# Disclaimer Extra oefeningen Complexe

Roel Vermet

August 3, 2024

Dit document bevat een hele hoop uitgewerkte oefeningen uit de cursus complexe analyse geschreven door prof. Hans Vernaeve. Deze uitwerkingen zijn gecorrigeerd door Gregory Debruyne. De fouten zijn niet gecorrigeerd in de afbeeldingen zelf, maar ik zet hier even al het commentaar op een rijtje.

Voor oefening 1.9.25 hoef je in principe het tweede geval f is niet (identisch) 0 te bespreken. Er zijn twee gevallen g is identisch 0 (waaruit het gevraagde triviaal is) en g is niet identisch 0, wat je dan bespreekt.

Voor 1.9.26: Toon aan dat $f(z) = g(z) = z$ via eenduidigheid door een ophopingspunt te vinden waar de gelijkheid al geldt en leid daaruit een contradictie af.

Bij 2.5.13.3: Let op dat je de oriëntatie van $\Gamma_4$ juist definieert. De pijl in je tekening is inconsistent met je berekeningen. Bij je tweede ongelijkheid bij de afschatting van $\Gamma_2$ gebruik je de driehoeksongelijk en moet je de (afschattingen) van de vier termen van de teller optellen. Je mag ook niet de integraal van $-\infty$ to $+\infty$ nemen van g omdat g niet integreerbaar is bij 0; er is een enkelvoudige pool. Je berekent de limiet als r -¿ 0. Het reëel deel van g is wel integreerbaar bij 0.

Bij 2.5.13.4 ben je bij de toepassing van de ongelijkheid van Jordan een factor $2/\pi$ vergeten.

Bij 2.5.13.5. Bij de toepassing van Jordan heb je een ondergrens voor de sinus nodig om de exponentiële naar boven af te schatten. Let ook op dat de ondergrens $sin(\theta) \geq 2/\pi\Theta$ alleen geldig is voor $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Bij 2.5.13.6: Je kunt de noemer bij de contour $\Gamma_2$ afschatten met de driehoehsongelijkheid. Bijvoorbeeld, de factor $|z-2| \geq |z| - |2| \geq R - 2$ (als R ¿ 2).

Bij 2.5.13.8 volg ik niet helemaal je afschatting voor $\Gamma_4$. De teller zou naar $exp(-R)$ moet gaan, terwijl de noemer nadert naar 1. Bij de oplossing van I wordt de integraal over de volledige contour $\Gamma$ genomen, en dus niet alleen over $\Gamma_1$. Je oplossing dat je hebt bekomen voor J komt overeen met de oplossing in de cursus. Je twee termen zijn gelijk, en je kan de termen nog wat vereenvoudigen tot je de oplossing in de cursus bekomt.

Bij 2.5.13.9: Let opnieuw op dat al je integralen zin hebben. Je kan niet zomaar $\Gamma_4$ en $\Gamma_5$ optellen door door te integreren in $z = \pi$ omdat er daar een singulariteit is. Je bekijk de som van de integralen (-R,-r) en (r,R) en dan neem je de limiet r-¿ 0. De integraal van $exp(t)/(exp(2t-1)$ later is niet integreerbaar bij 0, maar als je de som neemt van de stukken (-R,-r) en (r,R) kom je 0 uit omdat de functie oneven is. De berekening dat je hebt gedaan voor deze integraal klopt volgens mij niet; bij je transformatie zou je $u^2 - 1$ hebben in de noemer in plaats van $u^2 + 1$. Op het einde hoef je ook geen reëel deel te nemen omdat de functie al reëelwaardig was.

Bij je afschatting van 2.5.13.10 verander je wel het domein van $\theta$ als je $-1 + i$ in de definitie van $z$ opneemt. Je kan trouwens ook $exp(-R^2cos(2\theta)$ gemakkelijk afschatten als je de ongelijkheid $cos(2\theta) \geq cos(\pi/4) = sqrt(2)/2$ gebruikt voor $0 < \theta < \pi/8$. Let opnieuw op dat je de juiste zin van de ongelijkheid van Jordan gebruikt.

Ik weet niet waar je de extra oefening vandaan hebt, maar ik zie ook niet direct in hoe je de integraal van 0 tot $\infty$ verkrijgt, aangezien het integrandum niet even is.

Bij 3.1.25 moet je nog wat meer nagaan. Zijn alle singulariteiten van 1/f (nulpunten van f en polen van f) geïsoleerd en zijn deze altijd een pool of ophefbaar.

Bij 3.1.27 moet je nog de andere richting aantonen.

Bij 3.1.28.1 moet je ook nog nagaan dat je een doorprikte omgeving zo kan kiezen dat $\zeta(z) = \zeta_0$ nooit voor z in de doorprikte omgeving. Bij het tweede deel snap ik ook niet hoe js stelling 3.1.15 gebruikt. Door transformatie van de contour integreer je dan over $\zeta(randB(0,1)$ en deze contour windt zich m keer rond 0 door Opdracht 3.1.9.

Bij 3.1.29.1 begrijp ik niet waarom je het Weierstrassargument toepast. Pas ook je argument lichtjes aan zodat je ook het gevraagde aantoont als lim f(z) als z-¿ $\infty$ niet bestaat.

Bij 3.1.29.2 kan je niet rechtstreeks 3.1.26 toepassen omdat f a priori niet noodzakelijk een veelterm is. Je moet eerst nog aantonen (met behulp van het eerste deel) dat f een veelterm moet zijn.

Bij 3.2.10 misschien vermelden dat je gebruikt dat f continu is in 0.

Bij 3.2.11 ben ik niet zeker of ik je argument goed interpreteer. Ik denk dat je twee gevallen beschouwt en dan ofwel $|f(0)| \leq M$ in het ene geval en in het andere geval $|f(0)| \leq N$ aantoont. Je kan die laatste twee resultaten wel niet samen gebruiken omdat ze beide niet in beide gevallen aangetoond werden. Hint: Beschouw de functie $g(z) = f(z)f(-z)$.

1.9.25: $R$ = ring van holomorfe afbeeldingen

TB: Stel $f, g$ holomorf in $\Omega$
en $f \cdot g = 0$
$\Rightarrow f = 0$ of $g = 0$.

Bew:

~~Stel: $g \neq 0$~~

~~$f = \frac{f \cdot g}{g}$ is holomorf.~~

~~$= \frac{0}{g} = 0$.~~

~~Stel: $f \neq 0$~~

~~$\Rightarrow g = \frac{f \cdot g}{f} = \frac{0}{f} = 0$~~

Stel $g \neq 0$

$\Rightarrow \exists z_0 \in \Omega : g(z_0) \neq 0$.

$\Rightarrow \exists r > 0 : g(z) \neq 0 \ \forall z \in B(z_0, r)$.

$\Rightarrow f = \frac{fg}{g}$ ~~is holomorf~~ op

$= 0$ op $B(z_0, r)$

$\Rightarrow f = 0$ op $\Omega$ wegens eenduidigheid
want $f$ holomorf op $\Omega$

Stel $f \neq 0$ analoog maar $f$ en $g$ gewisseld

1.9.26:

geg: $f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}$, en $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n}$ $\forall n \geq 1$.

TB: $f$ is nooit holomorf op $B(0,1)$.

BW:

Stel: $f$ is holomorf op $B(0,1)$.

~~$g(z) = f(z) - \frac{1}{2n} \to$ holomorf op $B(0,1)$.~~

~~$g\left(\frac{1}{2n}\right)$~~

Hint: Bekijk $g(z) = z$ holomorf:

$g\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}$

$g\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1}$

$= g\left(\frac{1}{2n}\right) - g\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n(2n+1)}$

???

Zou een hint kunnen geven voor wat hier moet gebeuren, want ik zie het niet.

**3)** $J := \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx$

**a)** $\sin^4 x = \frac{1}{4}(1-\cos(2x))^2$

$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x))$.

$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{2})$.

$= \frac{1}{8}(3 - 4\cos(2x) + \cos 4x)$.

**b)** Stel: $f(z) = 3 + cz - 4e^{2iz} + e^{4iz}$.

$\text{mult}_{z=0} f(z)$ moet 3 zijn.

$\rightarrow f(0) = 3 - 4 + 1 = 0$ ✓

$f'(0) = c - 8i + 4i = 0$ ✓

$\Rightarrow c = 4i$

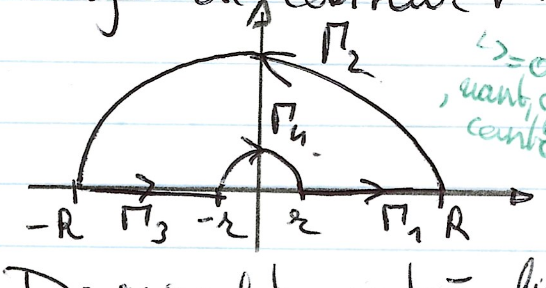
$f''(0) = 16 - 16 = 0$ ✓ mult $= 3$

$f'''(0) = -32i + 64i \neq 0$. ✗ $\longrightarrow$

**c&d)** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx$.

$= \frac{1}{16}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{4iz} - 4e^{2iz} + 4iz + 3}{z^4}}_{g(z)}\,dz$.

Beschouw de contour $\Gamma := \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$.




↳ $= 0$, want gesloten contour

↳ moet naderen naar 0, als $R \to \infty$

De gezochte int $= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_3}\right)$

① $-\lim_{r\to 0^+}\int_{\Gamma_4} g(z)\,dz \overset{25.10}{=} i\pi \cdot \mathrm{res}_{z=0}\, g(z)$ pool van orde 1.

$= i\pi \cdot \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{4iz} - 4e^{2iz} + 4iz + 3}{z^{\cancel{4}3}} \cdot \cancel{z}\right) = \frac{0}{0}$

$\overset{H}{=} i\pi \cdot \lim_{z\to 0}\left(\frac{4ie^{4iz} - 8ie^{2iz} + 4i}{3z^2}\right) = \frac{0}{0}$

$\overset{H}{=} \ldots \overset{H}{=} i\pi \lim_{z\to 0}\left(\frac{-64ie^{4iz} + 32ie^{2iz}}{6}\right) = \frac{16\pi}{3}$

② $\Gamma_2$

$$\left|\int_{\Gamma_2} g(z)\,dz\right|$$

$$\le \int_{\Gamma_2}\left|\frac{e^{4iz}-4e^{2iz}+4iz+3}{z^4}\right||dz|$$

$e^{xiz}$ is rotatie en over $R_2$ is die max als gelijk aan 1

$$\le \int_{\Gamma_2}\left|\frac{\cancel{1}-\cancel{4}+4iz\cancel{+3}}{z^4}\right||dz|$$

$$=4\int_{\Gamma_3}\left|\frac{1}{z^3}\right|dz \qquad \begin{array}{|l} z=Re^{i\theta} \\ dz=Rie^{i\theta}d\theta \end{array}$$

$$=4\int_0^{\pi}\frac{R}{R^{3/2}}\left|\frac{e^{i\theta}}{e^{i3\theta}}\right|d\theta \le \frac{4}{R^2}\int_0^{\pi}d\theta=\frac{4\pi}{R^2}\to 0 \text{ als } R\to\infty$$

als $R\to\infty$ en $r\to 0$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} g(z)\,dz+\int_{\Gamma_3} g(z)\,dz = \int_{\Gamma_4} g(z)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\,dz = \frac{16\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{16\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

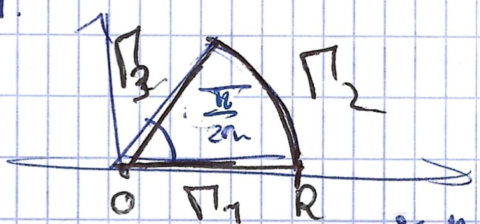
4) a) TB: $\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$.

Bw: $\left|\begin{array}{lll} t = x^n & \Rightarrow & x = \sqrt[n]{t} \\ +\infty \to +\infty & & dx = \frac{1}{n}\, t^{\frac{1}{n}-1}\, dt \\ 0 \to 0 & & \cancel{\frac{1}{n}\, t^{\frac{1-n}{n}}\, dt} \end{array}\right.$

$= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{n}-1}\, e^{-t}\, dt = \cancel{\Gamma(} \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Bereken: $\int_0^{+\infty} \cos(x^n)\,dx$  $n \in \{2, 3, \ldots\}$

met $\Gamma$.




$\cos(x^n) = \cancel{Re(e^{ix^n})} = Re(\exp(ix^n))$

$= \cancel{Re[\exp(i(\underbrace{x+\ldots+x}_{n \text{ keer}}))]}$

We bekijken: $\int_{\Gamma} \exp(ix^n)\,dx$

$\underbrace{\int_{\Gamma}}_{0} = \underbrace{\int_{\Gamma_1}}_{\text{wat we zoeken}} + \underbrace{\int_{\Gamma_2}}_{\text{zou naar 0 moeten gaan? als } R\to\infty} + \underbrace{\int_{\Gamma_3}}_{\text{gewoon uitrekenbaar?}}$

0: gesloten contour.

1) elementaire: $\int_{\Gamma_3} \exp(ix^n)\,dx$  $x = t \cdot e^{i\frac{\pi}{2n}}$, $dx = e^{i\frac{\pi}{2n}}\,dt$

$= -\int_0^R \exp\left(i\frac{\pi}{2n}\right)\cdot \exp\left(i t^n \exp\left(n\cdot i\frac{\pi}{2n}\right)\right) dt$, $t = 0$, $t = R$

$= -\exp\left(i\frac{\pi}{2n}\right)\int_0^R \exp(-t^n)\,dt$

$= -\exp\left(i\frac{\pi}{2n}\right)\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ als $R \to \infty$.

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin\theta \leq \theta.$$

② $\int_{\Gamma_2} \exp(i x^n)\, dx.$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = R\, e^{i\theta} & \theta = 0 \\ dx = R\, i\, e^{i\theta}\, d\theta & \theta = \frac{\pi}{2n} \end{array} \right.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2n}} R\, i\, e^{i\theta} \exp\left(i R^n \exp(in\theta)\right) d\theta.$$

$$\leq \int_0^{\frac{\pi}{2n}} |\cancel{R i e^{i\theta}}| \cdot \left| \exp\left(i R^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))\right) \right| d\theta$$

$$= R \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \exp(-R^n \sin(n\theta))\, d\theta.$$

Jordan!

$$\leq R \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \exp\left(-R^n \tfrac{2}{\pi} n\theta\right) d\theta$$

$$= R \left[ \frac{\exp(-R^n n\theta)}{-R^n n} \right]_0^{\frac{\pi}{2n}} = \frac{\exp(-R^n \frac{\pi}{2})}{-R^{n-1} n} + \frac{\cancel{e_4}}{R^n n}$$

$$= \frac{1}{R^{n-1} n} \left(1 - \underbrace{\exp\left(-R^n \tfrac{\pi}{2}\right)}_{\to 0 \text{ als } R \to \infty \ (\exp(-\infty) = 0)}\right)$$

$\frac{1}{R^{n-1} n} \to 0$ als $R \to \infty$; $\left(1 - \exp\left(-R^n \tfrac{\pi}{2}\right)\right) \to 1.$

$\longrightarrow 0$ al $R \to \infty.$

$$\Longrightarrow \lim_{R \to \infty} \int_0^R \exp(i x^n)\, dx = + \exp\left(i \frac{\pi}{2n}\right) \cdot \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

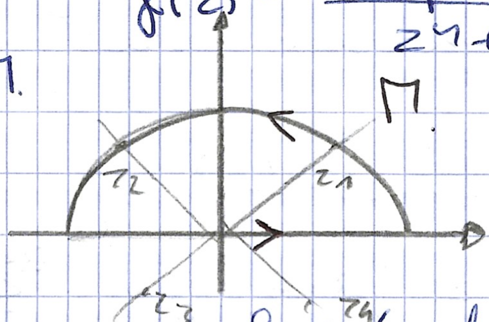
$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} \cos(x^n)\, dx = \lim_{R \to \infty} \operatorname{Re} \int_0^R \exp(i x^n)\, dx$$

$$= \operatorname{Re}\left(+ \exp\left(i \frac{\pi}{2n}\right) \cdot \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= + \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cdot \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^4+4} = \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \cdot \exp(iaz)}{z^4+4} \, dz$.

We onderzoeken $f(z) = \frac{z \exp(iaz)}{z^4+4}$ over de contour $\Gamma$.




~~We~~ ① sing van $f(z)$ (nulp vd noemer)

$z^4 = -4$

$\Rightarrow z = \sqrt[4]{|-4|} \cdot e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{4}}$ met $k \in \{0, \dots, 3\}$.

$\sqrt{16} = 4$

$z_1 = \sqrt[4]{4} \, e^{i\frac{\pi}{4}}, \; z_2 = \sqrt[4]{4} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}, \; z_3 = \sqrt[4]{4} \cdot e^{\frac{5\pi}{4}}, \; z_4 = \sqrt[4]{4} \cdot e^{\frac{7\pi}{4}}$.

Enkel $z_1$ en $z_2$ liggen binnen de contour

$0 = \underbrace{\int_{\Gamma} f(z)\,dz}_{\Leftrightarrow \text{ gesloten contour}} = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$

$= 2\pi i \sum_{z=z_i} \operatorname{res}_{z=z_i} f(z)$ (residustt.)

$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz}_{\substack{\to 0 \text{ wss.} \\ \shortparallel \\ ②}} = \underbrace{2\pi i \sum \operatorname{res} f(z)}_{\substack{\shortparallel \\ ①}}$

$\Leftrightarrow$ zoeken we

## ② Aard v.d. (nuttige sing.)

teller van $f(z)$ : $z_1 \cdot \exp(i a z_1) \neq 0$

$= z_2 \exp(i a z_2) \neq 0$

$\Rightarrow$ polen van orde 1 (want eenvoudig nulpunt v.d. noemer)

## ① $2\pi i \sum \text{res } f(z)$

$$\text{res}_{z=z_i} f(z) = \lim_{z \to z_i} \left( \frac{(z-z_i) z \exp(iaz)}{z^4+4} \right) =$$

$$= z_i \exp(i a z_i) \lim_{z \to z_i} \left( \frac{z - z_i}{z^4+4} \right) = \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{=} \_\_\_\_\_\_ \lim_{z \to z_i} \left( \frac{1}{4z^3} \right) = \frac{\exp(i a z_i)}{4 z_i^2}$$

$$= 2\pi i \left( \frac{\exp(i a z_1)}{2 \cdot 4 z_1^2} + \frac{\exp(i a z_2)}{2 \cdot 4 z_2^2} \right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{4} \cdot \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \qquad z_2 \overset{\text{analoog}}{=} (-1+i)$$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$$= \cancel{\sqrt[4]{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$$

$$= \pi i \left( \frac{\exp(ia(1+i))(-1+i)^2 + \exp(ia(-1+i))(1+i)^2}{2 (1+i)^2 (-1+i)^2} \right)$$

$(-1+i)^2 = -2i$, $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^2(-1+i)^2 = 8$

$$= \frac{\pi i}{8 \cdot 4} \left( -2i \exp(ai) \exp(-a) + 2i \exp(-ai) \exp(-a) \right)$$

$$= \frac{\pi i}{2 \exp(+a)} \sin(a)$$

② $\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \left| \int_{\Gamma_2} \frac{z\exp(iaz)}{z^4+4}\,dz \right|$

$\leq \int_{\Gamma_2} \left| \frac{z\exp(iaz)}{z^4+4} \right| dz$

$\cancel{\leq \int_{\Gamma_2} \left| \frac{z}{z^4+4} \right| dz}$

$\left| \begin{array}{l} z = Re^{i\theta} \\ dz = Rie^{i\theta}\,d\theta \end{array} \right.$ $\theta = 0, \pi$

$= \int_0^{\pi} \left| \frac{R\cancel{e^{i\theta}} \cdot \exp(iaR\exp(i\theta))\, Ri\cancel{e^{i\theta}}}{R^4e^{i4\theta}+4} \right| d\theta$

$\leq R^2 \int_0^{\pi} \left| \frac{\exp(iaR\exp(i\theta))}{R^4\cancel{e^{i4\theta}}} \right| d\theta$

$= \frac{1}{R^2} \int_0^{\pi} \exp(-aR\sin\theta)\,d\theta$

$\leq \frac{1}{R^2} \int_0^{\pi} \exp(-aR\theta)\,d\theta$ jordan $(\sin\theta \leq \theta)$

$= \frac{1}{R^2} \left[ \frac{\exp(-aR\theta)}{-aR} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{R^3a}\left(1 - \underbrace{\exp(-aR\pi)}_{\to 1 \text{ als } R \to \infty}\right)$ $R \to 0$

$\longrightarrow 0$ als $R \to \infty$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\left( \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{z\exp(iaz)}{z^4+4}\,dz \right) = \operatorname{Im}\left( \frac{\pi\sin(a)}{2\exp(a)}\, i \right)$

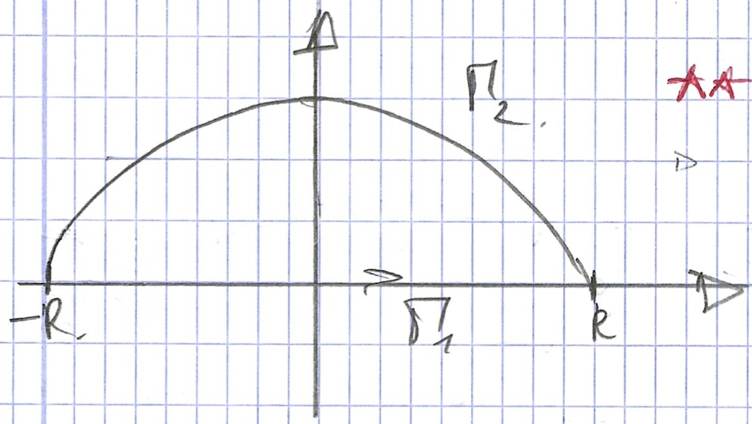
$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi\sin a}{2\exp(a)}$

6) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x(x-1)(x-2)}\,dx$$

$$= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\pi z)}{z(z-1)(z-2)}\,dz$$

Stel: $f(z) = \dfrac{\exp(i\pi z)}{z(z-1)(z-2)}$

Beschouw $\int_{\Gamma} f(z)\,dz$ met $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$




** niet volledig correct, zie laatste pagina.

① singulariteiten van $f(z)$:

$z(z-1)(z-2) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ of $z = 1$ of $z = 2$.

② Aard van de sing binnen $\Gamma$.

$\underline{z=0}$:

$\text{mult}_{z=0} f(z) = \text{mult}_0 \exp i\pi z - \text{mult}_0\, z(z-1)(z-2)$

$= 0 - 1 = -1$.

$\underline{z=1}$:

$\text{mult}_{z=1} f(z) = 0 - 1 = -1$.

$\underline{z=2}$

$\text{mult}_{z=2} f(z) = \text{mult} \exp(i\pi z) - \text{mult}\, z(z-1)(z-2)$

$= 0 - 1 = -1$

$\Rightarrow z_0 = 0, z_1 = 1$ en $z_2 = 2$ zijn polen van orde 1.

## ③ De integraal zelf.

$$0 = \int_{\Gamma} f(z) = \int_{\Gamma_1} f(z) + \int_{\Gamma_2} f(z)$$

$$= 2\pi i \sum_{k=0}^{1} \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) \quad (\text{residu stelling})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\Gamma_1} f(z)}_{\text{we zoeken deze int voor } R\to\infty} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} f(z)}_{\text{we willen dat deze verdwijnt als } R\to\infty}\ ② = \underline{2\pi i \sum \operatorname{res} f(z)}\ ①$$

①

$j \in \{0,1\}$

$$\operatorname{res}_{z=z_j} f(z) = \lim_{z\to z_j} \left((z-z_j) f(z)\right).$$

↳ zie volgende pagina.

$j=0$:

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\cancel{z}\exp(i\pi z)}{\cancel{z}(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}.$$

$j=1$:

$$\lim_{z\to 1} \frac{\cancel{(z-1)}\exp(i\pi z)}{z\cancel{(z-1)}(z-2)} = \frac{-1}{1\cdot(-1)} = 1.$$

$$2\pi i \sum \operatorname{res} f(z) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = 2\cdot 2\pi i$$

②

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\exp(i\pi z)}{z(z-1)(z-2)}\,dz \qquad \text{Stel } z = Re^{i\theta}, \quad dz = Rie^{i\theta}\,d\theta.$$

$$= \left| \int_0^{\pi} \frac{\exp(iR\pi e^{i\theta})}{Re^{i\theta}(Re^{i\theta}-1)(Re^{i\theta}-2)} Rie^{i\theta}\, d\theta \right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \left| \frac{\exp(iR\pi e^{i\theta})\, R}{R^3 e^{i2\theta} - 3R^2 e^{i\theta} + R} \right| d\theta$$

$$\leq \int_0^{\pi} \left| \frac{\exp(iR\pi e^{i\theta})}{R\cancel{e^{i\theta}}(R\cancel{e^{i\theta}}-3)\cancel{e^{i\theta}}} \right| d\theta \underset{\text{Jordan}}{\leq} \int_0^{\pi} \frac{\exp(-R\pi \sin\theta)}{R^2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{R^2}\left[\frac{\exp(-R\pi\theta)}{-R\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{R^3\pi}\left(1 - \exp(-R\pi^2)\right) \to 0 \text{ als } R\to\infty$$

Ik vond geen goede manier om die noemer θ eruit te krijgen. Heeft u een hint hoe het beter kan?

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(z) + \int_{\Gamma_2} f(z) = 2\pi i \sum \text{res}\, f(z)$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\left[\int_{\Gamma_1} f(z) + \cancel{\int_{\Gamma_2} f(z)}\right] = \lim_{R\to\infty} 4\pi i$$

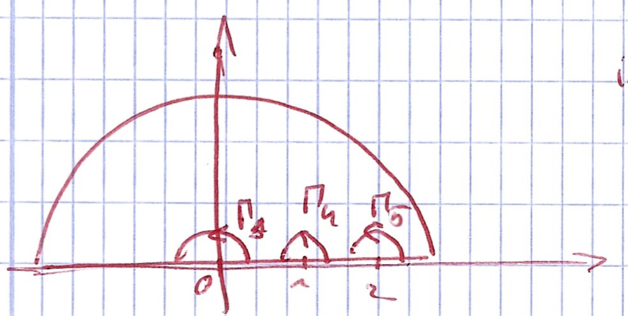
$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\pi z)}{z(z-1)(z-2)}\, dz = 4i\pi i$$

$$\Rightarrow \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\pi z)}{z(z-1)(z-2)}\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(i\pi x)}{x(x-1)(x-2)}\, dx = 4\pi$$

~~\#~~ ① bis

$$\text{res}_{z=2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{\cancel{(z-2)}\exp(i\pi z)}{z(z-1)\cancel{(z-2)}} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

~~AA~~




in plaats van $\Gamma$ te kiezen als $\Gamma_1 + \Gamma_2$ kies je hem als $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 - \Gamma_4 - \Gamma_5$

waarbij je $\Gamma_{3,4,5}$ kan berekenen met lemma 2.5.10. ~~Dan~~

je krijgt dan $\pi i \frac{1}{2} + \pi i\, 1 + \pi i \frac{1}{2} = 2\pi i$ wat wel klopt.

(Je mag residu niet gebruiken want de polen liggen niet volledig in je eenvoudig gebied).

$$\leq \frac{\exp(2R+2ti)}{\exp(2R+2ti)}$$

$$< \int_{-\pi}^{0} \left| \frac{1}{\exp[(1+xi)(R+ti)]} \right| \left| \frac{\exp(2R+2ti)}{1+\exp(2R+2ti)} \right| dt$$

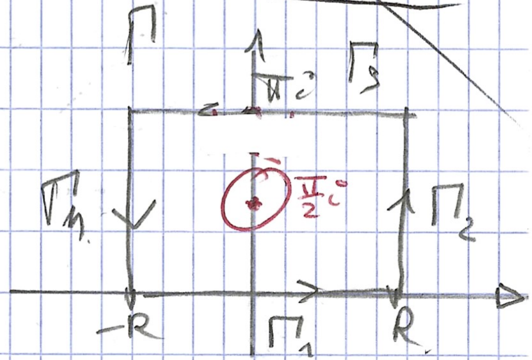
$$= \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{\exp(R-tx)} dt = \frac{1}{\exp(R)} \left[ \frac{\exp(tx)}{x} \right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{1}{x\exp(R)} \left(1 - \exp(-\pi x)\right) \to 0 \text{ als } R \to +\infty$$

$$\int_{\Gamma_4} f(z) = \int_{\Gamma_4} \frac{\exp[(1+xi)z]}{1+\exp(2z)} dz$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z) = \int_{-R}^{R} \frac{\exp[(1+\alpha i)z]}{1+\exp(2z)} dz$$

8) a) $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\exp[(1+\alpha i)z]}{1+\exp(2z)} dz$




① Singulariteiten van $f(z)$

$$1+\exp(2z) = 0$$
$$\Leftrightarrow \exp(2z) = -1$$
$$\Leftrightarrow 2z = i\pi + 2k\pi i$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2}i + k\pi i$$

De enige die binnen de contour ligt is $z = \frac{\pi}{2}i$ of ze vallen ermee samen.

② Aard v.d. sing's

$$\text{mult}_{z=\frac{\pi}{2}i} f(z) = \text{mult}_{z=\frac{\pi}{2}i} \exp[(1+\alpha i)z] - \text{mult}_{z=\frac{\pi}{2}i} \underbrace{(1+\exp(2z))}_{g(z)}$$
$$= 0 - 1 = -1$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2}i\right) \neq 0$$

③ $\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$

$z = R + ti$
$dz = i\,dt$

$$= \left| \int_0^{\pi} i \frac{\exp[(1+\alpha i)(R+ti)]}{1+\exp[2R+2ti]}\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \left| \frac{\exp[(1+\alpha i)(R+ti)]}{1+\exp[2R+2ti]} \right| dt$$

rotates max als 1.

~~$\leq \pi \cdot \exp(R-\alpha t)$~~

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{\exp(R-\alpha t)}{\exp(2R)-1}\,dt.$$

$$= \frac{\exp(R)}{\exp(2R-1)} \cdot \left[ \frac{\exp(-\alpha t)}{-\alpha} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\exp(R)}{\alpha[\exp(2R)-1]} \left(1 - \exp(-\alpha\pi)\right)$$

$\longrightarrow 0$ als $R \to \infty$ want $\exp(2R)$ stijgt sneller dan $\exp(R)$

④ $\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz$

$z = -R - ti$
$dz = -i\,dt$

$$= \left| \int_{-\pi}^{0} i \cdot \frac{\exp[(1+\alpha i)(-R-it)]}{1+\exp(-2R-2it)}\,dt \right|$$

~~$\leq \int_{-\pi}^{0} \left| \exp[(1+\alpha i)\right.$~~

$$= \left| \int_{-\pi}^{0} i \cdot \frac{\exp(2R+2it)}{\exp[(1+\alpha i)(R+it)]\,[1+\exp(2R+2it)]}\,dt \right|$$

$$\leq \int_{-\pi}^{0} \left| \frac{1}{\exp[(1+\alpha i)(R+it)]} \right| \left| \frac{\exp(2R+2it)}{1+\exp(2R+2it)} \right| dt$$

$$\leq \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{\exp(R-\alpha t)} \cdot \frac{\exp(2R)}{\exp(2R)-1}\,dt.$$

$$= \frac{\exp(2R)}{[\exp(2R)-1]\exp(R)} \cdot \left[ \frac{\exp(\alpha t)}{\alpha} \right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{\exp R}{\alpha[\exp(2R)-1]} \left(1 - \exp(-\pi\alpha)\right) \longrightarrow 0 \text{ als } R \to \infty.$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z) = \int_{-R}^{R} \frac{\exp[(1+\alpha i)z]}{1+\exp(2z)} dz$$

(5) $\int_{\Gamma_3} f(z)\, dz$

orientatie $\to$ $$= (-) \int_{-R+\pi i}^{R+\pi i} \frac{\exp[(1+\alpha i)z]}{1+\exp(2z)} dz$$

$$= - \left| \begin{array}{l} z = t + \pi i \\ dz = dt \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z = R + \pi i \\ z = -R + \pi i \end{array} \implies \begin{array}{l} t = R \\ t = -R \end{array}$$

$$= -\int_{-R}^{R} \frac{\exp[(1+\alpha i)(t+\pi i)]}{1+\exp[2(t+\pi i)]} dt$$

$$= -\int_{-R}^{R} \frac{\exp[(1+\alpha i)t]\cdot \exp[(1+\alpha i)\pi i]}{1+\exp(2t)\cancel{\exp(2\pi i)}}$$

$$= \cancel{-\exp(\pi i)}\cdot \exp(-\alpha\pi)\cdot \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz$$

$$0 = \int_{\Gamma} f(z) = (1+\exp(\alpha\pi)) \int_{\Gamma_1} f(z) + \int_{\Gamma_2} f(z) + \int_{\Gamma_4} f(z)$$

$$= 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}i} f(z)$$ pool van orde 1.

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}i} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}i} \frac{(z-\frac{\pi}{2}i)\exp[(1+\alpha i)z]}{1+\exp(2z)} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{H}{=} \exp\left[(1+\alpha i)\frac{\pi}{2}i\right] \lim_{z\to\frac{\pi}{2}i}\left(\frac{1}{2\exp(2z)}\right)$$

$$= \frac{i\exp(\frac{-\alpha\pi}{2})}{2\underbrace{\exp(\pi i)}_{-1}} = -\frac{i}{2}\exp\left(\frac{-\alpha\pi}{2}\right)$$

Als $R \to +\infty$: $\int_{\Gamma_2}, \int_{\Gamma_4} \to 0$.

$$\implies [1+\exp(-\alpha\pi)] \int_{\Gamma_1} f(z) = \pi \exp\left(\frac{-\alpha\pi}{2}\right)$$

$$\implies \int_{\Gamma_1} f(z) = \frac{\pi\exp(\frac{-\alpha\pi}{2})}{1+\exp(-\alpha\pi)}$$

Volgens de oplossing zou niet mogen erbijslaan, maar je hebt die toch nodig om ze gelijk te krijgen in (5)?

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{\cosh(x)}\,dx$$

even functies.

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{\cosh x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-}^{+} \frac{\frac{\exp(i\alpha x) + \exp(-i\alpha x)}{\cancel{2}}}{\left(\frac{\exp(\cancel{2}x) + \cancel{\exp(-x)}}{\cancel{2}}\right)\cancel{\exp(-x)}}\,dx$$

$\exp(x)$

$$= \frac{1}{2}\int_{-}^{+} \frac{\exp[(1+\alpha i)x] + \exp[(1-i\alpha)x]}{1+\exp(2x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-}^{+} \frac{\exp[(1+\alpha i)x]}{1+\exp(2x)}\,dx + \int_{-}^{+} \frac{\exp[(1-\alpha i)x]}{1+\exp(2x)}\,dx\right]$$

↳ De originele integraal met $-\alpha$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\exp\left(\frac{-\alpha\pi}{2}\right)}{1+\exp(-\alpha\pi)} + \frac{\pi\exp\left(\frac{+\alpha\pi}{2}\right)}{1+\exp(\alpha\pi)}\right).$$

Volgens de oplossing zou je $\frac{\pi}{2\cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}$ moeten hebben, maar zelfs met de oplossing kom je er volgens mij niet ~~uit~~. Je krijgt namelijk:

$$\frac{1}{2}\left[\pi\exp\left(\frac{-\alpha\pi}{2}\right) + \pi\exp\left(\frac{+\alpha\pi}{2}\right)\right]$$

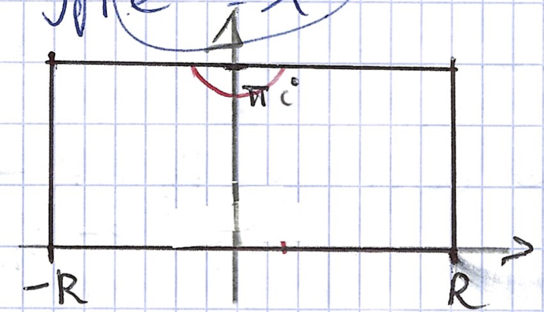
$$= \pi\cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

Of heb ik ergens een rekenfout gemaakt?

9] $\int_0^{+\infty} \frac{x e^x}{e^{2x}-1}\,dx \longrightarrow$ even functie

Beschouw: $\oint_\Gamma \underbrace{\frac{z e^z}{e^{2z}-1}}_{f(z)}\,dz$

met $\Gamma$:




① **Singulariteiten van $f(z)$**

$$
\begin{aligned}
z \text{ sing} &\iff e^{2z}-1=0\\
&\iff e^{2z}=1.\\
&\iff 2z = 0 + 2k\pi i\\
&\iff z = k\pi i
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ 2 singulariteit in de contour:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = \pi i \end{cases}$$

② **Aard van de singulariteiten:**

$z_1 = 0$

$\text{mult}_{z_1=0} f(z) = \text{mult}_{z=0}\, \underbrace{ze^z}_{g(z)} - \text{mult}\, e^{2z}-1.$

$g'(z) = ze^z + e^z$

$g'(0) \neq 0.$

$= 1 - 1 = 0.$

$\Rightarrow$ ophefbare singulariteit.

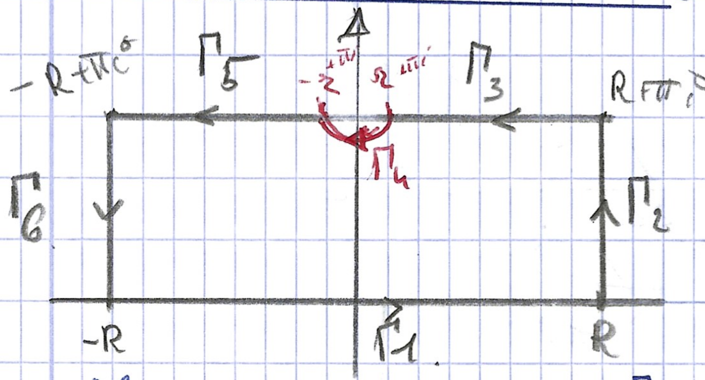
$z_2 = \pi i$

$\text{mult}_{z_2=\pi i} f(z) = \text{mult}.\, ze^z - \text{mult}\, e^{2z}-1.$

$= 0 - 1 = -1.$

$\Rightarrow$ pool van orde 1.

③ Reviewe van de Contour




Als $r \to 0$ dan zal. $\Gamma_5 + \Gamma_3 - \pi i \, \mathrm{res}_{z=\pi i} f(z)$
$\longrightarrow -\Gamma_1.$

④ $$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} \frac{z\exp(z)}{\exp(2z)-1}\,dz.$$

$z = R+ti$
$dz = i\,dt.$

$$= \left| \int_0^{\pi} i \cdot \frac{(R+ti)\exp(R+ti)}{\exp(2R+2ti)-1}\,dt \right|$$

$\leq |R|+|ti| = R+t.$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{|R+ti|\,|\exp(R+ti)|}{|\exp(2R+2ti)-1|}\,dt.$$

$\geq |\exp(2R+2ti)| - |1|.$
$\exp(2R)$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{(R+t)\exp R}{\exp(2R)-1}\,dt = \frac{\exp R}{\exp(2R)-1}\left[Rt + \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\exp R}{\exp(2R)-1}\left(R\pi + \frac{\pi^2}{2}\right) \longrightarrow 0 \text{ als } R \to \infty$$

want $\exp(2R)$ stijgt sneller dan $R\exp(R)$

⑤ $\int_{\Gamma_6} f(z)\,dz \overset{z=-R-it}{=} \left| \int_{-\pi}^{0} \frac{(-R-it)\exp(-R-it)}{\exp(-2R-2ti)-1}\,dt \right|$

$\cancel{\leq \int_{-\pi}^{0} \frac{|R+it|\,|\exp(-R-it)|}{|\exp(-2R-2ti)-1|}\,dt}$

$\cancel{\leq \int_{-\pi}^{0} (R+t)\exp(-R)}$

$= \left| \int_{-\pi}^{0} \frac{(+R+it)\exp(2R+2ti)}{\exp(R+it)(-1+\exp(2R+2ti))}\,dt \right|$

$\leq \int_{-\pi}^{0} \frac{(R+t)\exp(2R)}{\exp R\,[\exp(2R)-1]}\,dt$

$= \frac{\exp R}{\exp(2R)-1}\left(R\pi + \frac{\pi^2}{2}\right) \to 0$ als $R \to \infty$

⑥

$0 = \int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_1} + \overbrace{\int_{\Gamma_2}}^{\to 0} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} + \int_{\Gamma_5} + \overbrace{\int_{\Gamma_6}}^{\to 0 \text{ als } R\to\infty}$

"komen overeen met $\Gamma_1$"

Als $r \to 0+$

$\Rightarrow (1+\alpha)\int_{\Gamma_1} = \pi i \operatorname{res}$

nog uit te reken

oriëntatie.

$\int_{-R+2\pi i}^{R+\pi i} \frac{z\exp(z)}{\exp(2z)-1}\,dz \overset{\substack{z=t+\pi i \\ dt=dz}}{=} -\int_{-R}^{R} \frac{(t+\pi i)\exp(t+\cancel{\pi i})}{\exp(2t+\cancel{2\pi i})-1}\,dt$

$= \int_{\Gamma_2} f(z) + \pi i \int_{-R}^{R} \frac{\exp t}{\exp(2t)-1}\,dx$

$$u = e^{t} \qquad t=-R \to u = e^{R}$$
$$du = e^{t}\,dt \qquad t = R \to u = e^{-R} \Big] \text{ocp.}$$
$$= \int_{e^{-R}}^{e^{R}} \frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$= \Big[\text{bgtan}\, u\Big]_{e^{-R}}^{e^{R}}$$
$$= \text{bgtan}\, e^{R} - \text{bgtan}\, e^{-R}$$

Als $R \to \infty$ dan $\text{bgtan}(+\infty) - \text{bgtan}(0)$.

$$\overset{\|}{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \int_{\Gamma_1} f(t)\,dt + \frac{\cancel{\pi}\,\pi}{2}\,\pi i \Big( \qquad \Big) \cancel{(R \to \infty)}$$

(7) $$\text{res}\, f(z) = \lim_{z \to \pi i} \frac{(z-\pi i) z \exp(z)}{\exp(2z) - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{=} -\pi i \lim_{z \to \pi i} \frac{1}{2\exp(2z)} = -\frac{\pi}{2} i$$

$R \to \infty$.

$$\Rightarrow 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z e^{z}}{e^{(2z)}-1}\,dz + \frac{\pi^2 i}{2} = \pi i \cdot \left(\frac{-\pi i}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\Rightarrow \cancel{4} \int_0^{+\infty} \frac{z e^{z}}{e^{2z}-1} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2 i}{8}$$

$$\Rightarrow \text{Re} \int_0^{+\infty} \frac{z e^{z}}{e^{2z}-1} = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{x}}{e^{2x}-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$$

Niet zeker over

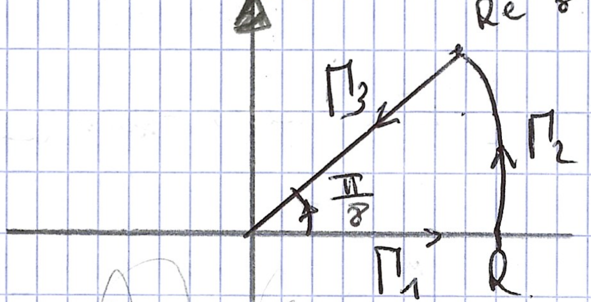
~~Reëel~~ Im deel van

**10** $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\sin(x^2)\,dx$.

Beschouw: $f(z) = \exp(-z^2)\cdot\exp(iz^2)$

$= \exp\left[(-1+i)z^2\right]$

over de contour $\Gamma$: $= \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$




$0 = \int_\Gamma f(z) = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3}$

↳ zoek je ↳ zal naar 0 gaan

$\int_{\Gamma_3} f(z) = \int_{\Gamma_3} \exp\left[(-1+i)z^2\right]$

$\left| \begin{array}{l} z = -t\,e^{i\frac{\pi}{8}} \\ dz = -e^{i\frac{\pi}{8}}\,dt \end{array} \right.$ $\quad z = Re^{i\frac{\pi}{8}} \longrightarrow t = -R$, $\quad z = 0 \longrightarrow t = 0$

zorgen dat oriëntatie klopt

$= -\int_{-R}^{0} \exp\left[(-1+i)\,t^2\,e^{\frac{i\pi}{4}}\right]\cdot e^{\frac{i\pi}{8}}\,dt$

$e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$

$= -e^{\frac{i\pi}{8}}\int_{-R}^{0} \exp\left(-2\frac{t^2}{\sqrt{2}}\right)dt$ $\qquad (i-1)(i+1) = -1-1 = -2$

$u = \frac{t}{\sqrt[4]{2}}$ ; $du = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ $\qquad u = 0$, $u = -R/\sqrt[4]{2}$

$= -\frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt[4]{2}}\int_{-R/\sqrt[4]{2}}^{0} \exp(-u^2)\,du$

↳ even functie

$= -\frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt[4]{2}}\int_0^{R/\sqrt[4]{2}} \exp(-u^2)\,du \longrightarrow -\frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt[4]{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

als $R \to \infty$

$e^{-\frac{u^2}{2}} \to \sqrt{2\pi}$

$$\int_{\Pi_2} f(z)\,dz = \int_{\Pi_2} \exp\left((-1+i)z^2\right) dz.$$

$$\left| \begin{array}{l} z = Re^{i\theta} \qquad \theta : 0 \to \frac{\pi}{8} \\ dz = Rie^{i\theta} \end{array} \right.$$

$$= \left| \int_0^{\pi/8} Rie^{i\theta} \exp\left[(-1+i)R^2 \underbrace{e^{i2\theta}}_{\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)}\right] d\theta \right|$$

$$\leq R \int_0^{\pi/8} \exp\left[-R^2\cos(2\theta) - R^2\sin(2\theta)\right] d\theta.$$

$$\underbrace{(1-2\sin^2\theta)}$$

$$-R^2\left(\cos(2\theta) + \sin(2\theta)\right)$$

$$\leq 2\theta$$

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{(-1+i)}\,z = \sqrt{i}Re^{i\theta} \\ dz = \dfrac{\sqrt{i}Rie^{i\theta}}{\sqrt{(-1+i)}}\,d\theta \qquad \theta : 0 \to \frac{\pi}{8} \end{array} \right.$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{R\sqrt{i}}{\sqrt{(-1+i)}} \cdot i \int_0^{\pi/8} e^{i\theta} \exp\left[iR^2 e^{i2\theta}\right]$$

$$\leq R \left| \underbrace{\sqrt{\frac{i}{-1+i}}}_{A} \right| \int_0^{\pi/8} \exp\left[-R^2 \sin(2\theta)\right] d\theta.$$

$$\leq 2\theta.$$

$$= R \cdot A \left[ \frac{\exp(-2R^2\theta)}{-2R^2} \right]_0^{\pi/8}$$

$$= \underbrace{\frac{A}{2R}}_{\to 0 \text{ als } R\to\infty} \underbrace{\left(1 - \exp\left(-R^2\frac{\pi}{4}\right)\right)}_{\to 1 \text{ al } R\to\infty}$$

$$\exp\left(-R^2\tfrac{\pi}{4}\right) \to 0 \text{ als } R\to\infty$$

$$\Rightarrow \int_{\Pi_2} f \to 0 \text{ als } R \to \infty.$$

als $R \to \infty$.

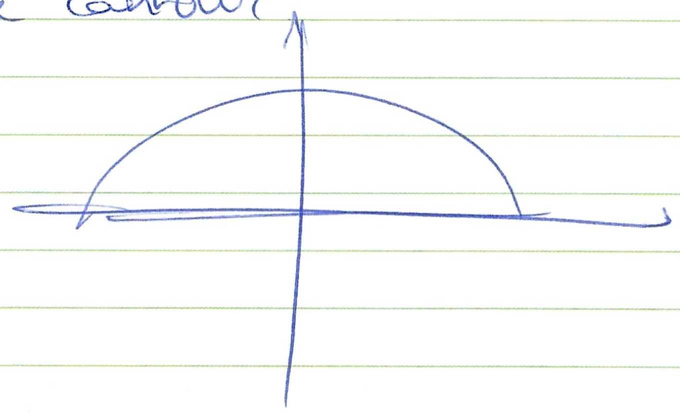
$$\Rightarrow \int_{\Pi_1} = -\int_{\Pi_3} \quad \Rightarrow \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\sin x^2\,dx = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{(2x-1)(1+x^2)}\, dx$$

Beschouw $f(z) = \dfrac{\exp(i\pi z)}{(2z-1)(1+z^2)}$

rond De contour



## ① Singulariteiten

$(2z-1)(1+z^2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{2}$ of $z = \pm i$.

## ② Aard van Sing in contour

$z = \frac{1}{2}$

$\text{mult}_{z=\frac{1}{2}} f(z) = \text{mult}_{z=\frac{1}{2}} \exp(i\pi z) - \text{mult}(2z-1)(1+z^2)$

$= 0 - 1 = -1$

$\Rightarrow$ pool van orde 1.

$z = i$.

$\text{mult}_{z=i} f(z) = \text{mult} \exp(i\pi z) - \text{mult}(2z-1)(1+z^2)$

$= 0 - 1 = -1$

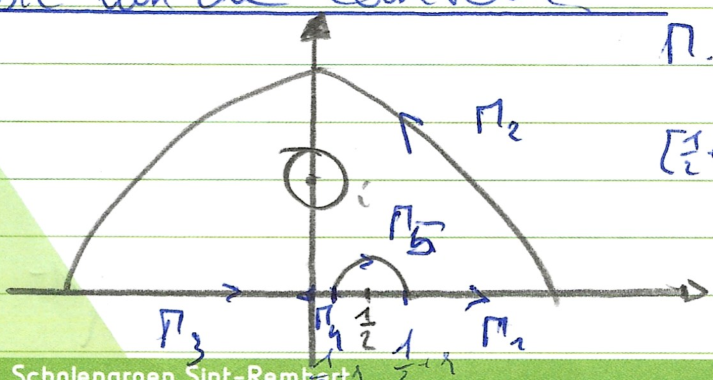
$\Rightarrow$ pool van orde 1.

$[0, \frac{1}{2} - R]$

## ③ Revisie van de Contour

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5$

$[\frac{1}{2}+r, R]$. $[-R, \frac{1}{2}-R]$. $[\frac{1}{2}-R, \frac{1}{2}+\varepsilon[$



$$0 = \int_{\Gamma} f(z) = \int_{\Gamma_1} f(z) + \int_{\Gamma_2} f(z) + \int_{\Gamma_3} f(z) + \int_{\Gamma_4} f(z) + \int_{\Gamma_5} f(z)$$

Hoofdst.

$$= 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=i} f(z) \quad (\text{residu st})$$

1)

$\int_{\Gamma_5} f(z)$ voor $r \to 0$ is $= \pi i \operatorname{res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)$

$$\operatorname{res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left( \frac{(z-\frac{1}{2}) \cdot \exp(i\pi z)}{(2z-1)(1+z^2)} \right)$$

$$= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left( \frac{2\exp(i\pi z)}{1+z^2} \right) = \frac{8i}{5}.$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_5} f(z) = \frac{-8\pi}{5}.$$

2)

$$\int_{\Gamma_2} f(z) = \int_{\Gamma_2} \frac{\exp(i\pi z)}{(2z-\frac{1}{2})(1+z^2)} dz.$$

Stel $z = Re^{i\theta}$ $\quad \theta : 0 \to \pi$.

$dz = Ri e^{i\theta} d\theta$.

$$= \left| \int_0^{\pi} Ri e^{i\theta} \cdot \frac{\exp(i\pi Re^{i\theta})}{(2Re^{i\theta}-1)(1+R^2e^{i2\theta})} d\theta \right|$$

$$\leq R \int_0^{\pi} \left| \frac{\exp(i\pi Re^{i\theta})}{(2Re^{i\theta}-1)(1+R^2e^{i2\theta})} \right| d\theta$$

$$\leq R \int_0^{\pi} \frac{\exp(-\pi R \sin\theta)}{(2R-1)(R^2-1)} d\theta \leq \frac{R}{(2R-1)(R^2-1)} \int_0^{\pi} \exp(-\pi R\theta) d\theta$$

$$= \frac{R}{\quad} \left[ \frac{\exp(-\pi R\theta)}{-\pi R} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi(2R-1)(R^2-1)} \left( 1 - \exp(-R\pi^2) \right)$$

$\longrightarrow 0$ als $R \to \infty$.

$$\int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} + \int_{\Gamma_4} + \int_{\Gamma_5}$$

Als $r \to 0$ dan

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) + \left( \frac{-8\pi}{5} \right).$$

~~We zoeken nog $\Gamma_3$~~

$$\int_{\Gamma_3} f(z) = \int_{-R}^{0} \frac{\exp(i\pi z)}{(2z-1)(1+z^2)} dz.$$

Stel: $z = -t$ $\quad z = 0 \to t = 0$

$dz = -dt$ $\quad z = R \to t = R$

$$= -\int_{R}^{R} \frac{\exp(-i\pi t)}{(1+2t)(1+t)} dt.$$

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{\cancel{(z-i)} \exp(i\pi z)}{(2z-1)(1+z^2) \cancel{(1+i)} (z+i)}$$

$$= \frac{\exp(-\pi)}{(2i-1)(2i)} = \frac{\exp(-\pi)}{(2i-1)(2i)} \frac{(2i+1)}{2i+1}$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{\exp(-\pi)(2i+1)}{5}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) - \frac{8\pi}{5} \right) = \operatorname{Re}\left( \frac{\cancel{2\pi i}}{\cancel{2i}} \cdot \frac{\exp(-\pi)(2i-1)}{5} \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{(2x-1)(1+x^2)} dx - \frac{8\pi}{5} = \frac{\exp(-\pi)}{5}.$$

~~gevonden~~

=

Hoe moet je het stuk van $-\infty$ tot 0 behandelen? want we zoeken $\int_{0}^{+\infty}$

meromorf op $\mathbb{C}$ zonder strip of singu op $\Gamma$.
→ eenvoudig

**3.1.24:** geg: $W(f(\Gamma_+), 0)$
$W(g(\Gamma_+), 0)$

$W((f \cdot g)(\Gamma_+), 0)$?

mag want als $f$ en $g$ mero ook $f \cdot g$ mero

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{(f \cdot g)'}{f \cdot g} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{f' g}{f g} + \frac{f g'}{f g} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{f' \cancel{g}}{f \cancel{g}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{g' \cancel{f}}{\cancel{f} g} dz$$

$$= W(f(\Gamma_+), 0) + W(g(\Gamma_+), 0)$$

**3.1.25:** Stel: $f$ meromorf op $\Omega$ → open $\subseteq \mathbb{C}$
$f \neq 0$

TB: $\frac{1}{f}$ is meromorf.

Bew: De vraag is eigenlijk of $\frac{1}{f}$ holomorf is buiten in de nulpunten van $f$ wat per definitie geldt wegens opdracht 1.5.7.

**3.1.26:**

~~We bekijken een veelterm van graad 2 hogere graden kunnen we schrijven als een som/product van een tweede orde plus nog een paar ander, wat dus al niet meer ingeschreven is~~

3.1.26:

Stel $f$ is van graad 2 of meer

~~$f(z) = az^2 + bz + \ldots$~~

3.1.22: $f$ is injectief $\Leftrightarrow$ $f' \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$f'(z)$ ~~[illegible]~~ mag dus geen nulptn hebben. Wat wil zeggen dat $f'$ constant moet zijn, (en $\neq 0$) is want niet hun want dan was $f$ cte of 0 wat niet van graad 2 is.

Wat enkel kan als
Als $f(z)$ een veelterm is van graad 1. $\square$

3.1.27: $f$ heeft pool $z_0$

$\Longrightarrow$ $\frac{1}{f}$ een nulpunt in $z_0$

Als $z_0$ een meervoudig nulpunt zou zijn dan is $\left(\frac{1}{f}\right)'\Big|_{z=z_0} = 0$ en is de functie dus niet injectief. wegens 3.1.22

3.1.28:

1) Aangezien $f$ holomorf is op de doorprikte omgeving van $f_0$ is $f_0$ een geïsoleerde singulariteit voor $f$.

Aangezien $g$ holomorf is in $z_0$ zal zijn afgeleide ook bestaan in $z_0$ en is het dus zeker geen geïsoleerde sing. voor $g'$

voor $z_0$

$f(g(z)) \cdot g'(z)$ zal een geïsoleerde sing zijn, want hij is er voor $f(g(z))$ en $g'(z)$ gedraagt zich gewoon goed in dat punt, dus zal de sing van $f(g(z))$ niet ongedaan maken.

2)

transformatie v.d. contour

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(S(z)) \cdot S'(z)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} f(S(z)) \cdot S'(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(S_0,r)} f(z)\, dz \cdot m$$

wegens st. 3.1.15.

$$= m \operatorname{res}_{z=S_0} f(z)$$

3.1.29

1) Stel: $\lim_{z\to\infty} f(z) = c$

$\Leftrightarrow f(\lim_{z\to\infty} z) = c$ } continuiteit van $f$.

$\Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} z = f^{-1}(c)$ → moet $\infty$ zijn

Beschouw $B := B(c, R)$ $R > 0$

Pas Weierstrass toe op $f^{-1}$.

$\Rightarrow f^{-1}$ bereikt een max op $B$ ⚡

want $f^{-1}$ gaat naar $\infty$ binnen die bal.

2)

$f$ is holomorf.

$\Leftrightarrow f(z) = \sum_n a_n (z - z_0)^n$

, maar als $f$ een graad heeft van meer dan 2 is $f$ niet meer injectief. (3.1.26)

$\Rightarrow f(z) = ax + b$

voor zekere $a$ en $b$

**3.2.7** geg: $f, g$ continu op $K$
$f, g$ holomorf op $K \setminus \partial K$
$f = g$ op $\partial K$

TB: $f = g$ op heel $K$

Bw:

Beschouw $h(z) = f(z) - g(z)$
↳ continu op $K$
↳ holomorf op $K \setminus \partial K$
↳ $h = 0$ op $\partial K$

Het maximum dat $h, f, g$ bereiken op de rand is hetzelfde als hun maximum binnen de bol wegens het maximum principe.

Stel: $h$ bereikt max in $z_0$ ($z_0$ ligt dus op de rand)

$$\forall z \in K : |h(z)| \leq |h(z_0)| = |f(z_0) - g(z_0)| = 0$$ (↳ zijn gelijk op de rand)

$\Rightarrow |h(z)| \leq 0 \quad \forall z \in K$

$\Rightarrow h(z) = 0 \quad \forall z \in K$

$\Rightarrow g(z) = f(z) \quad \forall z \in K$

$\Rightarrow g = f$.

**3.2.8**:

geg: $f$ holomorf op $\Omega \subseteq \mathbb{C}$
$(\exists c > 0)(\forall z \in \Omega)(|f(z)| = c)$.

Bw: $\Rightarrow |f|$ bereikt dus een maxi want $|f(z)| \leq c \ \forall z$.

max. principe $\Rightarrow f$ is constant.

## 3.2.10:

geg: $f$ holomorf op $B(0,1)$
$|f(z)| \leq |f(z^2)| \ \forall z \in B(0,1)$

TB: $f$ is constant.

Bw:

Stel: $|f|$ bereikt geen maximum
$$\underbrace{(\forall z_i \in B(0,1))(\exists z_{i+1} \in B(0,1))(|f(z_i)| \leq |f(z_{i+1})|)}$$

$(\forall z \in B(0,1))(z^2 \in B(0,1)$ met $|z| \geq |z^2|)$.

$$|f(z_1)| \leq |f(z_2)|$$
$$\leq |f(z_2^2)| \leq |f(z_3)|$$
$$\leq (\ldots) \leq |f(0)| \leq |f(0^2)|$$

↳ Je $z_i$ komt 'dichter' bij 0 naarmate dat je verder gaat

$\Rightarrow |f|$ heeft een maximum. ($|f(0)|$ $\not\exists$

$\Rightarrow |f|$ bereikt dus een maximum binnen een open verzameling;

Stel max principe
$\Rightarrow f$ is constant

## 3.2.11:

$f$ is holomorf binnen $\overline{B(0,1)}$

max principe $\Rightarrow |f|$ bereikt een maximum, waarbij dat max in $\partial B(0,1)$ ligt. (noem $z_0$)

$\Rightarrow |f(z)| \leq |f(z_0)|$, waar $|z_0| = 1$

Stel je max ligt in de boven helft van de bol

$|f(z)| \leq |f(z_0)| \leq M \quad \forall z$.

en $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ $\leq N$. z op onderste rand.

Als dit is

$\Rightarrow |f(z_0)| \leq N$ of $N \leq |f(z_0)|$

$\Rightarrow$ Dan zit je vast

maar wat als dit?

$|f(0)| \leq |f(z_0)| \leq M$ (1)
$|f(0)| \leq |f(z_0)| \leq N$ (2)
(1),(2) $\Rightarrow |f(0)| \cdot |f(0)| = M \cdot N$
$\Rightarrow |f(0)| = \sqrt{M \cdot N}$

8.2 12)

geg: $f$ holomorfe : $B(0,1) \to B(0,1)$
$\text{mult}_{z=0} f(z) \geq 1$.

1) TB: $|f(z)| \leq |z|^n$ $\forall z \in B(0,1)$.

Bw:

Stel: $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^n}$

Beschouw $g$ op een bol $B := B(0,R)$ met $R < 1$.

$\Rightarrow |g(z)|$ heeft een max op de rand van $B$.

$\Rightarrow |g(z)| \leq \max_{|z|=R} |g(z)|$.

$= \max_{|z|=R} \left|\dfrac{f(z)}{z^n}\right| \leq \dfrac{1}{R^n}$ *

* $f$ het beeldt van $f$ ligt in $B(0,1)$
$\Rightarrow |f(z)| \leq 1$ $\forall z \in B(0,1)$

Laat $R \to 1$.

$\Rightarrow |g(z)| \leq 1 \Rightarrow \dfrac{|f(z)|}{|z^n|} \leq 1$.

$\Rightarrow |f(z)| \leq |z|^n$.

2) Als $|f(z)| = |z|^n$.

$\Rightarrow |g(z)| = 1 = |c|$ met $|c| = 1$.

$\Rightarrow g$ bereikt een maximum op heel $B(0,1)$

$\Rightarrow g$ is constant.

$\Rightarrow g(z) = c$

$\Rightarrow f(z) = cz^n$