UNIVERSITEIT GENT

Examen Wiskunde modellering

Bacheloropleiding wiskunde

Gesloten-boek-gedeelte – 13 juni 2023

Naam : ....

1. (2 pt) Het basisreproductiegetal R_0 beïnvloedt heel veel aspecten van de dynamica van een epidemie die beschreven wordt door het SIR-model

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{d\tau} = -R_0\,\tilde{x}\,\tilde{y} & \tilde{x}(0) = \frac{N-1}{N} \approx 1 \\ \dfrac{d\tilde{y}}{d\tau} = R_0\,\tilde{x}\,\tilde{y} - \tilde{y} & \tilde{y}(0) = \frac{1}{N} \approx 0 \\ \dfrac{d\tilde{z}}{d\tau} = \tilde{y} & \tilde{z}(0) = 0\,. \end{cases}$$

Zo is het bvb. eenvoudig aan te tonen dat de epidemie alleen kan uitbreken als $R_0 > 1$.

Toon aan dat zowel de maximale waarde die $\tilde{y}$ bereikt als de corresponderende waarde die $\tilde{x}$ op dat ogenblik bereikt, afhangen van R_0.

2. (4 pt) Zij $A = U\Sigma V^*$ de SWO van de $m \times n$ matrix A van rang r met $m \geq n$.

   (i) Wat weet je over

   - de matrix U?

   - de matrix Σ?

   - de matrix V?

   (ii) Hoe ziet de gereduceerde SWO er uit? Wat zijn de ordes van de matrices in deze decompositie?

   (iii) Veronderstel dat A volle rang $r = n$ heeft en dat alle singuliere waarden verschillend zijn. In hoeverre is de SWO van A dan uniek? In hoeverre is de gereduceerde SWO van A dan uniek?

   (iv) Stel nu dat $m = n = r$. Hoe ziet de SWO van A^{-1} er dan uit?

3. (5 pt)

(i) Wanneer worden de dynamische systemen $\dot{x} = f(x)$ en $\dot{x} = g(x)$ gedefinieerd over open omgevingen U en V van $\mathbb{R}^2$ topologisch equivalent genoemd?

(ii) Zij x^* een evenwichtspunt van $\dot{x} = f(x)$. Wat verstaat men onder de gelineariseerde vergelijking van het dynamisch systeem in dat evenwichtspunt?

(iii) Onder welke voorwaarde kan men besluiten dat een dynamisch systeem in een evenwichtspunt topologisch equivalent is met zijn gelineariseerde vergelijking?

(iv) Wat wordt er bedoeld met significant stabiliteitsgedrag van het gelineariseerde systeem?

(v) Onder welke voorwaarde is er significant stabiliteitsgedrag?

4. (3 pt) Beschouw het stelsel

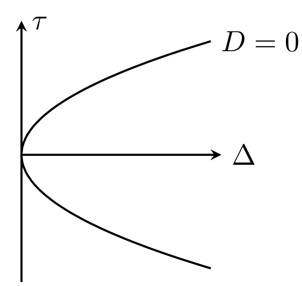
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_2. \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Voor welk soort bifurcatie in 2-dimensies is dit het typeprobleem?

(ii) Bepaal de evenwichtspunten en bespreek hun stabiliteit in functie van μ.

(iii) Gebruik het onderstaande diagram voor de karakterisatie van evenwichtspunten van twee-dimensionale lineaire systemen $\dot{x} = Ax$ om de aard van de evenwichtspunten van de gelineariseerde vergelijking van (1) te karakteriseren in termen van $\tau = \operatorname{sp} A$, $\Delta = \det A$ en $D = \tau^2 - 4\Delta$.

Vul deze figuur aan (of maak één of meer aparte figuren) met de ligging van de evenwichtspunten in functie van de parameter μ. Leg in het bijzonder uit wat er gebeurt wanneer μ nadert tot de bifurcatiewaarde.



5. (3 pt)

(i) Wanneer wordt een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$ symplectisch genoemd? Druk dit enerzijds uit m.b.v. de bilineaire afbeelding $\omega(\xi, \eta) = \xi^T J \eta$ en anderzijds ook in termen van A en J. Hierbij is

$$J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \text{waarbij } J^{-1} = J^T = -J.$$

(ii) Wanneer wordt een afleidbare afbeelding $g : U \to \mathbb{R}^{2d}$ (met U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^{2d}$) symplectisch genoemd (formule)?

(iii) De stelling van Poincaré zegt dat de stroming $\phi_{t,\,H}$ van $\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y)$ (mits $H(y)$ twee keer continu afleidbaar is) symplectisch is. Bewijs dit, waarbij je mag gebruiken dat $\partial\phi_{t,\,H}/\partial y_0$ voldoet aan de variationele vergelijking

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \phi_{t,\,H}}{\partial y_0}\right) = J^{-1}\nabla^2 H(\phi_{t,H}(y_0))\frac{\partial \phi_{t,\,H}}{\partial y_0}\,, \qquad \frac{\partial \phi_{t,\,H}}{\partial y_0}(y_0) = I\,.$$

6. (1 pt) Gebruik het symplectisch-zijn van de stroming van een Hamiltoniaans probleem om te argumenteren dat er in de faseruimte geen asymptotisch stabiele of asymptotisch onstabiele evenwichtspunten kunnen bestaan.

7. (1 pt) Leg uit hoe door simple shooting een Sturm-Liouville randwaardeprobleem

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + q(x)y(x) = Ew(x)y(x),$$

$$a_0 y(a) + b_0 p(a) y'(a) = 0, \quad a_1 y(b) + b_1 p(b) y'(b) = 0$$

(met a_0, b_0 en a_1, b_1 niet beide nul) omgevormd kan worden tot een beginwaardeprobleem.

8. (1 pt) Leg uit hoe men bij toepassing van multiple shooting op een Sturm-Liouville randwaardeprobleem komt tot een mismatch-functie.