



Examen Wiskundige modellering

Bacheloropleiding wiskunde

Gesloten-boek-gedeelte – 18 augustus 2025

Naam :

Deze bundel van 7 blz. vormt een examen met 7 vragen.

1. (3 pt) Zij A een complexe $m \times n$ matrix van rang r .
 - (i) Geef de formele definitie van de SWO $A = U\Sigma V^*$ van A . Verduidelijk in het bijzonder alle eigenschappen die je kent van de matrices in deze ontbinding.
 - (ii) Geef een basis voor de nulruimte van A en een basis voor de beeldruimte van A .
 - (iii) Toon jouw resultaten uit (ii) aan via de expliciete berekening van de inwerking van $U\Sigma V^*$ op een vector v uitgedrukt in de basis bestaande uit de kolommen van V :
$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j.$$

2. (4 pt) Stel dat je het dynamisch systeem (1) vervangt door het systeem (2)

$$(1) \begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \dot{x}_1 = g(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, \mu) \end{cases}.$$

Wat wijzigt er dan mogelijks? Onderzoek daartoe wat er gebeurt in de (x_1, x_2, μ) -ruimte en/of in het (Δ, τ) -vlak. Motiveer telkens je antwoord.

(i) de verzameling van evenwichtspunten?

(ii) de aard en stabiliteit van de evenwichtspunten?

(iii) de verzameling van bifurcatiepunten?

(iv) het type van de bifurcatie in een bifurcatiepunt?

3. (5 pt) Beschouw twee dynamische systemen $\dot{x} = f(x)$ en $\dot{x} = g(x)$ gedefinieerd over open domeinen U en V van $\mathbb{R}^2$.
- (i) Wanneer worden de dynamische systemen $\dot{x} = f(x)$ en $\dot{x} = g(x)$ topologisch equivalent genoemd?
 - (ii) Wat verstaat men onder de gelineariseerde vergelijking van het dynamisch systeem $\dot{x} = f(x)$ in een evenwichtspunt x^* ?
 - (iii) Onder welke voorwaarde(n) kan men besluiten dat een dynamisch systeem in een omgeving van een evenwichtspunt topologisch equivalent is met die gelineariseerde vergelijking?
 - (iv) Wat wordt er bedoeld met significant stabiliteitsgedrag van het gelineariseerde systeem?
 - (v) Onder welke voorwaarde is er significant stabiliteitsgedrag?

4. (3 pt)

- (i) Wanneer wordt een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ symplectisch genoemd? Druk dit uit m.b.v. de bilineaire afbeelding $\omega(\xi, \eta) = \xi^T J \eta$ met

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ waarvoor } J^{-1} = J^T = -J.$$

- (ii) Wanneer wordt een afleidbare afbeelding $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ (met U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^{2d}$) symplectisch genoemd (formule)?

- (iii) Voor een niet-lineaire continu afleidbare afbeelding $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ die een compacte verzameling K afbeeldt op een 2-dimensionale variëteit $M \subset \mathbb{R}^{2d}$ kunnen we

$$\Omega(M) = \iint_K \omega \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, t) \right) ds dt$$

definiëren. Toon aan dat, als $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ symplectisch is, $\Omega(g(M)) = \Omega(M)$.

5. (2 pt) In de cursus worden, vertrekkend van de type-vergelijkingen voor 1D-bifurcaties, de corresponderende bifurcaties in 2D aangebracht door toevoeging van een extra vergelijking in een andere veranderlijke. Zo ontstaat een heel eenvoudig, ongekoppeld 2D-stelsel, wat de analyse heel eenvoudig maakt. Men zou echter ook een eenvoudig gekoppeld stelsel kunnen creëren ter illustratie van een bifuratie in een 2D-systeem.
- Dit aandachtig: bouw, vertrekkend van de kennis rond bifuracties in 1D-systemen, een Hamiltoniaans 2D-systeem met een zadel-knoobifurcatie. Bepaal ook de Hamiltoniaan van dit 2D-systeem. Tip: houd het eenvoudig en zoek een voorbeeld met een separabele Hamiltoniaan.

6. (3 pt)

- (i) Stel dat we een numerieke methode toepassen op het probleem $\dot{y} = f(y)$. Dan kunnen we hiermee een gewijzigde vergelijking

$$\dot{\tilde{y}} = f(\tilde{y}) + hf_2(\tilde{y}) + h^2f_3(\tilde{y}) + \dots$$

associëren.

Wat stelt die gewijzigde vergelijking voor en hoe ziet die vergelijking er uit als je weet dat de numerieke methode orde p heeft?

- (ii) Stel dat we een symplectische numerieke methode van orde p toepassen op het Hamiltoniaanse systeem $\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y)$ met voldoende afleidbare $H(y)$. Hoe ziet de gewijzigde vergelijking er in dat geval uit?

- (iii) Wat weet je over het al of niet behoud van de Hamiltoniaan wanneer een symplectische methode van orde p wordt toegepast op een Hamiltoniaans probleem?

7. (3 pt) Beschouw het reguliere SL-probleem in normaalvorm:

$$-y'' + q(x)y = Ey(x) \quad a \leq x \leq b$$

met

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0 \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0$$

waarbij a_1, a_2 net zoals b_1, b_2 niet beide nul zijn.

(i) Dit probleem kan opgelost worden via shooting vanuit zowel a als b . Aan welke voorwaarden dienen de respectievelijke oplossingen y_L en y_R dan respectievelijk te voldoen in a en b ?

(ii) Leg uit hoe men vervolgens komt tot de mismatch-functie in een matchpunt x_m :

$$\phi(E) = \begin{vmatrix} y'_L(x_m, E) & y'_R(x_m, E) \\ y_L(x_m, E) & y_R(x_m, E) \end{vmatrix}.$$

(iii) Leg uit welk praktisch probleem verbonden is aan deze mismatch-functie $\phi(E)$ en leg uit hoe dit via een Prüfer-transformatie en de corresponderende mismatch-functie $\phi_P(E)$ omzeild wordt.