WORDEN
  1. de cursusnota's (TRANSPARANTEN)
  2. het handboek "Quantum Mechanics" van Bransden en Joachain
  3. lijst met integralen uit het boek van Michael A. Morrison

OEFENING 1 (10 PUNTEN): DEELTJE IN EEN "MYSTERY POTENTIAL"

De genormeerde golffunctie $\Psi(x,t)$ van een deeltje met massa m dat beweegt onder de invloed van een potentiaal $V(x)$ wordt gegeven door

$$\Psi(x,t) = \left\{ \begin{array}{cc} xe^{-Bx}e^{-\frac{i}{\hbar}Ct} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{array} \right\} \tag{1}$$

waarbij B en C twee reële constanten zijn.

1. Maak een schets van de golffunctie $\Psi(x, t = 0)$ waarbij je alle relevante kenmerken duidelijk aangeeft.
2. Gebruik je kennis van $\Psi(x,t)$ om een KWALITATIEVE schets van de potentiaal $V(x)$ te maken. De schets moet duidelijk tonen waar de "klassieke verboden gebieden" en de "klassieke keerpunten" zich bevinden.
3. Bereken de verwachtingswaarde van de energie van het deeltje op een arbitrair tijdstip $t > 0$?
4. Bereken de verwachtingswaarde van de positie van het deeltje op een arbitrair tijdstip $t > 0$?
5. Bereken de verwachtingswaarde van de impuls van het deeltje op een arbitrair tijdstip $t > 0$?
6. Kun je voor het beschouwde systeem energie-eigentoestanden met een energie groter of kleiner dan de energie verwachtingswaarde horend bij $\Psi(x,t)$ verwachten?

7. Bepaal de potentiaal $V(x)$ in termen van de variabelen $(B, C, m, \hbar)$ en bepaal de waarde van B. Komt je resultaat overeen met de kwalitatieve schets voor $V(x)$ die je eerder maakte?

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Een deeltje in een één-dimensionale harmonische oscillator bevindt zich op $t = 0$ in de toestand

$$\Psi\left(x, t=0\right) = \alpha\psi_0(x) + \beta\psi_1(x) \ ,$$

waarbij $\psi_0(x)$ ($\psi_1(x)$) de golffunctie is horend bij de grondtoestand (eerste aangeslagen toestand).

1. Bepaal de waarden van α en β zodanig dat op $t = 0$ de verwachtingswaarde $\langle x \rangle$ zo groot mogelijk wordt.

2. Construeer $\Psi(x,t)$ en $|\Psi(x,t)|^2$ voor een arbitrair tijdstip $t > 0$. Beschrijf bij vaste x de tijdsafhankelijkheid van de $|\Psi(x,t)|^2$.

3. Als men op een arbitrair tijdstip t de energie van dit deeltje meet, welke waarden kan men dan vinden en met welke waarschijnlijkheid?

4. Bereken EXPLICIET de verwachtingswaarden $\langle x \rangle$, $\langle p_x \rangle$ en $\left\langle \frac{dV(x)}{dx} \right\rangle$ op een arbitrair tijdstip t, en toon aan dat wel degelijk voldaan is aan het Ehrenfest theorema

$$\frac{d\left\langle p_x \right\rangle}{dt} = \left\langle -\frac{dV(x)}{dx} \right\rangle \ .$$

Examen "Kwantummechanica 1": 27 januari 2015

THEORIE (30 punten)

Antwoord bondig en gevat!

1. THEORIE VRAAG 1 (10 PUNTEN)

   - Een deeltje met een massa m beweegt in een één-dimensionale potentiaal $V(x) = F_0|x|$ met $F_0 > 0$. Maak gebruik van het Heisenberg onzekerheidsbeginsel om de grondtoestandsenergie E_0 van het deeltje te schatten. Gebruik fysische argumenten om uit te leggen waarom de $m-$afhankelijkheid EN de F_0-afhankelijkheid van de bekomen uitdrukking van E_0 in de lijn ligt van de verwachtingen.
   - Een deeltje met een massa m beweegt in een één-dimensionale potentiaal $V(x)$ die de volgende eigenschap bezit $V(x) = V(-x)$. Commuteert de Hamiltoniaan H van het deeltje met de pariteitsoperator $\mathcal{P}$? Welke implicaties heeft je resultaat in termen van de eigenfuncties van H en $\mathcal{P}$? Kan de kinetische energie en de pariteit van het deeltje onder beschouwing terzelfdertijd met oneindige precisie gemeten worden? Verklaar al je antwoorden.

     Ter herinnering: *De werking van de pariteitsoperator op een arbitraire functie $f(x)$ wordt gegeven door: $\mathcal{P}f(x) = f(-x)$.*
   - Bereken het resultaat van de volgende uitdrukking:

     $$\left[x^3, p_x^2\right] \psi_n(\vec{r}\ ) \ ,$$

     waarbij $\psi_n(\vec{r}\ )$ een niet nader gespecifieerde oplossing is van de TISE voor een deeltje met massa m dat in drie dimensies beweegt onder invloed van een potentiaal $V(\vec{r}\ )$.

2. THEORIE VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen "Kwantummechanica 1": 27 januari 2015

OEFENINGEN (20 punten)

Bij het oplossen van het oefeningengedeelte mogen ENKEL de cursusnota's (TRANSPARANTEN) en het handboek "Quantum Mechanics" van Bransden en Joachain gebruikt worden. Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Een deeltje met massa m beweegt in één dimensie in een zogenaamde delta-potentiaal gegeven door:

$$V(x) = \lambda\delta(x) \; .$$

TIP: Bij het oplossen van de onderstaande vragen is het belangrijk in te zien dat de voorwaarde dat de afgeleiden van de golffuncties moeten gelijk zijn op de randpunten van de verschillende gebieden in de ruimte, zich voor een delta-potential hertaalt tot de volgende voorwaarde:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon}V(x)\psi(x)dx\right] = \lim_{\epsilon\to 0} E\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\psi(x)dx$$

---

1. Beschouw de situatie waarbij het deeltje een constante positieve energie $E > 0$ heeft en $\lambda > 0$ (positieve delta-potentiaal). Het deeltje wordt aangemaakt ver weg aan de linkerkant van de potentiaal en beweegt van links naar rechts (dus, naar de potentiaal toe).
   - Bereken de transmissiecoëfficiënt (T) en de reflectiecoëfficiënt (R).
   - Maak een schets van T tegen een goed gekozen dimensieloze grootheid. Is het bekomen resultaat in overeenstemming met wat je intuïtief verwacht? In hoeverre wijkt je resultaat af van de voorspellingen van de klassieke fysica.

2. Beschouw nu de situatie waarbij $\lambda < 0$ (negatieve delta-potentiaal) en het deeltje een negatieve energie ($E < 0$) heeft.
   - Toon aan dat er een gebonden toestand bestaat van het type

     $$\psi_0(x) = A\exp -\kappa\,|x| \qquad\qquad E_0 = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} \; .$$

     en bepaal de waarde van A.
   - Toon aan dat de bijbehorende energie-eigenwaarde E_0 bij de toestand $\psi_0(x)$ gegeven wordt door

     $$E_0 = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = -\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2} \; .$$

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Een deeltje in een één-dimensionale harmonische oscillator bevindt zich op $t = 0$ in de toestand

$$\Psi(x, t = 0) = \alpha\psi_0(x) + \beta\psi_1(x) \ ,$$

waarbij $\psi_0(x)$ ($\psi_1(x)$) de golffunctie is horend bij de grondtoestand (eerste aangeslagen toestand).

1. Bepaal de waarden van α en β zodanig dat op $t = 0$ de verwachtingswaarde $\langle x \rangle$ zo groot mogelijk wordt.

2. Construeer $\Psi(x, t)$ en $|\Psi(x, t)|^2$ voor een arbitrair tijdstip $t > 0$. Beschrijf bij vaste x de tijdsafhankelijkheid van de $|\Psi(x, t)|^2$.

3. Als men op een arbitrair tijdstip t de energie van dit deeltje meet, welke waarden kan men dan vinden en met welke waarschijnlijkheid?

4. Bereken EXPLICIET de verwachtingswaarden $\langle x \rangle$, $\langle p_x \rangle$ en $\left\langle \frac{dV(x)}{dx} \right\rangle$ op een arbitrair tijdstip t, en toon aan dat wel degelijk voldaan is aan het Ehrenfest theorema

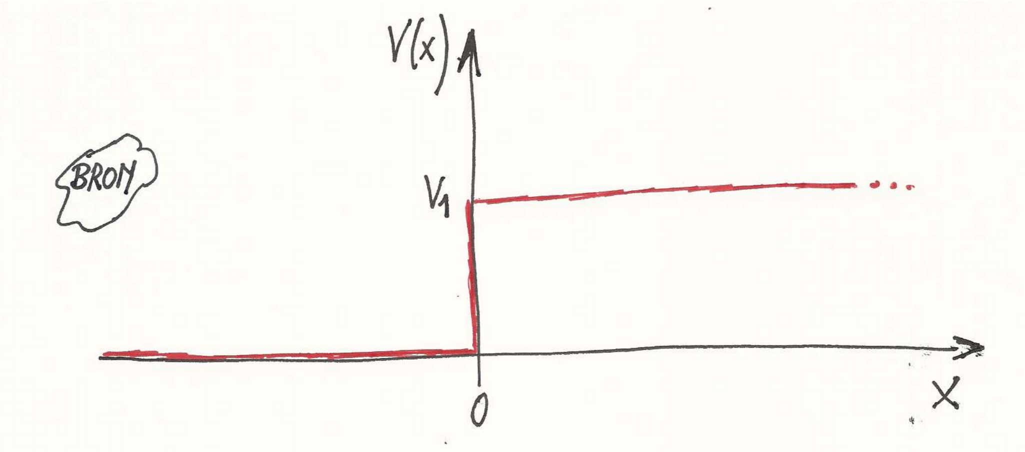
$$\frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{dV(x)}{dx} \right\rangle \ .$$

Examen “Kwantummechanica 1”: 13 januari 2014

THEORIE (30 punten)

Antwoord bondig en gevat!

1. THEORIE VRAAG 1 (10 PUNTEN)



Een deeltje met massa m beweegt in één dimensie onder de invloed van een potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , -\infty < x < 0 \\ V_1(> 0) & , 0 \leq x < +\infty \end{cases} .$$

De deeltjes worden gecreëeerd met een welbepaalde vaste energie $E \geq 0$ in een bron die zich aan de linkerkant van de oorsprong bevindt.

- Beschouw de situatie $E < V_1$:
  - (a) Bepaal de oplossingen van de TISE en de TDSE.
  - (b) Geef de definitie van de reflectie- en transmissiecoëfficiënt.
  - (c) Bereken de reflectie- en transmissiecoëfficiënt.
  - (d) Bereken de positie waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x, t)$ **voor het gebied** $-\infty < x < +\infty$.
- Beschouw de situatie $E > V_1$:
  - (a) Toon aan dat de reflectiecoëfficiënt R gegeven wordt door een uitdrukking van het type
    $$R = \frac{(1 - \mathcal{C})^2}{(1 + \mathcal{C})^2} ,$$
    en bepaal de grootheid $\mathcal{C}$.

2. THEORIE VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen "Kwantummechanica 1": 13 januari 2014

OEFENINGEN (20 punten)

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S (TRANSPARANTEN) EN HET HANDBOEK "QUANTUM MECHANICS" VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Een deeltje met massa m beweegt in één dimensie in een potentiaal gegeven door:

$$V(x) = \begin{cases} 0\ , & 0 \leq x \leq a \\ +\infty\ , & x > a \quad \text{en,} \quad x < 0, \end{cases}$$

en wordt op het tijdstip $t = 0$ in een toestand gebracht die beschreven wordt door de volgende golffunctie:

$$\Psi(x, t = 0) = Ax\,(a - x) \qquad\qquad (0 \leq x \leq a)\ .$$

1. Bepaal de normeringsconstante A.
2. Bepaal de golffunctie $\Psi(x, t)$ op een arbitrair tijdstip t.
3. Noem E_1 de grondtoestandsenergie. Wat is de waarschijnlijkheid om bij een meting van de energie op een arbitrair tijdstip t de waarde E_1 te vinden wanneer op $t = 0$ het deeltje zich bevindt in de hierboven gespecifieerde $\Psi(x, t = 0)$?
4. Bereken de positie waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x, t)$ van het systeem. Op welke tijdsstippen t_1 geldt dat $P(x, t = t_1) = P(x, t = 0)$? Verklaar je antwoord.

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

We beschouwen een deeltje met massa m dat zich in een tweedimensionale ruimte beweegt. Het deeltje wordt beschreven door de Hamiltoniaan ($k > 0$)

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}k\left(x^2 + z^2\right) \ .$$

Introduceer de variabele $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, de operatoren $a_\pm$ voor de x-richting

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x \mp i\frac{p_x}{(m\hbar\omega)^{1/2}}\right] \quad ,$$

en analoge operatoren $b_\pm$ voor de z-richting.

1. Geef de uitdrukking voor de Hamiltoniaan in termen van de operatoren $a_\pm$ and $b_\pm$.

2. Bepaal het energie-eigenwaardespectrum van het beschouwde tweedimensionale systeem. Bepaal de ontaarding van de grondtoestand en de eerste twee aangeslagen toestanden.

3. Bepaal de genormeerde golffuncties horend bij de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand als functie van de variabelen (x, z, k, m).

4. Toon aan dat de toestand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_+ \left|E_0\right\rangle - ib_-^\dagger \left|E_0\right\rangle\right] \ ,$$

een eigenvector is van de operator $L_y = zp_x - xp_z$, de y-component van de baanimpulsmomentoperator. Bepaal ook de overeenkomstige eigenwaarde. In de bovenstaande uitdrukking staat de ket $\left|E_0\right\rangle$ voor de grondtoestand van het beschouwde tweedimensionale systeem.

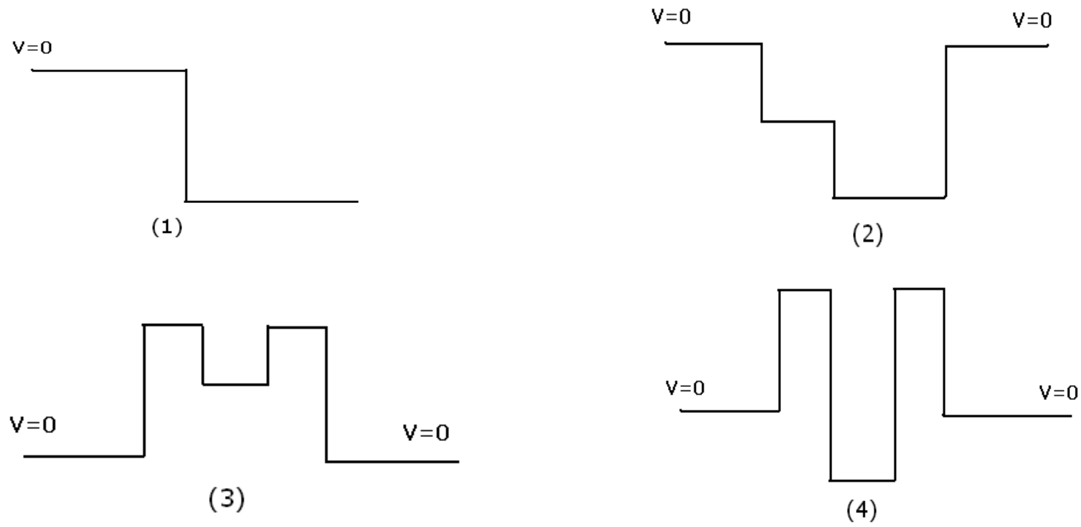
Examen "Kwantummechanica 1": 28 januari 2013

THEORIE

Antwoord bondig en gevat!

1. THEORIEVRAAG 1 (10 PUNTEN)

   - (3 punten) De figuur toont vier één-dimensionale potentialen. Welke van deze potentialen bezit ZOWEL gebonden als ongebonden energie eigentoestanden? Verklaar duidelijk je antwoorden en de keuzes die je maakt.



   - (7 punten) Beschouw een deeltje dat beweegt in drie dimensies. De kwantummechanische operator horend bij het baanimpulsmoment $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ wordt aangeduid als $\widehat{\vec{L}}$ en de bijbehorende componenten als $\left(\widehat{L_x}, \widehat{L_y}, \widehat{L_z}\right)$.

     (a) Bewijs dat $\widehat{L_y}$ een hermitische operator is.

     (b) Bewijs de volgende commutatorbetrekking

     $$\left[\widehat{L_y}, \widehat{L_z}\right] = i\hbar\widehat{L_x} \; .$$

     (c) Is het mogelijk om gemeenschappelijke eigenfuncties van $\widehat{L_y}$ en $\widehat{L_z}$ te bepalen? Verklaar je antwoord.

     (d) Toon aan dat de twee operatoren $\widehat{L_z}$ en $\widehat{L^2} = \widehat{L_x^2} + \widehat{L_y^2} + \widehat{L_z^2}$ wel degelijk gemeenschappelijke eigenfuncties bezitten.

     (e) Geef de definitie van de grootheden (ΔL^2) en (ΔL_z). Wat is de fysische betekenis van deze grootheden?

2. THEORIEVRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen “Kwantummechanica 1”: 28 januari 2013

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA’S (TRANSPARANTEN) EN HET HANDBOEK “QUANTUM MECHANICS” VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Een deeltje met massa M beweegt in een potentiaal $V(x)$ die 0 is voor $0 \leq x \leq L$ en die $+\infty$ is voor andere waarden van x. Op het tijdstip $t = 0$ wordt het deeltje in een toestand gebracht die beschreven wordt door de volgende golffunctie:

$$\Psi(x, t = 0) = A\psi_{E_2}(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} \psi_{E_3}(x) \ ,$$

waarbij α een reëel getal, $\psi_{E_2}(x)$ de genormeerde golffunctie is horend bij de eerste aangeslagen toestand en $\psi_{E_3}(x)$ de genormeerde golffunctie is bij de tweede aangeslagen toestand.

1. Bepaal de genormeerde golffunctie $\Psi(x, t)$ van het deeltje op een arbitrair tijdstip t.

2. Bepaald de verwachtingswaarde van de energie op een arbitrair tijdstip t. Kan $\Psi(x, t)$ een *stationaire toestand* genoemd worden? Verklaar je antwoord.

3. Bepaal de verwachtingswaarde van de positie van het deeltje op een arbitrair tijdstip t.

4. Noem $P_-(t)$ de probabiliteit dat het deeltje zich op tijdstip t in het interval $0 \leq x < \frac{L}{2}$ bevindt. Analoog, $P_+(t)$ is de probabiliteit dat het deeltje zich op tijdstip t in het interval $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ bevindt. Bereken $P_+(t)$ en $P_-(t)$.

5. Bereken
$$\frac{dP_+(t)}{dt} \text{ en, } \frac{dP_-(t)}{dt} \ ,$$
en bespreek je resultaat.

6. Stel een verband op tussen de grootheid $\frac{dP_+(t)}{dt}$ en de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid van het systeem. Geef duidelijk aan welke redenering je hierbij volgt. Om deze vraag op te lossen is het NIET nodig om de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid expliciet te berekenen.

OEFENING 2 (5 PUNTEN)

Beschouw een systeem dat beschreven wordt door middel van een Hamiltoniaan H. De Hamiltoniaan H heeft twee eigentoestanden (ψ_1, ψ_2) met corresponderende energie-eigenwaarden (E_1, E_2). Een willekeurige operator A heeft twee eigentoestanden (ξ_1, ξ_2) met corresponderende eigenwaarden (a_1, a_2).

De matrixrepresentatie van de operator A in de basis (ψ_1, ψ_2) heeft de volgende vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{a} \\ \text{a} & 0 \end{pmatrix},$$

met a een reëel getal.

1. Bereken de verwachtingswaarde $\langle A \rangle$ van de operator A voor de meest algemene oplossing $\Psi(x,t)$ van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking voor het systeem. Bewijs dat de tijdsafhankelijkheid van $\langle A \rangle$ oscillatorisch is en bepaal de periode van de oscillatie.

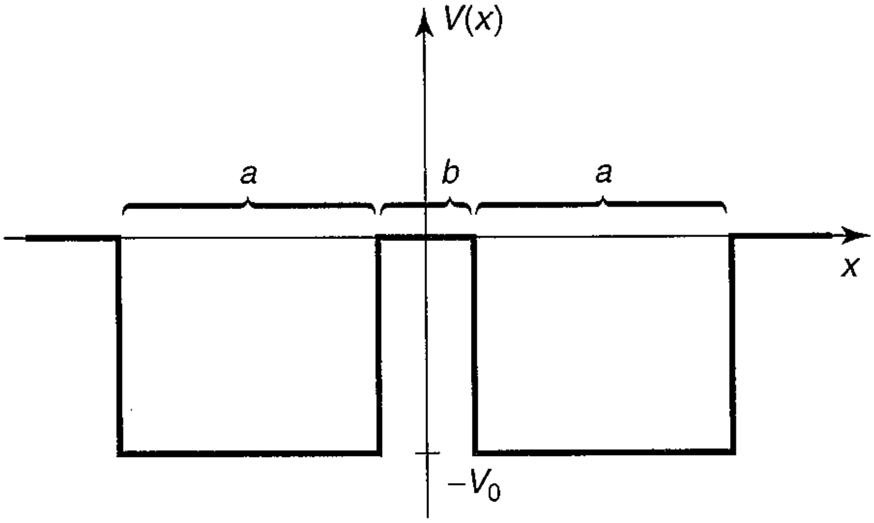
2. Het systeem wordt op $t = 0$ in een toestand gebracht waarbij frequente metingen van de dynamische variabele A steeds de waarde a_1 opleveren.

   (a) Wat is voor deze toestand de verwachtingswaarde van de dynamische variabele A op een arbitrair tijdstip t?

   (b) Welke informatie heb je over de verwachtingswaarde van de energie voor deze toestand op een arbitrair tijdstip t?

OEFENING 3 (5 PUNTEN)

Opgelet: dit is een probleem dat je KWALITATIEF moet oplossen. Je hoeft geen expliciete berekeningen door te voeren.



De dubbele vierkante put is een vrij primitief model voor de potentiaal van een elektron in een diatomische molecule. We beschouwen de dubbele vierkante put zoals het hierboven geschetst wordt. We veronderstellen dat V_0 en a groot genoeg zijn zodat het systeem meer dan één gebonden toestand bezit.

1. Schets de golffunctie die hoort bij de grondtoestand en de golffunctie die hoort bij de eerste aangeslagen toestand van het systeem voor de specifieke gevallen (i) $b = 0$, (ii) $b \approx a$ en (iii) $b \gg a$. Verantwoord de keuzes die je maakt. Bij deze vraag is het belangrijk dat je de relevante punten op de assen van je figuren aanduidt.

2. Wat gebeurt er met de energie E_0 van de grondtoestand en de energie E_1 van de eerste aangeslagen toestand wanneer bij vaste V_0 en a de parameter b varieert tussen 0 en $+\infty$? Je kunt verondestellen dat de diepte van de potentiaal V_0 zeer groot is (of $V_0 \to \infty$). Schets $E_0(b)$ en $E_1(b)$ als functie van b op dezelfde grafiek. Verantwoord de keuzes die je maakt.

Examen Kwantummechanica 1: 31 januari 2012

THEORIE

ANTWOORD BONDIG EN GEVAT !

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN) De postulaten van de kwantummechanica kunnen samengevat worden als

   1. Bestaan van een golffunctie Ψ
   2. Superpositiebeginsel
   3. Dynamische observabelen $\mathcal{O}$ worden beschreven door lineaire operatoren O
   4. De eigenwaarden van de lineaire operatoren bepalen de mogelijke meetwaarden van de dynamische variabelen
   5. Voorschrift voor het bepalen van de verwachtingswaarden
   6. Golffuncties kunnen geschreven worden als een lineaire combinatie van de eigenfuncties van de lineaire operatoren O
   7. Tijdsevolutie van het systeem wordt bepaald door middel van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking

   Beschouw het voorbeeld van een vrij deeltje in één dimensie en de dynamische observabele "kinetische energie". Illustreer en duid de bovenstaande zeven postulaten aan de hand van dit concreet voorbeeld.

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen Kwantummechanica I: 31 januari 2012

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S (TRANSPARANTEN) EN HET HANDBOEK "QUANTUM MECHANICS" VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN) Beschouw een deeltje met massa m dat beweegt in één dimensie onder de invloed van een potentiaal van het type

$$\begin{aligned} V(x) &= +\infty \qquad x \in \left]-\infty, a\right[\\ V(x) &= 0 \qquad x \in [a, 2a] \\ V(x) &= +\infty \qquad x \in \left]2a, +\infty\right[\ . \end{aligned}$$

Het deeltje wordt in een toestand gebracht beschreven door de golffunctie

$$\Psi\left(x, t=0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x) \ ,$$

met $\psi_1(x)$ ($\psi_2(x)$) de golffunctie horend bij de grondtoestand (eerste aangeslagen toestand).

1. Maak een schets van $\Psi\left(x, t=0\right)$ als functie van x.

2. Bepaal de positie waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x,t)$ van het deeltje.

3. Op een tijdstip t oefent men een meting uit om het deeltje te localiseren. Toon aan dat de positie(s) waarop men de grootste kans heeft om het deeltje aan te treffen gegeven worden door de oplossingen van de vergelijking

   $$\psi_1(x)\frac{d\psi_1(x)}{dx} + \psi_2(x)\frac{d\psi_2(x)}{dx} + \cos\left(\frac{3E_1 t}{\hbar}\right)\frac{d\left(\psi_1(x)\psi_2(x)\right)}{dx} = 0 \ .$$

   Aan welke vergelijking voldoen de posities waarop men de MINSTE kans heeft om het deeltje aan te treffen?

4. Bereken $\langle H \rangle$ en $\langle p_x^2 \rangle$ voor het deeltje.

5. Bereken de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid $j(x,t)$ voor het deeltje en toon aan dat $j(x,t)$ voldoet aan de continuïteitsvergelijking.

OEFENING 2 (5 PUNTEN)

De lineaire operator horend bij observabele A heeft twee genormeerde eigenfuncties (ψ_1, ψ_2) met bijbehorende eigenwaarden (a_1, a_2). De lineaire operator horend bij observabele B heeft twee genormeerde eigenfuncties (ϕ_1, ϕ_2) met bijbehorende eigenwaarden (b_1, b_2). De eigenfuncties zijn gerelateerd via

$$\psi_1 = \frac{3.0\phi_1 + 4.0\phi_2}{5} \qquad \psi_2 = G\phi_1 + H\phi_2 \tag{1}$$

1. Bepaal de mogelijke waarden voor de variabelen G en H.

2. Op tijdstip $t = t_0$ meet men verschillende keren de observabele A en men vindt steevast het resultaat a_1. Bepaal de golffunctie $\Psi(x, t = t_0)$ van het systeem op tijdstip $t = t_0$.

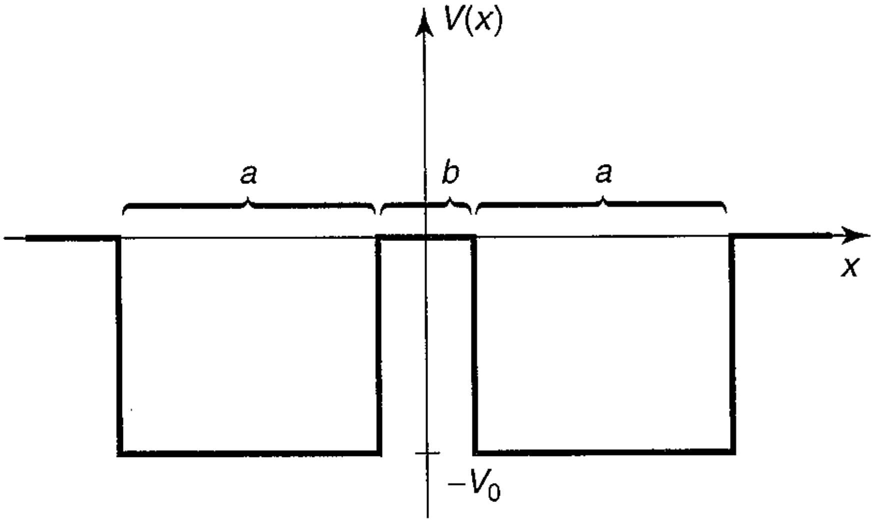
3. Wanneer men op tijdstip $t = t_0$ ook de observabele B meet wat zijn dan de mogelijke uitkomsten? Met welke probabiliteiten kan men die uitkomsten bekomen?

4. Bepaal een uitdrukking voor de golffunctie van het system op een arbitrair tijdstip $t_1 > t_0$ in de wetenschap dat je op tijdstip t_0 de waarde a_1 voor de observabele A gemeten hebt.

5. Bepaal een uitdrukking voor de golffunctie van het system op een arbitrair tijdstip $t_1 > t_0$ in de wetenschap dat je op tijdstip t_0 de waarde a_1 voor de observabele A EN op tijdstip t_1 de waarde b_1 voor de observabele B gemeten hebt.

OEFENING 3 (5 PUNTEN)

Opgelet: dit is een probleem die je KWALITATIEF moet oplossen. Je hoeft geen expliciete berekeningen door te voeren.



De dubbele vierkante put is een vrij primitief model voor de potentiaal van een elektron in een diatomische molecule. We beschouwen de dubbele vierkante put zoals het hierboven geschetst wordt. We veronderstellen dat V_0 en a groot genoeg zijn zodat het systeem meer dan één gebonden toestand bezit.

1. Schets de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand van het systeem voor de specifieke gevallen (i) $b = 0$, (ii) $b \approx a$ en (iii) $b \gg a$. Verantwoord de keuzes die je maakt.

2. Wat gebeurt er met de energie E_0 van de grondtoestand en de energie E_1 van de eerste aangeslagen toestand wanneer bij vaste V_0 en a de parameter b varieert tussen 0 en $+\infty$. Je kunt verondestellen dat de diepte van de potentiaal V_0 zeer goot is (of $V_0 \to \infty$). Schets $E_0(b)$ en $E_1(b)$ als functie van b op dezelfde grafiek. Verantwoord de keuzes die je maakt.

Examen Kwantummechanica 1: 10 januari 2011

THEORIE

ANTWOORD BONDIG EN GEVAT !

- definitie van de Bohr straal
$$a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}$$
- definitie van een δ functie
$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk \exp ikx$$

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)

   - Beschouw de genormeerde eigenfuncties $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_N(x)$ van de hermitische Hamiltoniaan $H(x, p_x)$: $H\psi_k = E_k\psi_k \quad (1 \leq k \leq N)$
     (a) Bepaal de matrixrepresentatie van de operatoren x en H^2 in de basis van de eigenfuncties van de operator H.
     (b) Toon aan dat voor een arbitraire hermitische operator Q en toestand $\psi_k(x) \quad (1 \leq k \leq N)$ de volgende gelijkheid geldt
     $$< \psi_k \mid Q^2 \mid \psi_k >= \sum_{j=1}^{j=N} |< \psi_k \mid Q \mid \psi_j >|^2$$
     (c) Veronderstel dat voor een operator Q de volgende uitdrukking geldt
     $$< \psi_k \mid Q \mid \psi_k >= \sum_{j=1}^{j=N} E_j^2 \, |< \psi_k \mid x \mid \psi_j >|^2 \ .$$
     Bepaal een uitdrukking voor Q LOUTER in termen van de twee operatoren (H, x).
   - Start van de meest algemene vorm van het onzekerheidsbeginsel van Heisenberg
     $$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$
     om op een KWALITATIEVE MANIER de grondtoestandsenergie van het waterstofatoom af te leiden. Welke grondtoestandsenergie zou je verwachten binnen de context van de klassieke fysica?

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen Kwantummechanica I: 10 januari 2011

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S (TRANSPARANTEN) EN HET HANDBOEK "QUANTUM MECHANICS" VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Beschouw een deeltje met massa m dat beweegt in één dimensie onder de invloed van een potentiaal van het type

$$\begin{aligned} V(x) &= +\infty \qquad x \in \,]-\infty, 0[\\ V(x) &= 0 \qquad x \in [0, L] \\ V(x) &= +\infty \qquad x \in \,]L, +\infty[\ . \end{aligned}$$

Het deeltje wordt in een toestand gebracht beschreven door de golffunctie

$$\Psi(x, t = 0) = \psi_3(x) \ ,$$

met $\psi_3(x)$ de golffunctie horend bij de tweede aangeslagen toestand.

1. Maak een schets van $\Psi(x, t = 0)$ als functie van x.

2. Op een tijdstip t oefent men een meting uit om het deeltje te localiseren. Bij welke positie(s) heeft men de grootste kans om het deeltje te vinden? Bij welke positie(s) heeft men de minste kans om het deeltje te vinden?

3. Bereken $\langle H \rangle$ en $\langle p_x^2 \rangle$ voor het deeltje.

4. Bereken de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid $j(x, t)$ voor het deeltje en toon aan dat $j(x, t)$ voldoet aan de continuïteitsvergelijking.

5. Bereken (Δx) en (Δp_x) voor het deeltje. Ligt het resultaat in de lijn van je verwachtingen? Verklaar je antwoord.

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Beschouw de linear harmonische oscillator in één dimensie. De energie-eigenfuncties worden gegeven door $|E_n\rangle$.

- Bewijs de volgende gelijkheid voor een systeem dat zich in een toestand $|E_n\rangle$ bevindt:

$$\Delta x \, \Delta p_x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar \, .$$

- Beschouw nu de genormeerde eigenfuncties $|\alpha\rangle$ van de operator a_-

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x + i\frac{p_x}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right] \, .$$

  Dit betekent dat

$$a_- |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \, ,$$

  met α **een complex getal**.

  1. Bereken $\langle x^2\rangle$, $\langle x\rangle$, $\langle p_x\rangle$ en $\langle p_x^2\rangle$ voor de toestand $|\alpha\rangle$ (TIP: herinner dat $a_+ = a_-^\dagger$) .
  2. Toon aan dat voor de toestanden $|\alpha\rangle$ het merkwaardige resultaat geldt dat

$$\Delta x \, \Delta p_x = \frac{\hbar}{2} \, .$$

- De toestanden $|\alpha\rangle$ kunnen ontwikkeld worden in termen van de energie-eigenfuncties $|E_n\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n |E_n\rangle \, .$$

  Toon aan dat de expansie-coëfficiënten c_n gegeven worden door

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \, .$$

  Met welke methode kun je de c_0 te bepalen?