Examen Wiskundige modellering

Bacheloropleiding wiskunde

Gesloten-boek-gedeelte – 22 augustus 2022

Naam : ....

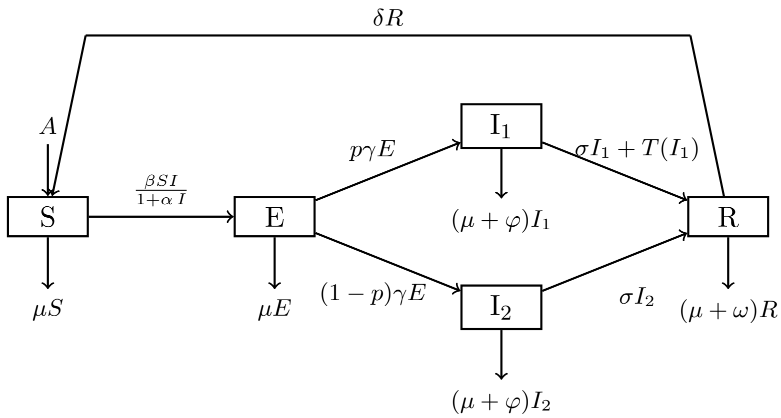
Deze bundel van 6 blz. vormt een examen met 7 vragen.

1. (1 pt) Leg uit hoe men bij toepassing van multiple shooting op een probleem in normaalvorm komt tot de mismatch-functie

$$\phi(E) = \begin{vmatrix} y'_L(x_m, E) & y'_R(x_m, E) \\ y_L(x_m, E) & y_R(x_m, E) \end{vmatrix}.$$

2. (1 pt) In de cursus staat te lezen: ”De SWO maakt het mogelijk om te zeggen dat elke matrix diagonaal is, zolang men maar gebruik maakt van de juiste domein- en beeldruimte.” Leg uit hoe een verandering van basis een stelsel $b = A\,x$ met $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ kan omgezet worden in een stelsel $b' = \Sigma x'$.

3. (2 pt) Gegeven de onderstaande variant van een SEIRS-model. Hierbij wordt de I-klasse opgedeeld in twee klassen I_1 en I_2, om te modelleren dat slechts $p\%$ een bepaalde behandeling ondergaat. Alle optredende constanten zijn niet-negatief.



(i) Schrijf de differentiaalvergelijkingen op die bij dit compartimenteel model horen.

(ii) Dit model heeft een ziektevrij evenwichtspunt, d.w.z. een evenwichtspunt waarbij de compartimenten I_1, I_2 en E leeg zijn. Wat is dat ziektevrije-evenwichtspunt?

4. (1 pt) Gegeven een kritisch punt $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ van een voldoend afleidbare functie $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, m.a.w. $\text{grad} f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Verder geldt de volgende eigenschap: als alle eigenwaarden van de Hessiaan $H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^*) \right)$ positief zijn, dan bereikt f een (lokaal) minimum in $\mathbf{x}^*$.

   Toon aan dat zo'n lokaal minimum $\mathbf{x}^*$ van $f(\mathbf{x})$ ook kan berekend worden als stabiel evenwichtspunt van het dynamisch systeem $\dot{\mathbf{x}} = -\text{grad} f(\mathbf{x})$.

5. (5 pt) Beschouw twee dynamische systemen $\dot{x} = f(x)$ en $\dot{x} = g(x)$ gedefinieerd over open domeinen U en V van $\mathbf{R}^2$.

   (i) Wanneer worden de dynamische systemen $\dot{x} = f(x)$ en $\dot{x} = g(x)$ topologisch equivalent genoemd?

   (ii) Wat verstaat men onder de gelineariseerde vergelijking van het dynamisch systeem $\dot{x} = f(x)$ in een evenwichtspunt x^* ?

   (iii) Onder welke voorwaarde(n) kan men besluiten dat een dynamisch systeem in een omgeving van een evenwichtspunt topologisch equivalent is met die gelineariseerde vergelijking?

   (iv) Wat wordt er bedoeld met significant stabiliteitsgedrag van het gelineariseerde systeem?

   (v) Onder welke voorwaarde is er significant stabiliteitsgedrag?

6. (3 pt)

(i) Wanneer wordt een lineaire afbeelding $A : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{R}^{2d}$ symplectisch genoemd? Druk dit uit m.b.v.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{waarbij } J^{-1} = J^T = -J\,.$$

(ii) Wanneer wordt een afleidbare afbeelding $g : U \to \mathbf{R}^{2d}$ (met U een open deelverzameling van $\mathbf{R}^{2d}$) symplectisch genoemd (formule)?

(iii) Toon aan dat, indien $\phi_{t,H}$ symplectisch is voor alle $y \in U$ en voor alle voldoend kleine t, $\dot{y} = f(y)$ lokaal Hamiltoniaans is.

Je mag hierbij gebruiken dat

(1) $\dfrac{\partial \phi_{t,\,H}}{\partial y_0}$ voldoet aan $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \phi_{t,\,H}}{\partial y_0}\right) = f'(\phi_{t,H}(y_0))\dfrac{\partial \phi_{t,\,H}}{\partial y_0}$ met $\dfrac{\partial \phi_{t,\,H}}{\partial y_0}(t_0) = I$.

(2) als $g : D \to \mathbf{R}^{2d}$ met D een open deelverzameling van $\mathbf{R}^{2d}$ continu afleidbaar en de Jacobiaan $g'(y)$ symmetrisch is voor alle $y \in D$, er voor $y_0 \in D$ een omgeving en een functie $H(y)$ bestaan zodat $g(y) = \nabla H(y)$.

7. (3 pt)

(i) Stel dat we een numerieke methode toepassen op het probleem $\dot{y} = f(y)$. Dan kunnen we hiermee een gewijzigde vergelijking

$$\dot{\tilde{y}} = f(\tilde{y}) + hf_2(\tilde{y}) + h^2 f_3(\tilde{y}) + \dots$$

associëren.

Wat stelt die gewijzigde vergelijking voor en hoe ziet die vergelijking er uit als je weet dat de numerieke methode orde p heeft?

(ii) Stel dat we een symplectische numerieke methode van orde p toepassen op het Hamiltoniaanse systeem $\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y)$ met voldoend afleidbare $H(y)$. Hoe ziet de gewijzigde vergelijking er in dat geval uit?

(iii) Wat weet je over het al of niet behoud van de Hamiltoniaan wanneer een symplectische methode van orde p wordt toegepast op een Hamiltoniaans probleem?