UNIVERSITEIT GENT

Examen Wiskundige modellering

Bacheloropleiding wiskunde

gesloten-boek-gedeelte – 21 augustus 2023

Naam : ....

Deze bundel van 7 blz. vormt een examen met 9 vragen.

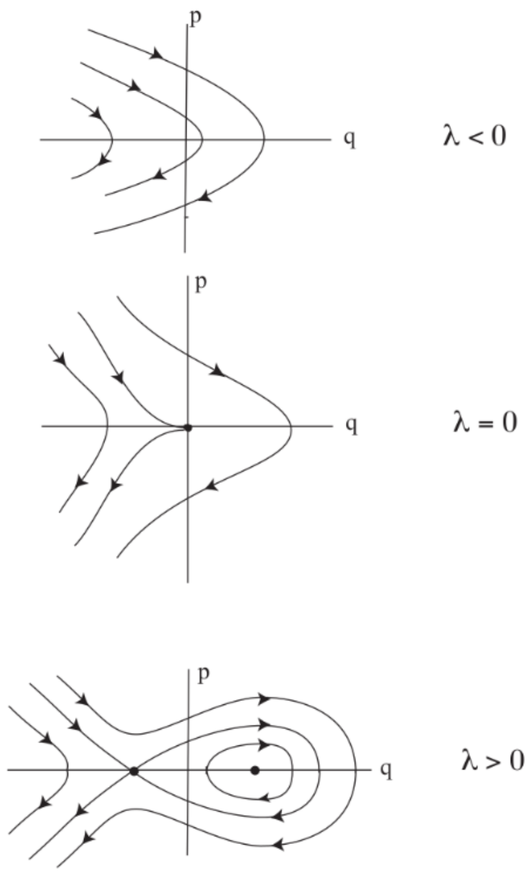
---

1. (2 pt) Het basisreproductiegetal R_0 beïnvloedt heel veel aspecten van de dynamica van een epidemie die beschreven wordt door het SIR-model

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{d\tau} = -R_0\,\tilde{x}\,\tilde{y} & \tilde{x}(0) = \frac{N-1}{N} \approx 1 \\ \dfrac{d\tilde{y}}{d\tau} = R_0\,\tilde{x}\,\tilde{y} - \tilde{y} & \tilde{y}(0) = \frac{1}{N} \approx 0 \\ \dfrac{d\tilde{z}}{d\tau} = \tilde{y} & \tilde{z}(0) = 0\,. \end{cases}$$

Zo bvb. is het eenvoudig aan te tonen (dit hoef je niet te doen) dat de epidemie alleen kan uitbreken als $R_0 > 1$. Toon aan dat er ook een verband is (en geef dat verband) tussen R_0 en de fractie $\tilde{z}_\infty$ personen die de ziekte uiteindelijk zullen oplopen.

2. (1 pt) In de onderstaande figuur worden faseportretten getoond van een hamiltoniaans dynamisch systeem dat afhangt van een parameter λ. De evenwichtspunten zijn hierbij aangeduid als zwarte bollen, ongeacht hun stabiliteit. Welk soort bifurcatie grijpt er plaats bij $\lambda = 0$? Wat kun je vertellen over de aard van de evenwichtspunten van dit systeem?



3. (2 pt) Zij x^* een evenwichtspunt van een twee-dimensionaal dynamisch systeem $\dot{x} = f(x)$.

   (i) Wat verstaat men onder de gelineariseerde vergelijking van het dynamisch systeem $\dot{x} = f(x)$ in het evenwichtspunt x^*?

   (ii) Wat betekent significant stabiliteitsgedrag van het gelineariseerde systeem en onder welke voorwaarde is er significant stabiliteitsgedrag?

4. (2 pt) Beschouw twee dynamische systemen $\dot{x} = f(x)$ en $\dot{x} = g(x)$ gedefinieerd over open domeinen U en V van $\mathbb{R}^2$.

   (i) Wanneer worden deze dynamische systemen topologisch equivalent genoemd?

   (ii) Onder welke voorwaarde is een dynamisch systeem in een omgeving van een evenwichtspunt topologisch equivalent met haar gelineariseerde vergelijking?

5. (2 pt) Zij A een complexe $m \times n$ matrix van rang r.

   (i) Geef de formele definitie van de SWO van A. Verduidelijk in het bijzonder alle eigenschappen die je kent van de matrices in deze ontbinding.

   (ii) Geef een basis voor de nulruimte van A.

   (iii) Geef een basis voor de beeldruimte van de hermitisch toegevoegde van A.

   (iv) Druk uit in termen van singuliere waarden:

   (a) $\|A\|_2 = \cdots\cdots\cdots\cdots$

   (b) $\|A\|_F = \cdots\cdots\cdots\cdots$

6. (3 pt)

(i) Wanneer wordt een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$ symplectisch genoemd? Druk dit uit m.b.v.

$$J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \text{waarbij } J^{-1} = J^T = -J$$

en de bilineaire afbeelding $\omega(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{d} \det \begin{pmatrix} \xi_i^p & \eta_i^p \\ \xi_i^q & \eta_i^q \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{d} (\xi_i^p \eta_i^q - \xi_i^q \eta_i^p)\,.$

(ii) Wanneer wordt een afleidbare afbeelding $g : U \to \mathbb{R}^{2d}$ (met U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^{2d}$) symplectisch genoemd (formule)?

(iii) Toon aan dat, indien de oplossingsoperator $\phi_{t,H}$ van $\dot{y} = f(y)$ symplectisch is voor alle $y \in U$ en voor alle voldoend kleine t, $\dot{y} = f(y)$ lokaal Hamiltoniaans is.

Je mag hierbij gebruiken dat

(1) $\dfrac{\partial \phi_{t,H}}{\partial y_0}$ voldoet aan $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \phi_{t,H}}{\partial y_0}\right) = f'(\phi_{t,H}(y_0))\dfrac{\partial \phi_{t,H}}{\partial y_0}$ met $\dfrac{\partial \phi_{t,H}}{\partial y_0}(t_0) = I$.

(2) als $g : D \to \mathbb{R}^{2d}$ met D een open deelverzameling van $\mathbb{R}^{2d}$ continu afleidbaar en de Jacobiaan $g'(y)$ symmetrisch is voor alle $y \in D$, er voor $y_0 \in D$ een omgeving en een functie $H(y)$ bestaan zodat $g(y) = \nabla H(y)$.

7. (1 pt) Zij A een reële, symplectische matrix, toon dan aan dat

   (i) A^{-1} bestaat en ook symplectisch is.

   (ii) A^T ook symplectisch is.

8. (1 pt) Wat is, in de context van SL-problemen, het doel van de Prüfer-transformatie?

9. (2 pt) De oplossing van het lokale probleem

$$y''(X+\delta) = (V(X+\delta) - E)y(X+\delta)\,, \quad \delta \in [0,h]$$

met gegeven beginvoorwaarden $y(X) = \alpha$, $y'(X) = \beta$ kan worden geschreven in termen van functies $u(\delta)$ en $v(\delta)$ als

$$\begin{bmatrix} y(X+\delta) \\ y'(X+\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\delta) & v(\delta) \\ u'(\delta) & v'(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(X) \\ y'(X) \end{bmatrix}.$$

(i) Leg uit hoe u en v moeten gekozen worden om dit te kunnen neerschrijven.

(ii) Leg uit hoe men vervolgens komt tot

$$\begin{bmatrix} y(X) \\ y'(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'(\delta) & -v(\delta) \\ -u'(\delta) & u(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(X+\delta) \\ y'(X+\delta) \end{bmatrix}.$$