



Examen Wiskundige modellering

Bacheloropleiding wiskunde

Gesloten-boek-gedeelte – 22 januari 2025

Naam :

Deze bundel van 7 blz. vormt een examen met 7 vragen.

1. (3 pt) Zij $A = U\Sigma V^*$ de SWO van de complexe $m \times n$ matrix A van rang r . Stel dat we de singuliere waarden noteren als $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_{\min(m,n)}$, dat we de kolommen van U noteren als $u_1, \dots, u_m$ en die van V als $v_1, \dots, v_n$.

Voor elke ν met $0 \leq \nu \leq r$ definiëren we $A_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \sigma_j u_j v_j^*$ en indien $\nu = p = \min(m, n)$, dan definiëren we verder $\sigma_{\nu+1} = 0$.

- (i) Wat weet je over de matrices U , Σ en V in deze ontbinding?

– de matrix U ?

– de matrix Σ ?

– de matrix V ?

- (ii) Onder welke voorwaarde(n) (op m , n , r en de singuliere waarden) is deze ontbinding uniek (op vermenigvuldigingen van kolommen van U en V met factoren van de vorm $e^{i\delta}$ na)?

(iii) Stel dat A invertierbar is. Geef de SWO van A^{-1} .

2. (5 pt)

- (i) Wanneer worden de dynamische systemen $\dot{x} = f(x)$ en $\dot{x} = g(x)$ gedefinieerd over open omgevingen U en V van $\mathbb{R}^2$ topologisch equivalent genoemd?

- (ii) Zij x^* een evenwichtspunt van $\dot{x} = f(x)$. Wat verstaat men onder de gelineariseerde vergelijking van het dynamisch systeem in dat evenwichtspunt?

- (iii) Onder welke voorwaarde kan men besluiten dat een dynamisch systeem in een evenwichtspunt topologisch equivalent is met zijn gelineariseerde vergelijking?

- (iv) Wat wordt er bedoeld met significant stabiliteitsgedrag van het gelineariseerde systeem?

- (v) Onder welke voorwaarde is er significant stabiliteitsgedrag?

3. (4 pt) Stel dat je het dynamisch systeem (1) vervangt door het systeem (2)

$$(1) \begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \dot{x}_1 = -f(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = -g(x_1, x_2, \mu) \end{cases}.$$

Wat wijzigt er dan mogelijks? Onderzoek daartoe wat er gebeurt in de (x_1, x_2, μ) ruimte en in het (Δ, τ) -vlak. Motiveer telkens je antwoord.

(i) de verzameling van evenwichtspunten?

(ii) de aard en stabiliteit van de evenwichtspunten?

(iii) de verzameling van bifurcatiepunten?

(iv) het type van de bifurcatie in een bifurcatiepunt?

4. (3 pt) Gegeven de matrix $J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$ waarbij $J^{-1} = J^T = -J$.
- (i) Wanneer wordt een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ symplectisch genoemd? Druk dit enerzijds uit m.b.v. de bilineaire afbeelding $\omega(\xi, \eta) = \xi^T J \eta$ en anderzijds ook in termen van A en J .
- (ii) Wanneer wordt een afleidbare afbeelding $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ (met U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^{2d}$) symplectisch genoemd (formule)?
- (iii) De stelling van Poincaré zegt dat de stroming $\phi_{t,H}$ van $\dot{y} = J^{-1} \nabla H(y)$ (mits $H(y)$ twee keer continu afleidbaar is) symplectisch is. Bewijs dit, waarbij je mag gebruiken dat $\partial \phi_{t,H} / \partial y_0$ voldoet aan de variationele vergelijking

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_{t,H}}{\partial y_0} \right) = J^{-1} \nabla^2 H(\phi_{t,H}(y_0)) \frac{\partial \phi_{t,H}}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial \phi_{t,H}}{\partial y_0}(y_0) = I.$$

5. (2 pt) Beschouw een 2-dimensionaal Hamiltoniaans systeem $\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y)$ met $y = (p \ q)^T \in \mathbb{R}^2$ en

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ zodat } J^{-1} = J^T = -J.$$

Veronderstel hierbij dat de Hamiltoniaan minstens 2 keer continu afleidbaar is in beide veranderlijken.

- (i) De aard van de evenwichtspunten van dit dynamisch systeem kan uitgedrukt worden in termen van $\nabla^2 H$, de Hessiaan van de Hamiltoniaan H . Toon aan de hand hiervan aan dat er in dit gelineariseerde Hamiltoniaans systeem nooit knopen, sterren of brandpunten bestaan en druk uit onder welke voorwaarde(n) in het corresponderende gelineariseerde systeem een zadel of een centrum gevonden wordt.

- (ii) Kun je ook aantonen dat er in het originele (niet-gelineariseerde) Hamiltoniaanse stelsel geen knopen, sterren of brandpunten kunnen voorkomen?

6. (1 pt) Bij traditionele matrix-methoden is de fout op de eigenwaarde E_k van een SL-probleem op basis van een rooster van N equidistante punten van de vorm $\mathcal{O}(N^{-p}k^q)$ waarbij de natuurlijke getallen p en q afhangen van de gebruikte basismethode. Leg aan de hand van deze uitdrukking uit waarom matrixmethoden computationeel gezien totaal niet geschikt zijn om eigenwaarden met hoge index te bepalen.

7. (3 pt) Beschouw het reguliere SL-probleem in normaalvorm:

$$-y'' + q(x)y = Ey(x) \quad a \leq x \leq b$$

met

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0 \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0$$

waarbij a_1, a_2 net zoals b_1, b_2 niet beide nul zijn.

- (i) Dit probleem kan opgelost worden via shooting vanuit zowel a als b . Aan welke voorwaarden dienen de respectievelijke oplossingen y_L en y_R dan respectievelijk te voldoen in a en b ?

- (ii) Leg uit hoe men vervolgens komt tot de mismatch-functie in een matchpunt x_m :

$$\phi(E) = \begin{vmatrix} y'_L(x_m, E) & y'_R(x_m, E) \\ y_L(x_m, E) & y_R(x_m, E) \end{vmatrix}.$$

- (iii) Leg uit welk praktisch probleem verbonden is aan deze mismatch-functie $\phi(E)$ en leg uit hoe dit via een Prüfer-transformatie en de corresponderende mismatch-functie $\phi_P(E)$ omzeild wordt.