



Examen Wiskundige modellering

Bacheloropleiding wiskunde

Gesloten-boek-gedeelte – 13 juni 2022

Naam :

Deze bundel van 8 blz. vormt een examen met 7 vragen.

1. (2 pt) Zij A een complexe $m \times n$ matrix van rang r .

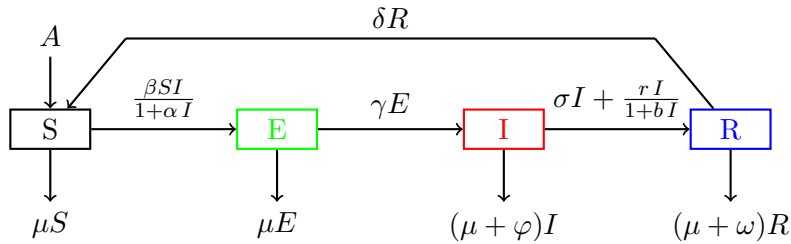
(i) Geef de formele definitie van de SWO van A . Verduidelijk in het bijzonder alle eigenschappen die je kent van de matrices in deze ontbinding.

(ii) Geef een basis voor de beeldruimte van A .

(iii) Geef een basis voor de nulruimte van de hermitisch toegevoegde van A .

(iv) Vul aan in termen van singuliere waarden: $\|A\|_2 = \dots\dots\dots$ en $\|A\|_F = \dots\dots\dots$
(waarbij $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^*A) = \text{tr}(AA^*)$)

2. (2 pt) Gegeven het onderstaande SEIRS-model. Alle optredende constanten zijn niet-negatief.



- (i) Schrijf de differentiaalvergelijkingen op die bij dit compartimenteel model horen.

- (ii) Dit model heeft een ziektevrij evenwichtspunt, d.w.z. een evenwichtspunt waarbij de compartimenten I en E leeg zijn. Wat is dat ziektevrije-evenwichtspunt?

- (iii) Toon aan dat het ziektevrije evenwichtspunt stabiel is zodra $R_0 < 1$, waarbij

$$R_0 = \frac{\beta\gamma A}{\mu(\gamma + \mu)(\sigma + \mu + \varphi + r)}.$$

Algemeen geldt: een evenwichtspunt x^* van een d -dimensionaal dynamisch systeem $\dot{x} = f(x)$ is stabiel indien alle eigenwaarden van de jacobiaanse matrix $Df(x^*)$ een negatief reëel deel hebben.

3. (1 pt) Leg uit hoe men bij toepassing van multiple shooting op een probleem in normaalvorm komt tot de mismatch-functie

$$\phi(E) = \begin{vmatrix} y'_L(x_m, E) & y'_R(x_m, E) \\ y_L(x_m, E) & y_R(x_m, E) \end{vmatrix}.$$

4. (1 pt) Leg uit wat het doel is van de toepassing van de Prüfer-transformatie op een SL-probleem in normaalvorm. Er bestaat ook een geschaalde vorm van de Prüfer-transformatie waarbij gebruik gemaakt wordt van een schaalfunctie S . Waartoe dient deze geschaalde versie?

5. (2 pt) Gegeven een 1-dimensionaal systeem $\dot{x} = f(r, x)$ dat van 1 parameter r afhangt, met een evenwichtspunt x^* voor de waarde $r = r^*$:

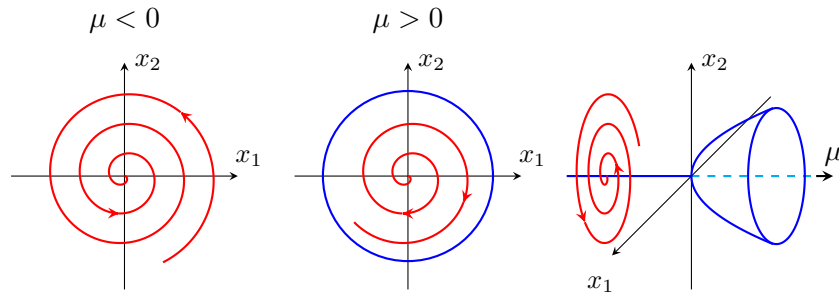
Opdat dit evenwichtspunt een zadelknoop-bifurcatiepunt zou zijn, dient te gelden

$$\begin{aligned} f(r^*, x^*) &= 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(r^*, x^*) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial r}(r^*, x^*) &\neq 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r^*, x^*) &\neq 0 \end{aligned}$$

- (i) Leg uit wat de voorwaarden $f(r^*, x^*) = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial x}(r^*, x^*) = 0$ betekenen.

- (ii) Leg uit hoe je, vertrekkend van $\frac{\partial f}{\partial r}(r^*, x^*) \neq 0$ komt tot $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r^*, x^*) \neq 0$

6. (2 pt) In de onderstaande figuur wordt een samenvattend schema van een type Hopf-bifurcatie getoond. Hierbij zijn de mogelijke banen (en de doorlooprichting, in rood), net als de stabiele structuren (in het donkerblauw) en de instabiele structuren (gestippeld in lichtblauw) aangeduid.



- (i) Welk soort Hopf-bifurcatie wordt hier getoond?
- (ii) In de cursus hebben we een paar (heel eenvoudige) voorbeelden gezien van Hopf-bifurcaties waarbij het dynamisch systeem makkelijker te analyseren viel door overgang op poolcoördinaten (r, θ) . De studie van de Hopf-bifurcatie kon daardoor volledig gebeuren aan de hand van de differentiaalvergelijking voor r , die onafhankelijk was van θ . Geef een vergelijking voor r die met de bovenstaande Hopf-bifurcatie overeenstemt en teken in het (μ, r) -vlak het bifurcatiediagram.
- (iii) Maak de figuren (met banen, stabiele en instabiele structuren) voor het andere type Hopf-bifurcatie dat aan bod is gekomen.

- (iv) Geef een vergelijking voor r die met de Hopf-bifurcatie uit (iii) overeenstemt en teken in het (μ, r) -vlak het bifurcatiediagram.

7. (4 pt)

- (i) Wanneer wordt een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ symplectisch genoemd? Druk dit enerzijds uit m.b.v. de bilineaire afbeelding $\omega(\xi, \eta) = \xi^T J \eta$ en anderzijds ook in termen van A en J . Hierbij is

$$J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \text{ waarbij } J^{-1} = J^T = -J.$$

- (ii) Wanneer wordt een afleidbare afbeelding $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ (met U een open deelverzameling van \mathbb{R}^{2d}) symplectisch genoemd (formule)?

- (iii) Voor een niet-lineaire continu afleidbare afbeelding $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ die een compacte verzameling K afbeeldt op een 2-dimensionale variëteit $M \subset \mathbb{R}^{2d}$ kunnen we

$$\Omega(M) = \iint_K \omega \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, t) \right) ds dt$$

definiëren. Toon aan dat, als $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ symplectisch is, $\Omega(g(M)) = \Omega(M)$.

- (iv) De stelling van Poincaré zegt dat de stroming $\phi_{t,H}$ van $\dot{y} = J^{-1} \nabla H(y)$ (mits $H(y)$ twee keer continu afleidbaar is) symplectisch is. Bewijs dit, waarbij je mag gebruiken dat $\partial \phi_{t,H} / \partial y_0$ voldoet aan de variationele vergelijking

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_{t,H}}{\partial y_0} \right) = J^{-1} \nabla^2 H(\phi_{t,H}(y_0)) \frac{\partial \phi_{t,H}}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial \phi_{t,H}}{\partial y_0}(y_0) = I.$$