

Inleiding tot de Sterrenkunde

Robin Vandaele
2de Bachelor Wiskunde
Universiteit Gent



Deze cursus is een (licht bewerkte)¹ eerste editie en staat bijgevolg waarschijnlijk vol met spellingsfouten, typfouten en mogelijk ook inhoudsfouten. U zou er bij deze best nooit aan beginnen. Indien u de uitdaging toch aandurft kunnen deze fouten steeds gemeld worden aan Robin.Vandaele@UGent.be.

¹Mede dankzij mijn goede copain Alexandro Fulco.

Voorwoord

Deze cursus is gebaseerd op het boek *Fundamental Astronomy Fifth Edition* van een hele leute schrijvers die ik nu niet allemaal ga opnoemen. De onderwerpen die behandeld worden in deze cursus komen volledig overeen met de mogelijke vragen die men kon verwachten op het theorie-examen 2012-2013 van het vak Inleiding tot de Sterrenkunde dat gegeven wordt in de 2de Bachelor Wiskunde en de 2de Bachelore Fysica en Sterrenkunde aan de Universiteit van Gent.

Leren is niet tof. Zij die zeggen dat ze het graag doen, liegen. Zij die niet liegen, beseffen het gewoon nog niet dat ze liegen. Als er dan nog een of andere flauwe plezanten een Engelse boek van 500 pagina's in je handen stopt is het helemaal om zeep. Ok, je hoeft niet alle hoofdstukken te kennen, maar het is nu eenmaal een feit dat studeren toch wel een stuk gemakkelijker gaat in je eigen moedertaal, dat is dan ook de taal waar je in denkt niet? Alé ik toch, ik zou weer een uitzondering kunnen zijn natuurlijk, maar wat dit betreft denk ik van niet. Ook al heeft het grootste deel van de huidige jeugdige generatie weinig moeite met Engels, is er nog een groot verschil tussen het verstaan van een Engelse film en het omgaan met Engelse vakterminologie. *A solid angle* is nu eenmaal een ruimtehoek en geen vaste hoek. Het is misschien een belachelijk simpel voorbeeld, maar het boek *Fundamental Astronomy* bestaat nu eenmaal niet uit verhaaltjes voor het slapengaan, maar staat vol met vakterminologie uit de fysica en astronomie die niet altijd letterlijk vertaald mag worden. Dit zorgt er dan ook voor dat studeren in een andere taal iets tijdrovender is dan in je eigen taal, omdat je in je hoofd alles moet trachten juist te interpreteren.

En dan nog iets. Hoeveel kost dit boek, een euro of 50-60? Dan denk je van oh sterrenkunde, en zo'n dik boek dan nog... Dat staat zeker en vast vol met mooie prentjes! Wel... nope... De prentjes zijn nog zwartwiter dan het resultaat na 4 tot 5 maanden² van een dronken nachtje overpoort tussen een reuzenpanda en een humboldtpinguïn. Dan is de kaft wel in kleur, en zetten ze er nog zo'n lelijke satelliet op ook. Vervolgens zetten ze er een jeep voor om de satelliet zeer imposant en indrukwekkend over te laten komen omdat deze zo reusachtig lijkt ten opzichte van de jeep. Wel beste heren ik moet die satelliet niet hebben. Zet er een afbeelding van een zwart gat op, een supernova, een galaxie, sterretjes, al is het maar de aardbol gezien vanuit de ruimte... Maar toch geen mottige grauwe satelliet?

Nu, ik wil jullie zeker niet tegenhouden om met behulp van het boek te studeren. Je kan er alleen maar uit leren. Het is eens iets anders om in een andere taal te leren en het zal je algemene intelligentie zeker niet schaden. Lukt het toch echt niet, dan hoop ik dat deze cursus jullie toch een beetje kan helpen. In tegenstelling tot andere vraag-antwoord cursussen die ik tegengekomen ben, heb ik zoveel mogelijk men best gedaan om meer informatie te geven dan het antwoord alleen. Ook formules die nodig waren om bepaalde vragen te kunnen oplossen heb ik zoveel mogelijk proberen afleiden, ook al behoren ze niet tot het antwoord op de betreffende of een andere vraag. Ook heb ik zoveel mogelijk van de terminologie toch op z'n minst ergens in de cursus te proberen definiëren. Ik heb

²Het vrouwtje van de reuzenpanda is vier tot vijf maanden drachtig, wat relatief kort is voor beren van een dergelijke grootte. De exacte draagtijd loopt uiteen van 112 tot 163 dagen.

proberen alles zo goed mogelijk te vertalen en niet zuiver en alleen maar een letterlijke vertaling te geven. Dit vereiste natuurlijk af en toe nogal wat opzoekingswerk maar aan bronvermelding doe ik niet mee. Ik ben daar veel te tam voor. Maar alvast een dikke merci aan Wikipedia. Daarentegen heb ik niet steeds een correcte vertaling kunnen vinden zoals die gebruikt wordt in de Nederlandse vakterminologie, en heb ik af en toe toch wel iets letterlijker moeten vertalen.

Ook moet er geweten zijn dat niet alle formules in het boek worden afgeleid maar soms ook gewoon gegeven worden, wat ik dan natuurlijk ook moeten doen heb. Het voordeel van de fysica is dat er zeer veel formules reeds experimenteel en/of theoretisch zijn bepaald en wij daar nu in volle glorie gebruik van kunnen maken. Het nadeel dat dit teweeg brengt is dat er sommige mensen zijn die dan ook verwachten dat wij er hier wel een aantal vanbuiten kennen. Zoniet zouden we soms wel een keer geïjost kunnen zijn als we een formule moeten afleiden startende van een van deze formules die we uit het hoofd moesten kennen.

De manier waarop deze cursus is opgesteld heeft als voordeel dat naast de antwoorden op de vragen puur vanbuiten leren je de antwoorden ook waarschijnlijk beter zal kunnen begrijpen dan bij de gemiddelde vraag-antwoord cursus die ik doornam. Een nadeel is natuurlijk dat het teveel aan informatie een beetje vereist dat je selectief zal moeten zijn met hetgeen dat je vanbuiten zal leren en hetgeen niet, en hetgeen waarvan je denkt dat het bij het antwoord op de vraag hoort en hetgeen niet. Indien ik additionele informatie geef of afleidingen tot formules die je nog nodig zal hebben, maar waarvan ik denk dat dit waarschijnlijk niet bij het antwoord op de vraag hoort, dan heb ik dit steeds aangegeven met een grijs lettertype.

Voor de taalpuristen onder jullie, ik heb zoveel mogelijk het gebruik van 'zijn/haar' proberen vermijden en gebruik in de plaats het lekker oubollige 'diens'. Want ik vind het Nederlands ook een kuttaal op dat vlak en ga me daar nu echt niet mee bezighouden om constant een correct onderscheid te maken in het geslacht van een woord. Ook wat betreft Zon of zon, en Aarde of aarde, het is allemaal met een kleine letter voor mij, ik ga er echt niet te lang bij stilstaan. Ook heb ik Jupiter consequent Jupiler genoemd, maar dit enkel en alleen maar omdat ik kinderachtig ben.

Verder wil ik nog even laten weten dat Robin & Co een armzalig eenmansbedrijfje is. Indien u deze cursus ook maar voor het minste gebruikt heeft en hem toch ergens voor handig vond, aanvaarden wij zeker en vast altijd vrijblijvende donaties. Maar zeker geen geld, geld maakt niet gelukkig. Alcohol daarentegen, alcohol maakt gelukkig. Komt u mij tegen in de Overpoort mag u mij bij deze altijd verrassen met het aanbieden van een goed fris pintje, ik zal het niet afstaan.

Met vriendelijke groeten,
Robin Konijn Vandaele.

Vragen Hoofdstuk 2

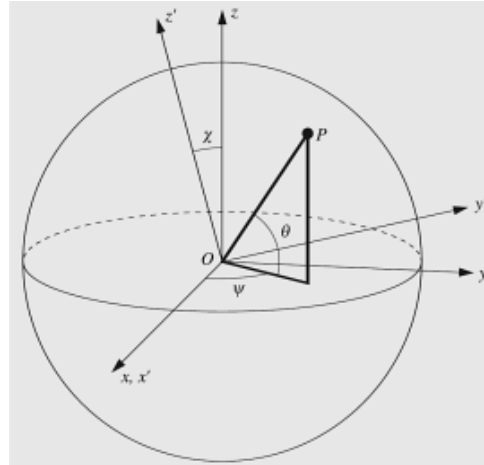
Type I

Definieer **Z**, **P** en de meridiaan. Definieer vervolgens horizon coördinaten en lokale equatoriale coördinaten. Maak daartoe een behoorlijke schets, en leid de transformatieformules af.

HET PUNT P

De positie van een punt **P** op een eenheidssfeer wordt uniek bepaald door twee gegeven hoeken. De hoek ψ wordt tegen de klok in gemeten, vanaf de positieve x -as volgens het xy -vlak; de andere hoek θ staat voor de hoekafstand vanaf het xy -vlak. De rechthoekige coördinaten van het punt **P** in functie van deze hoeken zijn:

$$\begin{aligned}x &= \cos \psi \cos \theta, \\y &= \sin \psi \cos \theta, \\z &= \sin \theta.\end{aligned}$$



HET PUNT Z

Het punt juist boven de waarnemer aan de hemelsfeer wordt het *zenit* (**Z**) genoemd en het punt dat hiermee antipodaal is, dus het punt juist onder de waarnemer, wordt het *nadir* (N) genoemd.

DE MERIDIAAN

Grote cirkels³ die doorheen het zenit gaan worden *verticalen* genoemd.

Wanneer men de beweging van een ster op de hemelsfeer in de loop van een nacht observeert, zal de waarnemer ondervinden dat deze een specifieke baan volgt. Sterren komen op in het oosten, culmineren (bereiken hun toppunt) op de verticale Noord-Zenit-Zuid (NZS), en gaan onder in het westen. Zo wordt dus de verticale NZS gedefinieerd, deze wordt de *meridiaan* genoemd. Noord en Zuid richtingen worden gedefinieerd als de snijpunten van de meridiaan met de horizon.

HORIZON COÖRDINATEN

Het meest natuurlijke coördinatenstelsel door het oog van de waarnemer is het *horizontaal coördinatenstelsel*. Deze heeft als referentievlak het raakvlak aan de aarde die door de waarnemer gaat. Dit horizontaal vlak snijdt de hemelsfeer volgens de *horizon*. Alle verticalen snijden loodrecht met de horizon.

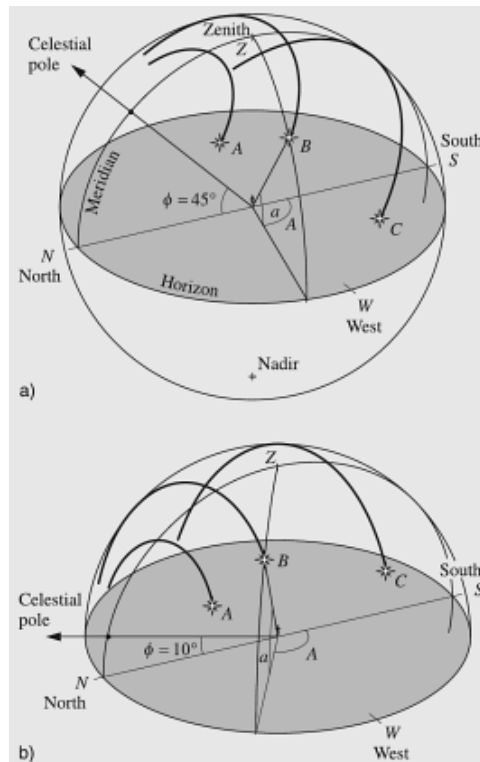
³Grote cirkels zijn cirkels die de snijlijn zijn van een sfeer met een vlak doorheen het middelpunt van de sfeer.

De eerste coördinaat van dit coördinatenstelsel is de **hoogte**, a , deze wordt gemeten vanaf de horizon tot aan het object volgens de verticale doorheen het object. De hoogte ligt binnen het bereik $[-90^\circ, +90^\circ]$; en is positief voor objecten boven de horizon en negatief voor objecten onder de horizon. De **zenitafstand**, of dus de hoek tussen het object en de zenit, is duidelijk

$$z = 90^\circ - a.$$

De tweede coördinaat is het **azimut**, A ; deze is de hoekafstand tot de verticale doorheen het object vanaf het zuiden, met de klok mee naar het noorden toe gemeten.

De horizon coördinaten zijn afhankelijk van de tijd en van de positie van de waarnemer, bijgevolg kunnen ze bijvoorbeeld niet gebruikt worden in sterrencatalogi.



EQUATORIALE COÖRDINATEN

De richting van de rotatie-as van de aarde blijft zo goed als constant en dus ook het vlak loodrecht op deze as: het equatoriaal vlak. Zodus is het equatoriaal vlak een geschikt referentievlak voor een coördinatenstelsel dat onafhankelijk is van de tijd en van de positie van de waarnemer.

De doorsnede van de hemelsfeer en het equatoriaal vlak is een grote cirkel, deze wordt de *evenaar van de hemelsfeer* genoemd. De noordpool van de hemelsfeer is één van de polen die met deze grote cirkel correspondeert. Het is ook het punt in de noordelijke hemel waar de uitbreiding van de rotatie-as van de aarde de hemelsfeer snijdt. De meridiaan (reeds gedefinieerd bij de horizon coördinaten) gaat altijd door de noordpool; en wordt door de pool in een noord- en zuidmeridiaan verdeeld.

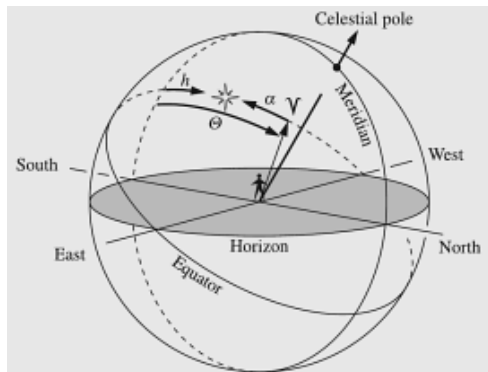
De hoekafstand van het equatoriaal vlak tot een ster wordt niet beïnvloed door de rotatie van de aarde. Deze hoek wordt de **declinatie** δ genoemd, en is een eerste coördinaten in ons equatoriale coördinatenstelsel.

Sterren blijken iedere dag eenmaal de pool te omwentelen. Om de tweede coördinaat goed te definiëren moeten we opnieuw instemmen met een vaste richting die niet beïnvloed wordt door de rotatie van de aarde. Vanuit een wiskundig standpunt maakt het niet uit welk punt men op het evenaarsvlak hiervoor zou nemen, maar voor latere doeleinden is het beter dat een punt genomen wordt die een aantal waardevolle eigenschappen bezit. Dit punt wordt het *lentepunt* genoemd (zie verder). Het bevond zich vroeger in het sterrenbeeld Ram en wordt dan ook genoteerd met het symbool van dit sterrenbeeld: Υ . Nu kunnen we de tweede coördinaat definiëren als de hoek vanaf het lentepunt gemeten

langs de evenaar. Deze hoek is de **rechtse stijging** α van het object, en wordt tegen de klok in gemeten vanaf Υ .

Aangezien de declinatie en rechtse stijging onafhankelijk zijn van de positie van de waarnemer en de bewegingen van aarde kunnen deze wel gebruikt worden bij sterrenkaarten en -catalogi.

Omdat de zuidmeridiaan een goed gedefinieerde lijn aan de hemel is, wordt ze gebruikt om een lokale coördinaat vast te leggen die correspondeert met de rechtse stijging. De *uurhoek* wordt met de klok mee vanaf de zuidmeridiaan gemeten volgens de evenaar.



De uurhoek van een object is geen constante, maar neemt toe met een vaste snelheid, omwille van de rotatie van de aarde. De uurhoek van het lentepunt wordt de *sterrentijd* Θ genoemd. Voor ieder object geldt dat

$$\Theta = h + \alpha,$$

met h de uurhoek van het object en α diens rechtse stijging.

Aangezien de uurhoek en de sterrentijd met een constante snelheid variëren in de tijd, is het praktisch om ze uit te drukken met tijd als eenheid. Ook de nauw verwante rechtse stijging wordt gewoonlijk uitgedrukt in tijd. Zo staat 24 uur gelijk aan 360 graden, 1 uur = 15 graden, 1 minuut in tijd = 15 boogminuten, en zo verder. Al deze hoeveelheden bevinden zich binnen het bereik $[0 \text{ h}, 24 \text{ h}]$.

TRANSFORMATIEFORMULES

Zoals in het geval van vlakke driehoeken, kunnen we verbanden afleiden tussen de zijden en de hoeken van sferische driehoeken. De eenvoudigste manier om dit te doen is om bepaalde coördinatentransformaties te onderzoeken.

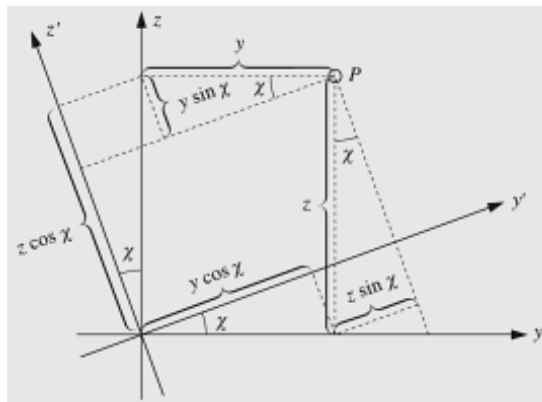
Veronderstel dat we twee rechthoekige coördinatenstelsels $Oxyz$ en $Ox'y'z'$ hebben, zodanig dat het $x'y'z'$ -stelsel verkregen wordt door het xyz -stelsel te roteren over de x -as volgens een hoek χ .

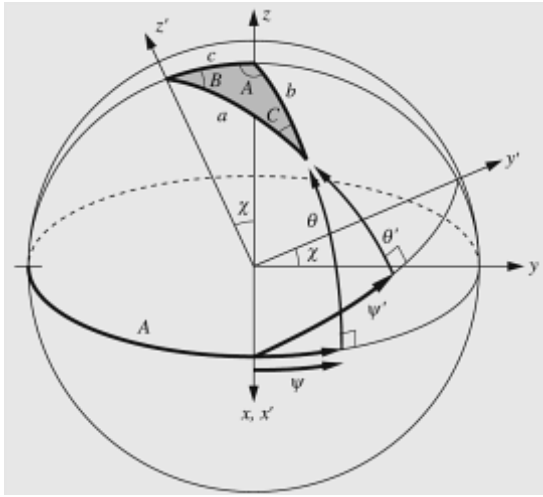
Als coördinaten voor het punt P in de respectievelijke stelsels hebben we:

$$\begin{aligned} x &= \cos \psi \cos \theta, & x' &= \cos \psi' \cos \theta', \\ y &= \sin \psi \cos \theta, & y' &= \sin \psi' \cos \theta', \\ z &= \sin \theta, & z' &= \sin \theta'. \end{aligned}$$

We weten ook dat de coördinaten met een accent uit de oorspronkelijke kunnen verkregen worden d.m.v. een rotatie in het yz -vlak:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos \chi + z \sin \chi, \\ z' &= -y \sin \chi + z \cos \chi. \end{aligned}$$





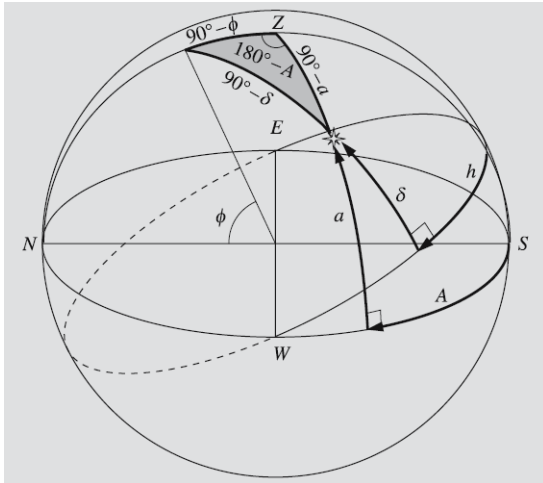
Substitueren we de uitdrukking voor de rechtehoekige coördinaten, dan hebben we

$$\begin{aligned}\cos \psi' \cos \theta' &= \cos \psi \cos \theta, \\ \sin \psi' \cos \theta' &= \sin \psi \cos \theta \cos \chi + \sin \theta \sin \chi, \\ \sin \theta' &= -\sin \psi \cos \theta \sin \chi + \sin \theta \cos \chi.\end{aligned}$$

Om deze formules toe te passen op de transformatie tussen de horizon en de equatoriale coördinatenstelsels stellen we

$$\begin{aligned}\psi &= 90^\circ - A, \quad \theta = a, \\ \psi' &= 90^\circ - h, \quad \theta' = \delta \quad \chi = 90^\circ - \phi.\end{aligned}$$

Waarbij de hoek ϕ in deze laatste vergelijking de hoogte is van de hemelpool, of nog, de breedteligging van de waarnemer.



Als we deze substitutie invoeren krijgen we

$$\begin{aligned}\sin h \cos \delta &= \sin A \cos a, \\ \cos h \cos \delta &= \cos A \cos a \sin \phi + \sin a \cos \phi, \\ \sin \delta &= -\cos A \cos a \cos \phi + \sin a \sin \phi.\end{aligned}$$

Voor de inverse transformatie stellen we

$$\begin{aligned}\psi &= 90^\circ - h, \quad \theta = \delta, \\ \psi' &= 90^\circ - A, \quad \theta' = a \quad \chi = -(90^\circ - \phi),\end{aligned}$$

waaruit

$$\begin{aligned}\sin A \cos a &= \sin h \cos \delta, \\ \cos A \cos a &= \cos h \cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi, \\ \sin a &= \cos h \cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi.\end{aligned}$$

Definieer P, K en het ware lentepunt. Definieer vervolgens absolute equatoriale coördinaten en ecliptische coördinaten. Maak daartoe een behoorlijke schets, en leid de transformatieformules af.

HET PUNT P

Zie de vorige Type I vraag.

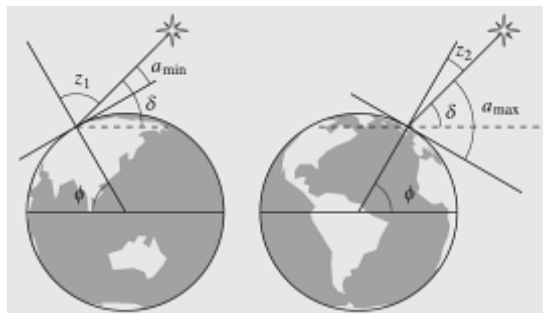
HET WARE LENTEPUNT

In het voorjaar lijkt het alsof de zon van de zuidelijke hemisfeer naar de noordelijke hemisfeer toe beweegt. Het tijdstip dat deze opmerkelijke gebeurtenis plaatsvindt, alsook de richting naar de zon op dat moment, wordt het lentepunt genoemd. Het **ware lentepunt** volgt rechtstreeks uit de waarnemingen. Daarnaast is er nog een *gemiddeld lentepunt*, wat de positie van het lentepunt zou zijn indien er geen nutatie (zie verder) van de aarde zou plaatsvinden.

ABSOLUTE EQUATORIALE COÖRDINATEN

We zullen nu kort bestuderen hoe het (δ, α) -stelsel door waarnemingen kan vastgelegd worden. Veronderstel dat men een circumpolaire ster observeert op diens boven- en benedenculminatie⁴, met $a_{\max} = 90^\circ - \phi + \delta$ en $a_{\min} = \delta + \phi - 90^\circ$. Wanneer we deze twee vergelijkingen optellen krijgen we

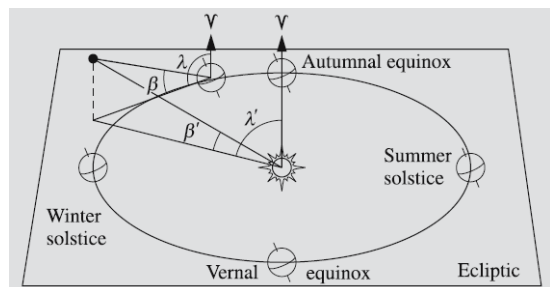
$$\delta = \frac{1}{2}(a_{\min} + a_{\max}).$$



We krijgen dus dezelfde waarde voor de declinatie, onafhankelijk van de locatie van de waarnemer. Zodus kunnen we het gebruiken als één van de absolute coördinaten. Met dezelfde waarnemingen kunnen we ook de richting van de hemelpool alsook de breedteligging van de waarnemer bepalen⁵. Hierna kunnen we de declinatie van ieder object bepalen door diens afstand vanaf de pool te meten.

De evenaar kan nu gedefinieerd worden als de grote cirkel waarvan alle punten zich op een afstand van 90° van de pool bevinden. Het nulpunt van de tweede coördinaat (rechtse stijging) kan dan gedefinieerd worden als het punt waar de evenaar lijkt te kruisen van het zuiden naar het noorden toe.

ECLIPTISCHE COÖRDINATEN



Het baanvlak van de aarde, de *ecliptica*, is een referentievlak voor nog een ander belangrijk coördinatenstelsel. Het punt **K** staat voor de pool van de ecliptica. De ecliptica kan ook gedefinieerd worden als de grote cirkel op de hemelsfeer die door de zon wordt beschreven in de loop van één jaar. Dit stelsel wordt gewoonlijk gebruikt voor planeten en andere hemellichamen

van het zonnestelsel. De oriëntatie van het equatoriaal vlak van de aarde blijft invariant onder de jaarlijkse beweging van de aarde. Op het moment van het lentepunt is zowel de rechtse stijging als de declinatie van de zon gelijk aan nul. Het equatoriaal vlak en de ecliptica snijden in een rechte die rechtstreeks in de richting van het lentepunt wijst. Zo kunnen we deze richting gebruiken als het nulpunt voor zowel het equatoriaal als het ecliptisch coördinatenstelsel.

De *ecliptische breedtegraad* β is de hoekafstand vanaf de ecliptica; het bevindt zich in het bereik $[-90^\circ, 90^\circ]$. De andere coördinaat is de *ecliptische lengtegraad* λ , tegen de klok in gemeten vanaf het lentepunt volgens de ecliptica.

⁴De definitie van een circumpolaire ster en de afleiding van deze formules worden gegeven in de tweede type II vraag van hoofdstuk 2.

⁵Wegens de nu gekende δ en de waargenomen a_{\min} of a_{\max} kan men via een substitutie de breedteligging ϕ bepalen, of men kan ϕ bepalen op een analoge manier als waarop δ werd bepaald. Zoals verder nog gezien zal worden correspondeert ϕ ook met de richting van de hemelpool.

TRANSFORMATIEFORMULES

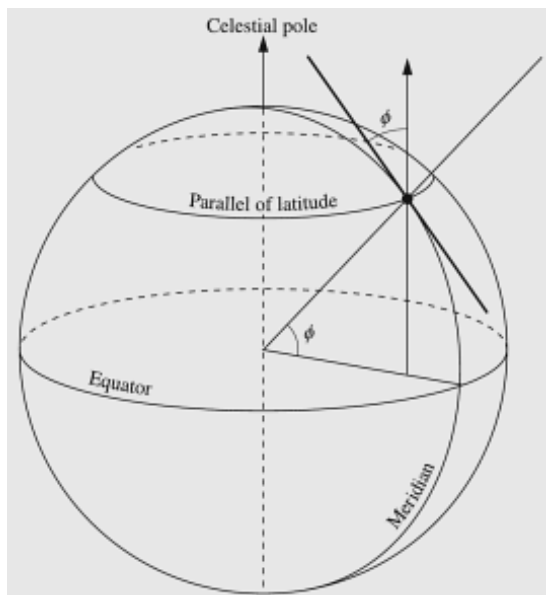
De transformatieformules tussen het equatoriale en ecliptische coördinatenstelsel kunnen analoog als eerder worden afgeleid:

$$\begin{aligned} \sin \lambda \cos \beta &= \sin \delta \sin \epsilon + \cos \delta \cos \epsilon \sin \alpha, \\ \cos \lambda \cos \beta &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \sin \beta &= \sin \delta \cos \epsilon - \cos \delta \sin \epsilon \sin \alpha, \\ \\ \sin \alpha \cos \delta &= -\sin \beta \sin \epsilon + \cos \beta \cos \epsilon \sin \lambda, \\ \cos \alpha \cos \delta &= \cos \lambda \cos \beta, \\ \sin \delta &= \sin \beta \cos \epsilon + \cos \beta \sin \epsilon \sin \lambda. \end{aligned}$$

Hier is ϵ gelijk aan de *helling van de ecliptica*, of de hoek tussen het equatoriale vlak en de ecliptica. Deze hoek heeft een waarde van ongeveer $23^{\circ}26'$.

Type II

Definieer geografische/geodetische breedte en geocentrische breedte en leid de relatie tussen beide af.



Met de *breedte* op aarde wordt gewoonlijk verondersteld dat de **geografische breedte** bedoeld wordt, dit is de hoek tussen de loodlijn en het evenaarsvlak. De breedte is positief op het noordelijk halfrond en negatief op het zuidelijk halfrond. De geografische breedte kan bepaald worden d.m.v. astronomische observaties: de hoogte van de hemelpool⁶ gemeten vanaf de horizon is gelijk aan de geografische breedte.

Omdat de aarde roteert, is ze lichtjes afgeplat. De exacte vorm is redelijk ingewikkeld, maar voor de meeste doeleinden kan het benaderd worden door een aan de polen afgeplatte sferoïde, waarvan de korte as samenvalt met de rotatie-as. In 1979 werd het Geodetisch Referentie Systeem

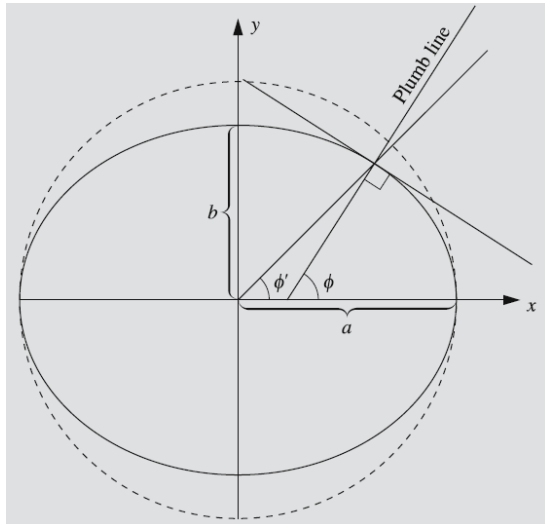
1980 (GRS-80) aangenomen. De GRS-referentie ellipsoïde heeft de volgende dimensies:

$$\begin{aligned} \text{equatoriale straal} & a = 6,378,137 \text{ m}, \\ \text{polaire straal} & b = 6,356,752 \text{ m}, \\ \text{afplatting} & f = (a - b)/a = 1/298.2572210. \end{aligned}$$

⁶De hemelpool is het punt waar de rotatie-as van de aarde en de oneindig verafgelegen hemelsfeer snijden.

De vorm bepaald door het oppervlak van de oceanen, de *geoïde* genoemd, verschilt ten hoogste ongeveer 100 m van deze sferoïde.

De hoek tussen de evenaar en de normaal op de ellipsoïde die de ware vorm van de aarde benadert wordt de **geodetische breedte** genoemd. Omdat het oppervlak van een vloeistof (zoals een oceaan) altijd loodrecht staat op de loodlijn, zijn de geodetische en geografische breedtes praktisch gelijk.



Wegens de afplatting wijst de loodlijn niet naar het centrum van de aarde, tenzij aan de polen of aan de evenaar. De **geocentrische breedte** ϕ' , een hoek die overeenkomt met de gewone sferische coördinaten⁷, is daarom iets kleiner dan de geografische breedte ϕ .

We leiden nu de vergelijking tussen de geografische breedte ϕ en de geocentrische breedte ϕ' af, in de veronderstelling dat de aarde een afgeplatte sferoïde is en de geografische en geodetische breedtes gelijk zijn. De vergelijking van de ellips langsheen de meridiaan is

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De richting van de raaklijn aan de ellips in een punt (x, y) wordt gegeven door dy/dx . De richting van de normaal aan de ellips in een punt (x, y) wordt dus gegeven door $-dx/dy$, we hebben

$$\frac{2x dx}{a^2} + \frac{2y dy}{b^2} = 0,$$

de richting van de normaal aan de ellips in een punt (x, y) wordt dus gegeven door

$$\tan \phi = -\frac{dx}{dy} = \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x}.$$

De geocentrische breedte wordt verkregen uit

$$\tan \phi' = y/x.$$

Waaruit

$$\tan \phi' = \frac{b^2}{a^2} \tan \phi = (1 - e^2) \tan \phi,$$

waarbij

$$e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$$

gelijk is aan de excentriciteit van de ellips. Het verschil $\Delta\phi = \phi - \phi'$ bereikt een maximum van 11,5' op breedte 45°.

⁷De geocentrische breedte is de hoek tussen de evenaar en de lijn van het centrum tot een punt op het oppervlak.

Definieer bovensculminatie en benedensculminatie en leid de hoogte af die een ster bereikt in deze gevallen.

De hoogte van een object is het grootst wanneer het zich op de zuidmeridiaan (de boog van de grote cirkel tussen de hemelpolen dat het zenit bevat) bevindt. Op dat moment (genaamd *bovensculminatie*) is de uurhoek van het object gelijk aan $h = 0$ h. Op het moment van *benedensculminatie* is de uurhoek van het object gelijk aan $h = 12$ h. Voor $h = 0$ h, krijgen we (zie eerder)

$$\begin{aligned} \sin a &= \cos h \cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi \\ &= \cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi \\ &= \cos(\phi - \delta) \\ &= \sin(90^\circ - \phi + \delta). \end{aligned}$$

Zodus wordt de hoogte bij bovensculminatie gegeven door

$$\begin{aligned} a_{\max} &= 90^\circ - \phi + \delta, \text{ als het object ten zuiden van het zenit culmineert} \\ a_{\max} &= 90^\circ + \phi - \delta, \text{ als het object ten noorden van het zenit culmineert.} \end{aligned}$$

De hoogte is positief voor objecten met $\delta > \phi - 90^\circ$. Objecten met een declinatie van minder dan $\phi - 90^\circ$ kunnen nooit gezien worden op breedteligging ϕ . Als $h = 12$ h hebben we

$$\begin{aligned} \sin a &= \cos h \cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi \\ &= -\cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi \\ &= -\cos(\delta + \phi) \\ &= \sin(\delta + \phi - 90^\circ). \end{aligned}$$

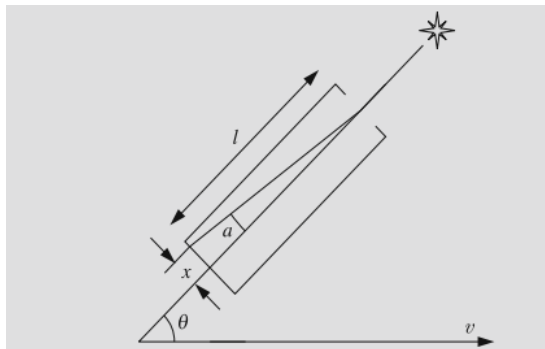
en de hoogte bij benedensculminatie is

$$a_{\min} = \delta + \phi - 90^\circ.$$

Sterren met $\delta > 90^\circ - \phi$ zullen nooit opkomen, dit zijn circumpolaire sterren en zijn het hele jaar door aan de hemel zichtbaar.

Definieer aberratie en leid de formule af. Definieer straalbreking en leid de formule af voor R.

ABBERATIE



Doordat de snelheid van het licht eindig is, zal een waarnemer in beweging een object in de richting van zijn beweging verschoven zien. Deze verandering van de schijnbare richting wordt *abberatie* genoemd.

Stel dat een telescoop gericht staat naar de ware richting van een ster. Het licht heeft een tijd $t = l/c$ nodig om de lengte l van de telescoop af te leggen, waarbij c staat voor de lichtsnelheid.

De telescoop beweegt zich voort met een snelheid v , deze heeft een component $v \sin \theta$ loodrecht op de richting van de lichtstraal, wat men kan zien door de cosinus van de hoek $\pi/2 - \theta$ te nemen. De straal zal met een, ten opzichte van de optische as, verschoven afstand $x = tv \sin \theta = l(v/c) \sin \theta$ de bodem van de telescoop raken. De verandering in richting in radialen is dus $a \approx \tan a = x/l = (v/c) \sin \theta$.

Om de exacte waarde af te leiden hebben we de speciale relativiteitstheorie nodig, maar voor praktische doeleinden volstaat het om deze benaderde waarde te gebruiken

$$a = \frac{v}{c} \sin \theta, \quad [a] = \text{rad},$$

met v de snelheid van de waarnemer, c de lichtsnelheid en θ de hoek tussen de ware richting van het object en de snelheidsvector van de waarnemer.

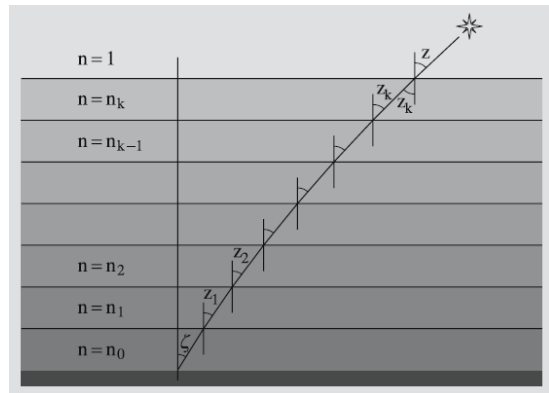
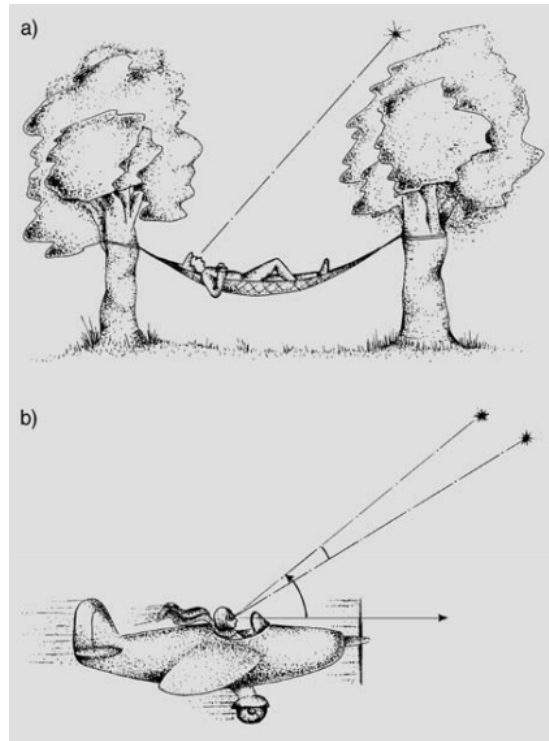
STRAALBREKING

Aangezien licht gebroken wordt door de atmosfeer, wijkt de waargenomen richting van een object af van de ware richting met een maat die afhankelijk is van de atmosferische condities langsheen de gezichtslijn. Deze **breking** varieert met de atmosferische druk en temperatuur en is dus zeer moeilijk om nauwkeurig te voorspellen. Een benadering dat goed genoeg is voor de meeste praktische doeleinden is echter gemakkelijk af te leiden. Indien het object zich niet te ver van het zenit bevindt, kan de atmosfeer tussen het object en de waarnemer benaderd worden door een stapel parallelle vlakke lagen, elk met een bepaalde brekingsindex n_i . Buiten de atmosfeer hebben we dat $n = 1$.

Stel dat de ware zenitafstand z bedraagt en de schijnbare ζ . We maken gebruik van de wet van Snellius. Deze zegt dat wanneer een lichtstraal vanuit een medium met brekingsindex n_1 onder een hoek θ_1 met de normaal op het scheidingsvlak invalt, en in het andere medium breekt met brekingsindex n_2 en een uittreehoek θ_2 heeft, het volgende verband geldt:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{of dus} \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

We verkrijgen dus de volgende vergelijking voor de grenzen van de opeenvolgende lagen:



$$\begin{aligned} \sin z &= n_k \sin z_k, \\ &\vdots \\ n_2 \sin z_2 &= n_1 \sin z_1, \\ n_1 \sin z_1 &= n_0 \sin \zeta, \end{aligned}$$

of dus

$$\sin z = n_0 \sin \zeta.$$

Wanneer de **brekingshoek** $R = z - \zeta$ zeer klein is en uitgedrukt wordt in radialen, hebben we

$$\begin{aligned} n_0 \sin \zeta &= \sin z \\ &= \sin(R + \zeta) \\ &= \sin R \cos \zeta + \cos R \sin \zeta \\ &\approx R \cos \zeta + \sin \zeta. \end{aligned}$$

Zodus hebben we

$$R = (n_0 - 1) \tan \zeta, \quad [R] = \text{rad}.$$

Type III

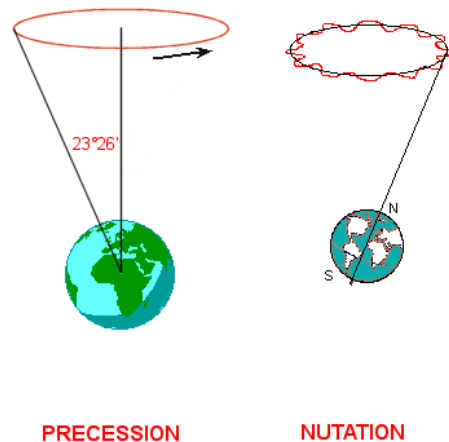
Zeemijl.

Één boogminuut langs de meridiaan wordt een **zeemijl** genoemd. Omdat de krommingsstraal van de aarde varieert met de breedtegraad, zou de lengte van een zeemijl afhankelijk zijn van de breedtegraad. Daarom werd één zijmijl gedefinieerd om gelijk te zijn aan één boogminuut bij een breedtegraad $\phi = 45^\circ$, waaruit $1 \text{ zeemijl} = 1852 \text{ m}$.

Precessie en nutatie.

PRECESSIE

Aangezien de baan van de meeste leden uit ons zonnestelsel dicht bij de ecliptica ligt, hebben ze de neiging om de planetaire afplatting van de aarde er naartoe te trekken. Deze 'afvlakkende' krachtenkoppel is vooral afkomstig van de zon en de maan. Maar wegens de rotatie van de aarde kan het koppel de helling van de evenaar ten op zichte van de ecliptica niet doen veranderen. In de plaats daarvan wendt de rotatie-as van de aarde zich volgens een richting dat loodrecht staat op de as van het koppel. Zo beschrijft de rotatie-as van de aarde een kegel ongeveer één keer in 26.000 jaar. Deze trage omwenteling van de rotatie-as wordt **precessie** genoemd. Vanwege precessie beweegt het lentepunt volgens de ecliptica met een snelheid van ongeveer 50 boogseconden per jaar, zodus stijgt de ecliptische lengtegraad van alle objecten met eenzelfde tempo.



PRECESSION

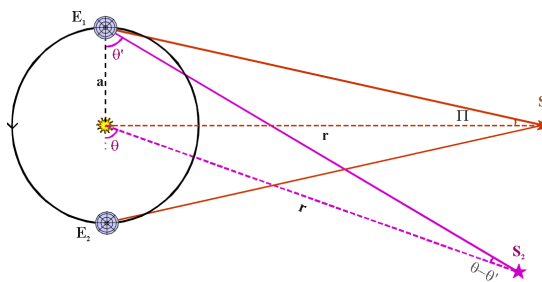
NUTATION

NUTATIE

De baan van de maan maakt een helling ten op zichte van de ecliptica, wat een precessie van het baanvlak van de maan veroorzaakt. Één omwenteling duurt 18,7 jaar, en veroorzaakt gedurende die periode storingen in de precessiebeweging van de aarde. Dit proces, genaamd **nutatie**, verandert zowel ecliptische lengtegraden als de helling van de ecliptica. Dit maakt berekeningen ingewikkelder, maar gelukkig zijn deze storingen veroorzaakt door nutatie relatief klein, slechts fracties van een boogminuut.

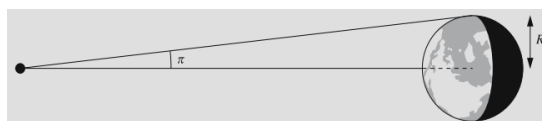
Parallax, dagelijkse parallax en jaarlijkse parallax.

Indien we een object vanuit verschillende punten observeren, zullen we het in verschillende richtingen zien. Het verschil in deze waargenomen richtingen wordt de **parallax** genoemd. De hoeveelheid parallax is afhankelijk van de afstand van de waarnemer tot het object. Hoe dichterbij een voorwerp zich bij de waarnemer bevindt, hoe meer dit verschijnsel opvalt. Dingen die dichterbij liggen lijken door de verandering van kijkrichting meer mee te schuiven dan voorwerpen die verder weg liggen. Voor het oog lijken bijvoorbeeld vanuit een trein of auto ver verwijderde objecten met de waarnemer mee te bewegen. Wegens deze afhankelijkheid tussen de afstand tot een object en de parallax, kan de parallax gebruikt worden om afstanden te meten. De basislijnen die hiervoor gebruikt worden zijn de straal van de aarde en de straal van diens baan, deze zijn voor astronomische doeleinden gemakkelijk te gebruiken en groot genoeg.



Afstanden tot de dichtstbijzijnde sterren kunnen bepaald worden via de **jaarlijkse parallax**, dit is de hoek ingenomen door de straal van de baan van de aarde (de *astronomische eenheid*, AU) gezien vanuit de ster.

Met **dagelijkse parallax** wordt de verandering in richting bedoeld die veroorzaakt wordt door de dagelijkse rotatie van de aarde. Bovenop de afstand tot het object is de dagelijkse parallax ook afhankelijk van de breedtegraad van de waarnemer. Wanneer we het hebben over de parallax van een lichaam in ons zonnestelsel, bedoelen we steeds de hoek ingenomen door de equatoriale straal van de aarde (6378 km), gezien vanaf het object. Dit is gelijk aan de schijnbare verschuiving van het object ten opzichte van de achtergrondsterren, wanneer bekeken door een waarnemer op de evenaar, indien hij/zij het object van de horizon naar het zenit toe ziet bewegen.



Middelbare en schijnbare plaats van een ster aan de hemel.

Wanneer stellaire posities worden weergegeven in stercatalogi, dan zijn dit de **middelbare plaatsen** van de sterren aan de hemel, hiervan zijn de gevolgen veroorzaakt door parallax, abberatie en nutatie verwijderd. De middelbare plaats van de datum (d.i. op het tijdstip

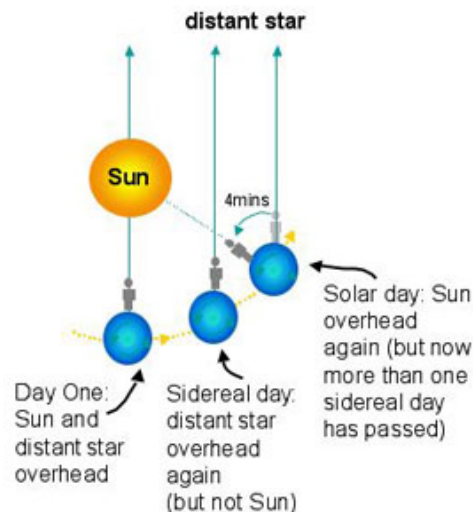
van waarnemen) krijgt men door de middelbare plaats te corrigeren voor de eigenbeweging van de ster⁸ en de precessiebeweging van de aarde. De **schijnbare plaats**, de positie in de ruimte waar een object gezien wordt door de waarnemer, verkrijgt men door dit verder te corrigeren voor nutatie, parallax en abberatie.

Sterrendag en zonnedag en de relatie tussen beide.

Tijdmetingen kunnen worden gebaseerd op de rotatie van de aarde, de baanbeweging rond de zon of op een atomische klok. Hier beschouwen we de sterrentijd en zonnetijd met betrekking tot de rotatie van de aarde.

STERRENDAG

De sterrentijd werd gedefinieerd als de uurhoek van het lentepunt. Een goede basiseenheid is een **sterrendag**, wat de tijd is tussen twee opeenvolgende bovensculminaties van het lentepunt. Na één sterrendag is de hemelsfeer met al diens sterren teruggekeerd naar diens originele positie ten opzichte van de waarnemer. Het verloop van de sterrentijd is even constant als de rotatie van de aarde. Aangezien de rotatiesnelheid continu langzaam afneemt, neemt de duur van een sterrendag toe. Daarbovenop werden er al onregelmatige variaties geobserveerd van de orde van een milliseconde.



Jammer genoeg bestaat de sterrentijd in twee varianten: de gemiddelde en de schijnbare. De *schijnbare sterrentijd* wordt bepaald door het ware lentepunt en volgt dus onmiddellijk uit de waarnemingen.

Wegens de precessie van de aarde neemt de ecliptische lengtegraad van het lentepunt toe met ongeveer 50" boogseconden per jaar. Deze beweging is zeer continu. Nutatie veroorzaakt een meer ingewikkelde schommeling. Het *gemiddeld lentepunt* is de positie waar het lentepunt zich zou bevinden indien er geen nutatie zou plaatsvinden. De *gemiddelde sterrentijd* is de uurhoek van het gemiddeld lentepunt.

ZONNEDAG

Na één sterrendag is de aarde bijna één graad volgens diens baan verschoven. Daarom moet de aarde bijna één graad verder roteren opdat de zon opnieuw zou culmineren. Een **zonnedag** is daarom 3 min 56.56 s (sterrentijd) langer dan een sterrendag. Dit betekent dat het begin van een sterrendag eenmaal de klok rondgaat gedurende het verloop van één jaar. Na één jaar zijn sterrentijd en zonnetijd terug in fase. Het aantal sterrendagen is één meer dan het aantal zonnedagen in een jaar.

⁸De eigenbeweging van een ster is de verplaatsing van die ster aan de hemel, ten opzichte van de achtergrondsterren.

Wanneer we het hebben over rotatietijden van planeten, hebben we het meestal over de sterrentijd. De duur van een dag, aan de andere hand, betekent de rotatietijd ten opzichte van de zon. Indien de periode van de baan rond de zon P bedraagt, de rotatietijd in sterrentijd τ_* en de zonnedag τ , dan weten we nu dat het aantal sterrendagen in een tijd P , namelijk P/τ_* , één hoger is dan het aantal zonnedagen, P/τ :

$$\frac{P}{\tau_*} - \frac{P}{\tau} = 1,$$

of

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_*} - \frac{1}{P}.$$

Deze formule geldt voor een planeet dat roteert in de richting van zijn baanbeweging (tegen de klok in). Als de rotatiezin omgekeerd is, of *retrograad*, dan is het aantal sterrendagen in de periode van één baanbeweging één minder dan het aantal zonnedagen, en de vergelijking wordt

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_*} + \frac{1}{P}.$$

Voor de aarde hebben we dat $P = 365.2564$ d, $\tau = 1$ d. De eerste vergelijking geeft ons dan $\tau_* = 0.99727$ d = 23 h 56 min 4s, zonnetijd.

Tijdsvereffening en de oorzaken ervan.

Omdat we in ons dagelijks leven een dag- en nachtritme aanhouden, is het gemakkelijker om ons te baseren op de schijnbare beweging van de zon en niet op de schijnbare beweging van de sterren om tijd bij te houden. Jammer genoeg verloopt zonnetijd niet volgens een constant tempo. Er zijn hiervoor twee redenen, ten eerste beschrijft de baan van de aarde rond de zon niet exact een cirkel, maar een ellips, en dus is de baansnelheid van de aarde niet constant. Ten tweede verplaatst de zon zich volgens de ecliptica en niet volgens de evenaar. Dus diens rechtse stijging neemt niet volgens een constant tempo toe. Als gevolg daarvan neemt de uurhoek van de zon (hetgeen de zonnetijd bepaalt) met een oneven tempo toe.

Om een zonnetijd te vinden die met een constante snelheid verloopt definiëren we een fictieve *gemiddelde zon*, die zich met een constante hoeksnelheid volgens de evenaar van de hemelsfeer verplaatst, en een complete omwenteling maakt in één jaar. Hiermee bedoelen we een *tropisch jaar*, hetgeen de tijd is dat de zon nodig heeft om van het ene naar het volgende lentepunt te gaan. Omdat wegens precessie van de aarde het lentepunt ook beweegt langs de ecliptica, is een tropisch jaar iets korter dan een siderisch jaar (een jaar in sterrentijd).

Gebruik makend van onze artificiële zon kunnen we nu een zonnetijd definiëren die met een constante snelheid verloopt, de *gemiddelde zonnetijd* (of kortweg, de *gemiddelde tijd*). T_M , wat gelijk is aan de uurhoek h_M van het centrum van de gemiddelde zon plus 12 uur (zodat om middernacht de datum verandert, om astronomen te pesten):

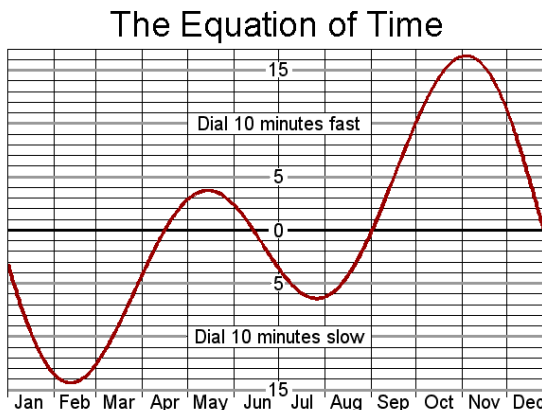
$$T_M = h_M + 12\text{h}.$$

Het verschil tussen de ware zonnetijd T en de gemiddelde zonnetijd T_M wordt de *vergelijking van tijd* genoemd:

$$E.T. = T - T_M.$$

(Ondanks de identieke afkorting, heeft dit niets te maken met een of andere soort van kleine groene mannetjes.) De hoogste positieve waarde van E.T. is ongeveer 16 minuten, de hoogste negatieve waarde bedraagt ongeveer -14 minuten. Dit is ook het verschil tussen de ware middag (culminatie van de zon) en de gemiddelde middag.

Zowel de ware zonnetijd als de gemiddelde zonnetijd zijn *lokale tijden*, afhankelijk van de uurhoek van de echte of artificiële zon. Indien iemand de ware zonnetijd observeert via rechtstreekse metingen en via de vergelijking van tijd de gemiddelde zonnetijd berekent, zal een digitaal uurwerk het waarschijnlijk met beide tijden oneens zijn. De reden hiervoor is dat we de lokale tijd niet gebruiken in ons alledaags leven, we gebruiken echter de *zonale tijd* van de dichtstbijzijnde *tijdzone*.



In het verleden had iedere stad een eigen lokale tijd. Toen reizen sneller en meer populair werd, werd de grote variatie in lokale tijden eerder een ongemak. Op het einde van de 19^{de} eeuw werd de aarde ingedeeld in 24 tijdzones, waarbij de tijd van ieder tijdzone één uur verschilt met de naburige tijdzone. Op het oppervlak van de aarde komt één uur overeen met 15° in lengtegraad; de tijd van iedere zone is bepaald door de lokale tijden op één van de lengtegraden 0°, 15°, ..., 345°.

De tijd van de nulmeridiaan die door Greenwich⁹ gaat wordt gebruikt als internationale referentie, Universele Tijd. In de meeste Europese landen loopt de tijd hier één uur mee vooruit.

In de zomer schakelen vele landen over naar *zomertijd*. Tijdens de zomertijd loopt de tijd één uur vooruit in vergelijking met de gewone tijd. Het nut hiervan is om de tijd dat mensen wakker zijn te laten samenvallen met het daglicht om hiermee elektriciteit uit te sparen, vooral 's avonds, wanneer mensen een uur vroeger naar bed gaan (en stoute dingen doen).

TAI, UT en UTC.

Tijd kan gedefinieerd worden volgens verschillende fenomenen:

1. De zonne- en sterrentijd, gebaseerd op de rotatiebewegingen van de aarde.

⁹Greenwich is een district van de Britse regio Londen, in het zuidoosten van de metropool, aan de zuidelijke oever van de Theems. Het telt circa 200.000 inwoners (ca. 1980).

2. De standaardeenheid van tijd in het huidige SI systeem, deze is gebaseerd op kwantummechanische atomaire fenomenen.
3. Fysische vergelijking, zoals degene die de bewegingen van hemellichamen beschrijven en daar een tijdvariabele bij betrekken die overeenkomt met een ideale tijdseenheid die met een constant tempo verloopt.

TAI

De '*international atomic time*' TAI, werd in 1972 goedgekeurd als de basis om tijd aan te duiden. Deze tijd wordt bijgehouden door het '*Bureau International des Poids et Mesures*' in Parijs, en is het gemiddelde van een aantal nauwkeurige atomaire klokken.

UT

De '*universal time*', UT, is gebaseerd op een vergelijking dat betrekking houdt tot de gemiddelde sterrentijd van de meridiaan van Greenwich (GMST) en de juliaanse tijdrekening¹⁰. Sterrentijd en dus ook UT staan in verband met de rotatie van de aarde, en bevatten dus storingen vanwege de onregelmatige variaties, en hoofdzakelijk snelheidsafname, in de rotatie van de aarde. Strikt genomen wordt deze universele tijd aangeduid door UT1.

UTC

De '*coordinated universal time*', UTC, is zo gedefinieerd dat het volgens hetzelfde tempo verloopt als TAI, maar ervan verschilt met een geheel aantal seconden. Deze *schrikkelsecondes* worden gebruikt om UTC aan te passen zodanig dat het verschil met UT1 nooit meer is dan 0.9 seconden. Een schrikkelseconde wordt ofwel aan het begin van een jaar ofwel op de nacht van juni naar juli toegevoed.

Het verschil

$$\Delta AT = TAI - UTC$$

wordt ook wel getabelleerd in de '*Astronomical Almanac*'. Volgens de definitie van UTC is het verschil in seconden steeds een geheel getal. Het verschil kan niet ver in de toekomst voorspeld worden.

¹⁰De juliaanse kalender is de van oorsprong Romeinse kalender die vervolgens gebruikt werd in het grootste deel van de christelijke wereld. Hij werd in de loop van de 16e tot de 20e eeuw geleidelijk aan verdrongen door de gregoriaanse kalender, die eigenlijk niet meer dan een correctie is van de juliaanse.

Vragen Hoofdstuk 3

Type II

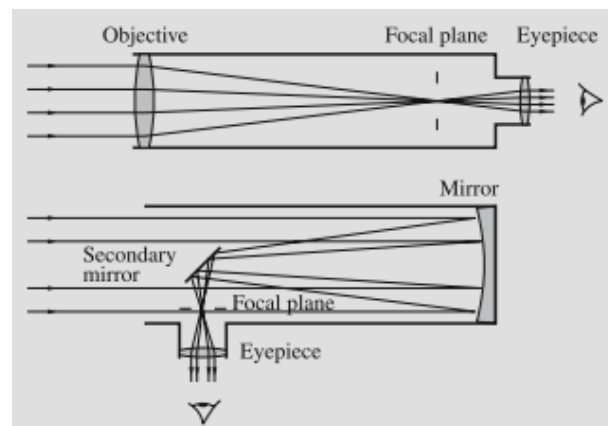
Wat is de vergroting van een telescoop bij visuele waarneming? Maak een behoorlijke schets van de stralengang, en leid de formule af. Wat bepaalt de maximum en minimum vergroting? Leid de relevante formules af.

De telescoop vervult drie belangrijke rollen bij astronomische observaties:

1. Het verzamelt licht uit een groot gebied, wat het mogelijk maakt om zeer zwakke bronnen te bestuderen.
2. Het vergroot de schijnbare diameterhoek¹¹ van een object en verbetert dus de resolutie.
3. Het wordt gebruikt om posities van objecten te meten.

Het oppervlak dat het licht verzamelt in een telescoop is ofwel een lens ofwel een spiegel. Zodus zijn optische telescopen ingedeeld in twee types, lenstelescopen of *refractors* en spiegeltelescopen of *reflectors*.

Refractors hebben twee lenzen, het *objectief* dat het inkomende licht verzamelt en een beeld vormt in het brandpunt, en het *oculair*, hetgeen een klein vergrootglas is waardoor er naar het object gekeken kan worden. De lenzen bevinden zich aan de tegenovergestelde uiteinden van een buis dat naar ieder gewenst punt gericht kan worden. De afstand tussen het oculair en het brandpunt kan worden aangepast om het beeld scherp te krijgen. Dit beeld, gevormd door het objectief, kan ook worden geregistreerd, bv. op een fotografische film, zoals bij een gewone camera.

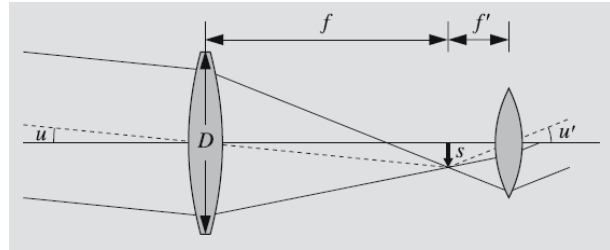


De diameter van het objectief, D , wordt de *apertuur* (letterlijk *opening*) van de telescoop genoemd. De verhouding van de apertuur tot de brandpuntsafstand f , $F = D/f$, wordt het *diafragmaetal* genoemd. Dit getal wordt gebruikt om de kracht van de telescoop om licht te verzamelen te karakteriseren. Indien het diafragmaetal groot is, nabij oneindig, dan heeft men een krachtige, 'snelle' telescoop; dit betekent dat er met korte blootstelling al foto's getrokken kunnen worden, aangezien het beeld helder is. Een klein diafragmaetal betekent een 'trage' telescoop.

¹¹De diameterhoek is visuele diameter gemeten als hoek vanuit een gegeven positie.

De *schaal* van het beeld gevormd in het brandpunt van een refractor kan geometrisch bepaald worden. Wanneer een object gezien wordt volgens een hoek u , vormt het een beeld met hoogte s ,

$$s = f \tan u \approx fu,$$



Aangezien u een zeer kleine hoek is.

De **vergroting** ω is

$$\omega = u'/u \approx f/f',$$

waarbij we de vergelijking $s = fu$ hebben gebruikt. Hier is f de brandpuntsafstand van het objectief en f' dat van het oculair. De vergroting is geen basiskenmerk van een telescoop, aangezien het kan veranderd worden door simpelweg het oculair te veranderen.

Een belangrijker kenmerk van een telescoop dat afhankelijk is van de apertuur, is het *scheidend vermogen* (de *resolutie*). Hetgeen de kleinste (boog)hoek tussen twee objecten (zoals een dubbelster) is, die nog gescheiden waargenomen kunnen worden.

De theoretische resolutie van een telescoop wordt vaak gegeven in de vorm geïntroduceerd door Rayleigh

$$\sin \theta \approx \theta = 1.22\lambda/D, \quad [\theta] = \text{rad}.$$

Met θ de resolutie, D de apertuur en λ de golflengte van het licht.

Als praktische regel, kunnen we zeggen dat twee objecten als gescheiden objecten kunnen gezien worden als de hoekafstand tussen beide

$$\theta \gtrsim \lambda/D, \quad [\theta] = \text{rad}.$$

Deze formule kan zowel toegepast worden bij optische als bij radiotelescopen¹². In de praktijk wordt de resolutie van visuele waarnemingen vastgelegd door het vermogen van het oog om details te onderscheiden.

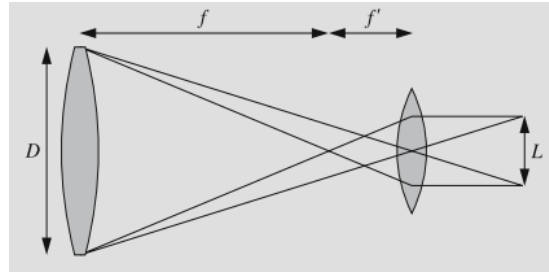
De **maximum vergroting** ω_{\max} is de grootste vergroting die de moeite waard is om te gebruiken bij telescopische waarnemingen. De waarde ervan verkrijgt men door de verhouding te nemen van het scheidend vermogen van het oog, $e \approx 5.8 \times 10^{-4}$ rad, tot het scheidend vermogen van de telescoop, θ ,

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &= e/\theta \approx eD/\lambda = \frac{5.8 \times 10^{-4} D}{5.5 \times 10^{-7} \text{m}} \\ &\approx D/1 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Grotere vergrotingen zijn nutteloos voor het oog.

¹²Radiotelescopen zijn radioantennes en ontvanginginstallaties speciaal voor het waarnemen van kortegolf radiosignalen.

De *minimum vergroting* ω_{\min} is de kleinste vergroting die gebruikt kan worden bij visuele observaties. De waarde ervan wordt verkregen uit de voorwaarde dat de diameter van de *uittreepupil* L kleiner dan of gelijk aan dat van de pupil van het oog, d , moet zijn.



De uittreepupil is het beeld van het objectief gevormd door het oculair, waardoorheen het licht van het objectief gaat en achter het oculair valt. We hebben

$$L = \frac{f'}{f} D = \frac{D}{\omega}.$$

Dus betekent de voorwaarde $L \leq d$ dat

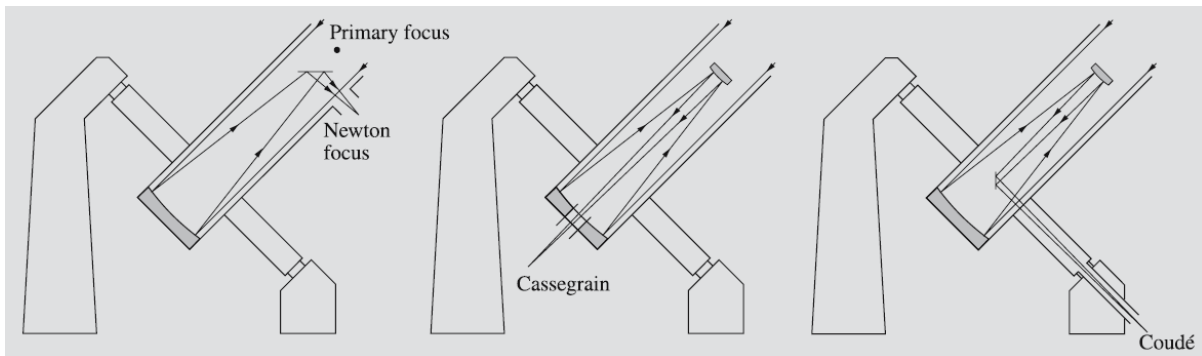
$$\omega \geq D/d,$$

we hebben dus dat

$$\omega_{\min} = D/d.$$

Type III

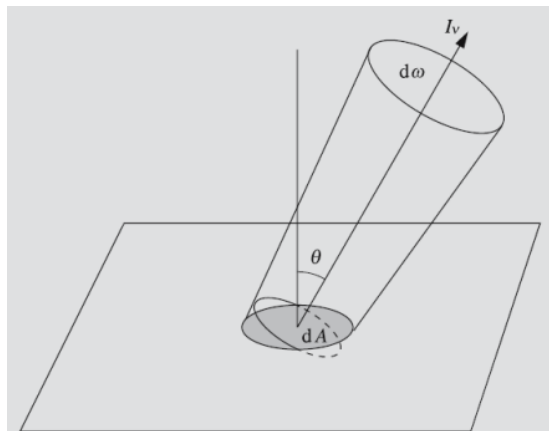
Schets de stralengang van een Newton telescoop, een klassieke Cassegrain telescoop en een Cassegrain telescoop met coudé focus.



Vragen Hoofdstuk 4

Type I

A. Vertrekkend van de definitie van intensiteit (intensity):



Laten we aannemen dat er enige straling doorheen een oppervlakte-element dA gaat. Een deel van de straling zal dA verlaten onder een ruimtewinkel $d\omega$; de hoek tussen $d\omega$ en de normaal van het oppervlak wordt genoteerd met θ . De hoeveelheid energie met een frequentie ($\nu = c/\lambda$ met λ de golflengte in m en c de lichtsnelheid, in m/s van de golf) binnen het bereik $[\nu, \nu + d\nu]$ die deze ruimtewinkel binnenkomt is

$$dE_\nu = I_\nu \cos \theta \, dA \, d\nu \, d\omega \, dt.$$

Hier staat de coëfficiënt I_ν voor de **specifieke intensiteit** van de straling bij een frequentie ν in de richting van de ruimtewinkel $d\omega$. De dimensie ervan is $\text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$.

De intensiteit die alle mogelijke frequenties inhoudt wordt de **totale intensiteit** I genoemd, en wordt verkregen door I_ν te integreren over alle mogelijke frequenties:

$$I = \int_0^\infty I_\nu \, d\nu.$$

1. geef de definities van vermogensdichtheid (flux density) en vermogen (energy flux).

VERMOGENSDICHTHEID

De **vermogensdichtheid** geeft het vermogen van de straling weer per oppervlakte-eenheid en heeft dus als eenheid $\text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$ of W m^{-2} , afhankelijk of we het hebben over de vermogensdichtheid bij een bepaalde frequentie, F_ν , of de totale vermogensdichtheid, F .

Wanneer we een stralingsbron waarnemen, meten we in principe de energie die verzameld wordt door een detector gedurende een bepaalde periode, wat gelijk is aan de vermogensdichtheid geïntegreerd over heel de oppervlakte van het apparaat die de straling verzamelt en het tijdsinterval.

De vermogensdichtheid F_ν bij een frequentie ν kan uitgedrukt worden in termen van de intensiteit als

$$\begin{aligned} F_\nu &= \frac{1}{dA \, d\nu \, dt} \int_S dE_\nu \\ &= \int_S I_\nu \cos \theta \, d\omega, \end{aligned}$$

waarbij de integratie wordt uitgebreid over alle mogelijke richtingen. Op een analoge manier is de totale vermogensdichtheid

$$F = \int_S I \cos \theta \, d\omega.$$

VERMOGEN

Het *vermogen* betekent de hoeveelheid energie die per tijdseenheid door een bepaald oppervlakte gaat, uitgedrukt in watt (W). Het vermogen dat door een ster onder een ruimtehoek ω wordt uitgezonden is $L = \omega r^2 F$, waarbij F de vermogensdichtheid op een afstand r bedraagt. Het *totaal vermogen* is het vermogen dat doorheen een gesloten oppervlak gaat dat de bron omvat.

2. Welke zijn de hiermee overeenkomende astronomische grootheden?

Indien een vermogensdichtheid waargenomen wordt is deze meestal vrij klein, en W m^{-2} zou een ongemakkelijk grote eenheid zijn. Daarom, en vooral in radioastronomie, worden vermogensdichtheden vaak uitgedrukt in *Janskies*; één Jansky (Jy) bedraagt $10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$.

Astronomen noemen het totaal vermogen van een ster gewoonlijk de *lichtkracht* L . We kunnen het ook hebben over de lichtkracht L_ν bij een gegeven frequentie ν ($[L_\nu] = \text{W Hz}^{-1}$).

3. Verklaar de factor $\cos(\theta)$ in de uitdrukking voor de intensiteit.

De projectie van het oppervlakte-element dA gezien volgens de richting θ is $dA_n = dA \cos \theta$, wat de factor $\cos \theta$ verklaart. Indien de intensiteit onafhankelijk is van de richting van de straling, dan is de energie dE_ν rechtstreeks in verhouding met het oppervlakte-element loodrecht op de richting van de straling.

4. Verklaar de betekenis van de adjectieven "totaal", "specifiek" en "band" die bij elk van deze grootheden kan gevoegd worden.

- **Totaal** gebruikt men wanneer over alle mogelijke frequenties wordt geïntegreerd.
- **Specifiek** gebruikt men wanneer men naar één bepaalde frequentie kijkt.
- **Band** gebruikt men wanneer de grootheid bij één van de banden van het UBVRI-systeem (zie ook verder) hoort, dit is een kleurindex dat getallen bevat die op een logaritmische schaal de helderheid van een ster bij bepaalde gestandaardiseerde golflengtes aangeeft.

5. Leid het verband af tussen intensiteit en vermogensdichtheid voor een isotrope straler.

Indien de straling *isotroop* is, is I per definitie onafhankelijk van de richting, we krijgen

$$F = \int_S I \cos \theta \, d\omega = I \int_S \cos \theta \, d\omega.$$

De ruimtehoek ω is gelijk aan een oppervlakte-element van een eenheidssfeer. In sferische coördinaten is dit

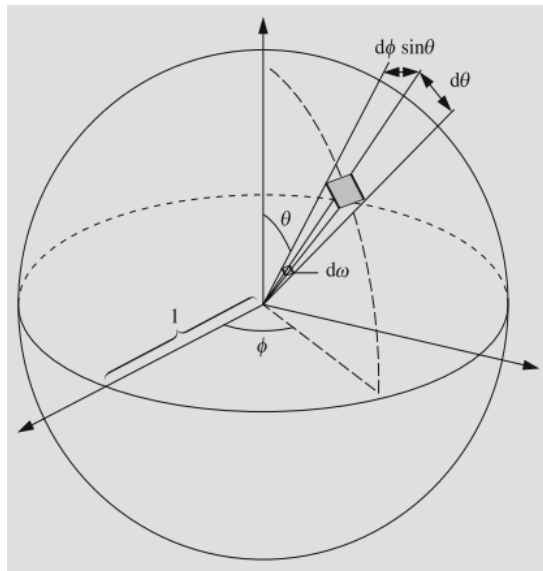
$$d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

Substitueren we dit in de eerste vergelijking krijgen we

$$F = I \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 0,$$

en dus is er geen netto vermogen van de straling. Dit betekent dat er evenveel straling het oppervlak verlaat als dat er het oppervlak binnenkomt. Indien we de hoeveelheid straling willen weten die doorheen het oppervlak gaat, kunnen we bijvoorbeeld de hoeveelheid straling die het oppervlak verlaat vinden. Voor isotrope straling is dit

$$F = I \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \pi I.$$



Indien de bron (zoals een gewone ster) isotroop straalt, is diens straling op een afstand r gelijk verdeeld over een sferisch oppervlak met een oppervlakte van $4\pi r^2$. Als de vermogensdichtheid van de straling dat doorheen dit oppervlak gelijk is aan F , dan is het totaal vermogen

$$L = 4\pi r^2 F.$$

6. Leid het verband af tussen intensiteit en energiedichtheid.

De *energiedichtheid* u van straling is de hoeveelheid energie per volume-eenheid (J m^{-3}):

$$u = \frac{1}{c} \int_S I \, d\omega.$$

Dit kan gezien worden als volgt. Stel dat we straling met intensiteit I hebben afkomstig van een ruimtehoek $d\omega$ loodrecht op het oppervlak dA . In een tijd dt legt de straling een afstand $c \, dt$ af en vult het een volume van $dV = c \, dt \, dA$. Dus de hoeveelheid energie in het volume dV bedraagt (nu is $\cos \theta = 1$)

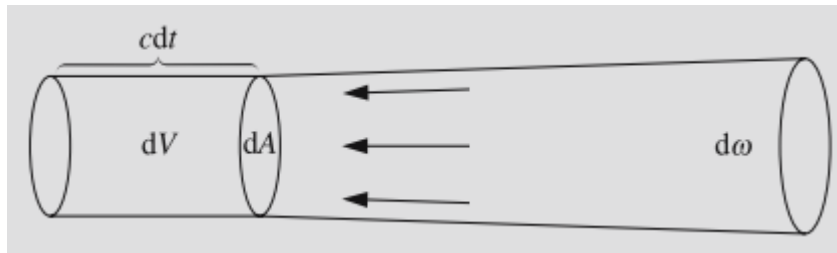
$$dE = I \, dA \, d\omega \, dt = \frac{1}{c} I \, d\omega \, dV.$$

Vandaar wordt de energiedichtheid du van de straling dat onder de ruimtehoek $d\omega$ toekomt gegeven door

$$du = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{c} I \, d\omega,$$

de totale energiedichtheid verkrijgt men door over alle mogelijke richtingen te integreren. Voor isotrope straling krijgen we

$$u = \frac{4\pi}{c} I.$$



7. Toon aan dat de intensiteit onafhankelijk is van de afstand

In de vergelijking van de intensiteit is er nergens sprake van een afstand, dus is de intensiteit hiervan onafhankelijk gedefinieerd.

Type II

Verklaar de begrippen extinctie en optische dichtheid. Leid een betrekking af die een waargenomen fotometrische grootte relateert tot haar intrinsieke waarde en de optische dichtheid.

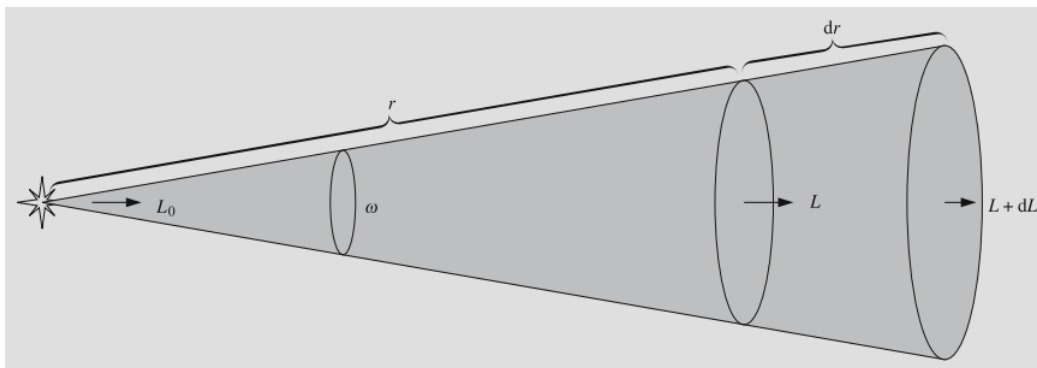
Indien de ruimte tussen de stralingsbron en de waarnemer niet volledig leeg is maar één of ander interstellair medium bevat, dan wordt een deel van de straling geabsorbeerd

door het medium (en gewoonlijk terug uitgestraald met een andere golflengte), of van de gezichtslijn weg verstrooid. Dit verlies in straling wordt *extinctie* genoemd.

Laat ons nu onderzoeken hoe de extinctie afhangt van de afstand. Veronderstel dat we een ster hebben die schijnt met een vermogen L_0 volgens een ruimtehoek ω in een bepaald golflengtebereik. Aangezien het medium de straling absorbeert en verstrooit, zal het vermogen L afnemen bij toenemende straal r . In een korte afstandsinterval $[r, r + dr]$ is de extinctie dL evenredig met het vermogen L en de afstand afgelegd in het medium:

$$dL = -\alpha L dr .$$

De factor α zegt hoe effectief het medium de straling belemmert, het wordt de *opaciteit* genoemd en is een maat voor de lichtdoorlatendheid van een medium. Uit voorgaande vergelijking zien we dat de dimensie ervan $[\alpha] = \text{m}^{-1}$ is. De opaciteit is nul voor een perfect vacuüm en nadert naar oneindig wanneer de substantie zeer troebel wordt.



We kunnen nu een dimensieloze hoeveelheid definiëren, de *optische dichtheid* τ , door

$$d\tau = \alpha dr .$$

Substitueren we dit in de eerdere vergelijking krijgen we

$$dL = -L d\tau .$$

Integreren we dit vanaf de bron (waar $L = L_0$ en $r = 0$) tot de waarnemer:

$$\int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = - \int_0^\tau d\tau ,$$

dan geeft dit

$$L = L_0 e^{-\tau} .$$

Hier staat τ voor de optische dichtheid van het materiaal tussen de bron en de waarnemer, L staat voor het vermogen dat wordt waargenomen. Het vermogen neemt dus exponentieel af bij een toenemende optische dichtheid. Een lege ruimte is perfect doorlatend en heeft dus als opaciteit $\alpha = 0$; de optische dichtheid neemt dus niet toe in een lege ruimte en het vermogen blijft constant.

Zij F_0 de vermogensdichtheid van het oppervlak van een ster en $F(r)$ de vermogensdichtheid op een afstand r . We kunnen de vermogens uitdrukken als

$$L = \omega r^2 F(r), \quad L_0 = \omega R^2 F_0,$$

waarbij R de straal is van de ster. Substitutie in de vorige vergelijking geeft

$$F(r) = F_0 \frac{R^2}{r^2} e^{-\tau}.$$

Type III

Verklaar het begrip kleurexcess en geef een verband met de extinctie.

De *magnitude* is een dimesielloze grootte waarmee de helderheid van een ster of ander hemellichaam wordt uitgedrukt. De magnitude wordt als 0 gedefinieerd bij een voorgekozen vermogensdichtheid F_0 . Alle andere magnitudes worden dan bekomen uit de vergelijking

$$m = -2.5 \log \frac{F}{F_0}.$$

Er kan aangetoond worden dat voor de magnitudes m_1 en m_2 van twee sterren met overeenkomstige vermogensdichtheden F_1 en F_2 geldt dat

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{F_1}{F_2}.$$

De magnitude zoals hier gedefinieerd, wordt de *schijnbare magnitude* genoemd.

Lichtmeters die de magnitude meten zijn gewoonlijk gepaard met filters die enkel licht in een bepaalde golflengteband de detector laten binnengaan. Zo werd in 1950 het UBV-systeem ontwikkeld waarbij magnitudes werden gemeten doorheen drie filters, U = ultraviolet, B = blauw en V = visueel. Magnitudes die doorheen deze filters worden geobserveerd worden respectievelijk *U*, *B* en *V* magnitudes genoemd.

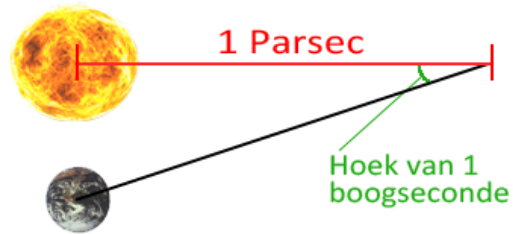
Het UBV-systeem werd later aangevuld met meer banden. Een vaak gebruikt systeem is het vijfkleuren UBVR-systeem, wat ook nog R = rood en I = infrarood filters inhoudt.

In elk systeem met meerdere kleuren kunnen we *kleurindices* definiëren; een kleurindex is het verschil tussen twee magnitudes. Door de *B* magnitude van de *U* magnitude af te trekken krijgen we de kleurindex $U - B$, en zo verder. Bij het UBV systeem wordt er gewoonlijk alleen de *V* magnitude gegeven en de kleurindices $U - B$ en $B - V$.

De schijnbare magnitude vertelt ons niets over de ware helderheid van een ster, aangezien de afstand verschilt van ster tot ster. Een grootte die de intrinsieke helderheid van de ster meet is de *absolute magnitude*. Het wordt gedefinieerd als de magnitude op een afstand van 10 parsec¹³ van de ster.

¹³Één parsec is gelijk aan de afstand die men vanaf de zon de ruimte moet ingaan, om de gemiddelde afstand tussen de aarde en de zon onder een hoek van één boogseconde te zien, deze afstand bedraagt $3.085\,677\,580\,666\,31 \times 10^{16}$ m en is dus niet onmiddellijk naast de deur gelegen.

We zullen nu een relatie afleiden tussen de schijnbare magnitude m , de absolute magnitude M en de afstand r . Aangezien het vermogen afkomstig van de straling van een ster onder een ruimtehoek ω op een afstand r verspreid wordt over een oppervlak ωr^2 , is de vermogensdichtheid omgekeerd evenredig met de afstand in het kwadraat. daarom wordt de verhouding van de vermogensdichtheid op een afstand r , $F(r)$, tot de vermogensdichtheid op een afstand van 10 parsec, $F(10)$, gegeven door



$$\frac{F(r)}{F(10)} = \left(\frac{10 \text{ pc}}{r} \right)^2.$$

Het verschil in magnitudes op een afstand r en 10 pc, of de *afstandsmodulus* $m - M$, is

$$m - M = -2.5 \log \frac{F(r)}{F(10)} = -2.5 \log \left(\frac{10 \text{ pc}}{r} \right)^2$$

of

$$m - M = 5 \log \frac{r}{10 \text{ pc}}.$$

Indien er sprake is van extinctie, dan starten we met de absolute magnitude die bepaald wordt met de laatste vergelijking uit de vorige opgave (deze wordt nog steeds geëvalueerd zonder extinctie):

$$F(10) = F_0 \frac{R^2}{(10 \text{ pc})^2}.$$

de *afstandsmodulus* $m - M$ is nu

$$\begin{aligned} m - M &= -2.5 \log \frac{F(r)}{F(10)} \\ &= -2.5 \log \left[\frac{(10 \text{ pc})^2}{r^2} e^{-\tau} \right] \\ &= 5 \log \frac{r}{10 \text{ pc}} - 2.5 \log e^{-\tau} \\ &= 5 \log \frac{r}{10 \text{ pc}} + (2.5 \log e) \tau \end{aligned}$$

of

$$m - M = 5 \log \frac{r}{10 \text{ pc}} + A,$$

waarbij A de extinctie in magnitude, vanwege het medium tussen de ster en de waarnemer, weergeeft.

KLEUREXCESS

Een ander gevolg van een interstellair medium is het *rood worden van licht*: blauw licht wordt meer geabsorbeerd en verstrooid dan rood licht. De visuele magnitude van een ster bij extinctie is

$$V = M_V + 5 \log \frac{r}{10 \text{ pc}} + A_V,$$

waarbij M_V de absolute visuele magnitude is en A_V de extinctie in de V-band. Analoog hebben we voor de blauwe magnitude

$$B = M_B + 5 \log \frac{r}{10 \text{ pc}} + A_B.$$

De waargenomen kleurindex is nu

$$B - V = M_B - M_V + A_B - A_V,$$

of

$$B - V = (B - V)_0 + E_{B-V},$$

waarbij $(B - V)_0 = M_B - M_V$ de *intrinsieke kleur* is van de ster en $E_{B-V} = (B - V) - (B - V)_0$ het **kleurexcess**. Studies naar het interstellair medium hebben aangetoond dat de verhouding van de visuele extinctie A_V tot het kleurexcess E_{B-V} bijna constant is voor alle sterren:

$$R = \frac{A_V}{E_{B-V}} \approx 3.0.$$

Dit maakt het mogelijk om de visuele extinctie te vinden wanneer het kleurexcess gekend is:

$$A_V \approx 3.0 E_{B-V}.$$

Wanneer A_V verkregen wordt, kan de afstand onmiddellijk berekend worden indien V en M_V gekend zijn.

Vragen Hoofdstuk 5

Type I

B.* Meer specifiek voor zwarte straling $B = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$,

leid uitdrukkingen af voor de totale intensiteit, de totale vermogensdichtheid, en het totaal vermogen.

Een *zwarte straler* of een *zwart lichaam* is een geïdealiseerd object dat de straling die erop invalt niet reflecteert of verstrooit, maar volledig absorbeert en heruitzendt. Het is een soort van ideale radiator dat echter niet in de echte wereld kan bestaan. Nochtans gedragen vele objecten zich zeer goed alsof het zwarte lichamen zouden zijn.

De straling van een zwart lichaam hangt enkel af van diens temperatuur, en is volledig onafhankelijk van diens vorm, materie en inwendige staat. De golflengtedistributie van de straling volgt de *wet van Planck*, hetgeen een functie is dat enkel afhankelijk is van de temperatuur. De intensiteit bij een gegeven frequentie van een zwart lichaam bij een temperatuur T bedraagt

$$B_\nu(T) = B(\nu; T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1},$$

waarbij

$$\begin{aligned} h &= \text{de constante van Planck} = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}, \\ c &= \text{de lichtsnelheid} \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \\ k &= \text{de constante van Boltzmann} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}. \end{aligned}$$

We kunnen de wet van Planck ook schrijven in functie van de golflengte. We eisen dat $B_\nu d\nu = -B_\lambda d\lambda$. De golflengte neemt af bij stijgende frequentie, vandaar het minteken. Aangezien $\nu = c/\lambda$ hebben we dat

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2},$$

waaruit

$$B_\lambda = -B_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} = B_\nu \frac{c}{\lambda^2},$$

of

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1},$$

De functies B_ν en B_λ zijn gedefinieerd op zo'n manier dat de totale intensiteit verkregen kan worden op dezelfde manier door om het even de welke van beide te gebruiken:

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \int_0^\infty B_\lambda d\lambda.$$

* vervolg van opgave A. in hoofdstuk 4.

Laat ons nu proberen de **totale intensiteit** te vinden via integratie van de eerste van deze integralen:

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) \, d\nu = \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 \, d\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

We veranderen nu de integratievariabele naar $x = h\nu/(kT)$, waaruit $d\nu = (kT/h)dx$:

$$B(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{k^4}{h^4} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 \, dx}{e^x - 1}.$$

Deze integraal is gewoon een reëel getal, onafhankelijk van de temperatuur. We vinden dus dat

$$B(T) = AT^4,$$

waarbij de waarde van A gelijk is aan

$$A = \frac{2k^4}{c^2 h^3} \frac{\pi^4}{15}.$$

(Er bestaat geen elementaire manier om de gegeven integraal op te lossen.)

De **vermogensdichtheid** F voor een isotrope straling bij intensiteit B is (zie eerder)

$$F = \pi B$$

of

$$F = \sigma T^4.$$

Dit is de wet van *Stefan-Boltzmann*, en de constante $\sigma (= \pi A)$ is de *constante van Stefan-Boltzmann*,

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

Uit de wet van dien tjoetel krijgen we een relatie tussen de lichtkracht (het **vermogen**) en de temperatuur van een ster. Indien de straal van de ster gelijk is aan R , dan heeft die een oppervlakte van $4\pi R^2$, en als de vermogensdichtheid aan het oppervlak gelijk is aan F , dan hebben we

$$L = 4\pi R^2 F.$$

Indien de ster wordt verondersteld te stralen als een zwart lichaam, dan hebben we $F = \sigma T^4$, waaruit volgt

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4.$$

Type II

Som de verschillende soorten straling geassocieerd met atomen op en verklaar deze fysisch. Hoe wordt de straling van het waterstofatoom geclassificeerd? Welke zijn bijkomende stralingsmechanismen bij moleculen?

Elektromagnetsiche straling wordt uitgezonden of geabsorbeerd wanneer een atoom of een molecule zich verplaatst van het ene energieniveau naar het ander. Indien de energie van een atoom afneemt met een hoeveelheid ΔE , dan zendt het atoom een lichtkwantum¹⁵ uit, een *foton* genoemd. De frequentie ν van het foton wordt gegeven door de vergelijking

$$\Delta E = h\nu,$$

waarbij h de *constante van Planck* is, $h = 6.6256 \times 10^{-34}$ J s. Analoog, wanneer het atoom een foton met een frequentie ν opneemt, zal het energieniveau van het atoom toenemen met $\Delta E = h\nu$.

Het klassieke model beschrijft een atoom als een nucleus omgeven door een elektronenwolk. De nucleus bestaat uit Z protonen, elk met een lading $+e$ en N elektrisch neutrale neutronen; Z is het *atoomgetal* van het atoom en $A = Z + N$ is het *massagetal* van het atoom. Een neutraal atoom heeft evenveel elektronen (met lading $-e$) als protonen.

Het energieniveau van een atoom betekent meestal het energieniveau van diens elektronen. De energie E van een elektron kan geen willekeurige waarden aannemen; enkel bepaalde energiewaarden zijn mogelijk. Een atoom kan straling enkel absorberen of uitzenden met bepaalde frequenties ν_{if} die overeenkomen met de energiever verschillen tussen bepaalde begin- en eindstadia i en f : $|E_i - E_f| = h\nu_{if}$. Dit geeft aanleiding tot het *lijnspectrum*, dat specifiek is voor ieder element. Een heet gas onder lage druk produceert zo'n *emissiespectrum*. Indien hetzelfde gas terug afgekoeld wordt en geobserveerd wordt onder een bron van wit licht (hetgeen een continu spectrum heeft), dan kunnen dezelfde lijnen worden gezien als donkere *absorptielijnen*.

SPONTANE EMISSIE

Bij lage temperaturen bevinden de meeste atomen zich in hun laagste energieniveau, de *grondtoestand*. Hogere energieniveaus zijn *geëxciteerde toestanden*; een overgang van een lagere naar een hogere staat wordt *excitatie* genoemd. Gewoonlijk zal het geëxciteerde atoom zeer snel naar een lagere staat terugkeren, waarbij een foton wordt uitgezonden, dit heet *spontane emissie*. Een typische levensduur van van een geëxciteerde staat kan zo'n 10^{-8} seconden zijn.

GEÏNDUCEERDE EMISSIE

Het doen dalen van het energieniveau kan ook door straling geïnduceerd worden. Stel dat ons atoom een foton heeft geabsorbeerd en geëxciteerd geraakt. Een ander foton, met een frequentie ν dat overeenkomt met een mogelijke daling in energiniveau van het geëxciteerde

¹⁵Een kwantum is de kleinste, ondeelbare hoeveelheid van een grootheid die bij een interactie betrokken kan zijn.

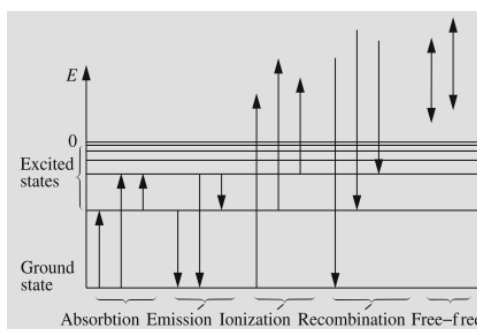
atoom, kan nu het atoom verstoren waardoor deze naar een lager energieniveau springt en een foton uitstraalt met dezelfde frequentie ν . Dit wordt *geïnduceerde emissie* genoemd. Fotonen die spontaan worden uitgestraald verlaten het atoom in een willekeurige richting en met een willekeurige fase: de straling is isotroop en onafhankelijk. Geïnduceerde straling daarentegen is *coherent*; de straling plant zich voort in dezelfde richting en met dezelfde fase als de inducerende straling.

GEBONDEN-VRIJ OVERGANG EN RECOMBINATIE

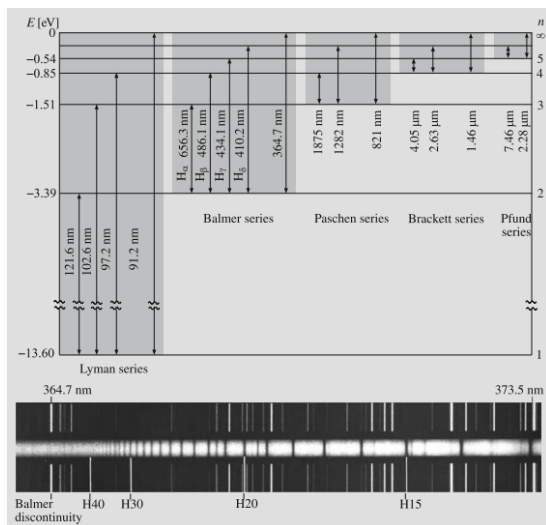
Het nulniveau van de energiestadia is meestal zo gekozen dat een gebonden elektron een negatieve energie heeft en een vrij elektron een positieve energie. Indien een elektron met energie $E < 0$ een energie hoger dan $|E|$ ontvangt, dan zal het elektron het atoom verlaten en een ion worden. In astrofysica wordt ionisatie vaak een *gebonden-vrij* overgang genoemd. Anders dan bij excitatie zijn alle mogelijke energiewaarden ($E > 0$) nu mogelijk. Het overschot aan geabsorbeerde energie gaat naar de kinetische energie van het bevrijde elektron. Het inverse proces, waarbij een atoom een vrij elektron opvangt, wordt *recombinatie* genoemd of vrij-gebonden overgang.

VRIJ-VRIJ STRALING

Wanneer een elektron verstrooid wordt door een nucleus of een ion (na een 'botsing') zonder opgevangen te worden, kan de elektromagnetische interactie de kinetische energie van het elektron doen veranderen, hetgeen *vrij-vrij* straling produceert. In een zeer heet gas ($T > 10^6$ K) is waterstof volledig geïoniseerd, en de vrij-vrij straling is de voornaamste emissiebron. Het wordt in deze context dan gewoonlijk *thermische remstraling* (in het Duits *bremstrahlung*) genoemd.



CLASSIFICATIE STRALING WATERSTOFATOOM



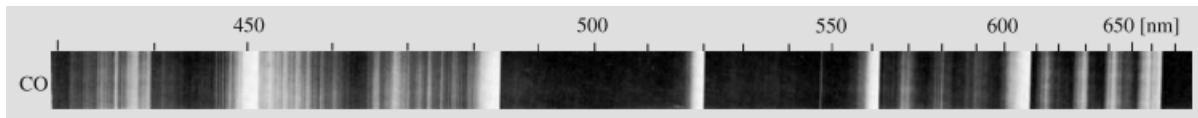
Waterstof is het minst complex (en dus zeker geen vrouwelijk) atoom, bestaande uit één proton en één elektron. Volgens het model van Bohr draait het elektron in een circulaire baan rond het proton.

De **classificatie van de straling van het waterstofatoom** is hoofdzakelijk gebaseerd op het hoofdkwantumgetal n , wat de schil beschrijft waar het elektron zich bevindt. De classificatie wordt gedaan in verschillende *series*. Zo'n serie is een set van lijnen in het spectrum dat geproduceerd wordt bij een overgang $E_{n_2} \rightarrow E_{n_1}$ tussen twee energieniveaus. Zo is er de *Balmer*

serie bij de overgang $E_n \rightarrow E_2$ ($n_1 = 2$), deze lijnen bevinden zich in het zichtbaar deel van het spectrum. Wanneer het elektron teruggkeert naar diens grondstadium, $E_n \rightarrow E_1$ ($n_1 = 1$), krijgen we de *Lyman serie*, wat in het ultraviolet gedeelte van het spectrum ligt. De andere series met specifieke namen zijn de *Paschen serie* ($n_1 = 3$), de *Bracket serie* ($n_1 = 4$) en de *Pfund serie* ($n_1 = 5$).

STRALINGSMECHANISMEN BIJ MOLECULEN

Het energieniveau van een atoom wordt bepaald door diens elektronen. In het geval van een molecule zijn er meer mogelijkheden: atomen kunnen vibreren rond hun evenwichtstoestand en de molecule kan roteren om een bepaalde as. De beide vibrationele en rotationele stadia zijn gekwantiseerd. Overgangen tussen opeenvolgende vibrationele stadia betreffen typisch fotonen in de infraroodband, terwijl overgangen tussen rotationele stadia verband houden met fotonen in de microgolffband. Dit gecombineerd met de overgangen van de elektronen produceert een bandenspectrum dat specifiek is voor moleculen.



Verklaar:

1. Effectieve temperatuur

Temperaturen bij astronomische objecten kunnen variëren tussen het bijna absolute nulpunt en miljoenen graden. Temperatuur kan gedefinieerd worden op verschillende manieren, en diens numerieke waarde hangt af van de specifieke definitie die gebruikt wordt. Al deze verschillende temperaturen zijn nodig om verschillende fysische gebeurtenissen te beschrijven, en vaak is er geen unieke 'ware' temperatuur.

De meest belangrijke grootheid dat de oppervlaktetemperatuur van een ster beschrijft is de *effectieve temperatuur* T_e . Het wordt gedefinieerd als de temperatuur van een zwart lichaam dat met eenzelfde totale vermogensdichtheid alst de ster straalt.

2. Helderheidstemperatuur, en geef een uitdrukking die hiervoor gebruikt wordt in de radiosterrenkunde

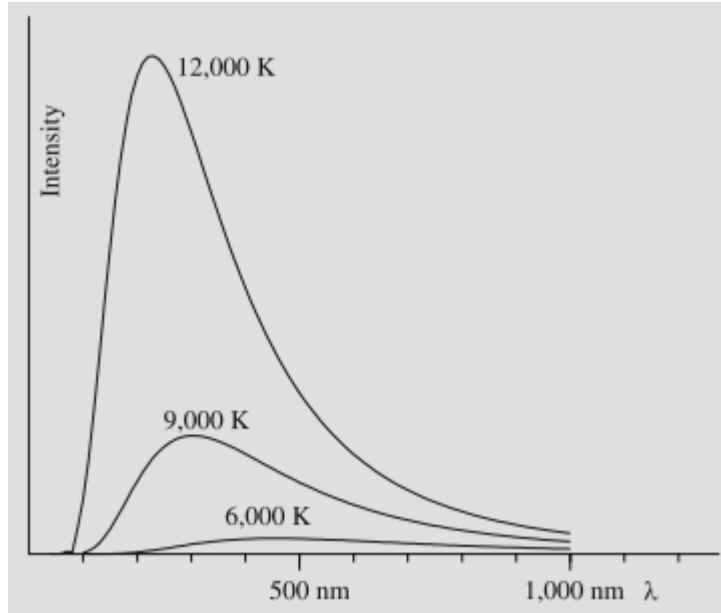
Zoals kan gezien worden op de grafiek neemt de golflengte van de maximum intensiteit af wanneer de totale intensiteit (wat gelijk is aan de oppervlakte onder de grafiek) toeneemt. We kunnen de golflengte λ_{\max} vinden dat overeenkomt met de maximum intensiteit door de functie $B_\lambda(T)$ af te leiden naar λ en het nulpunt te zoeken van de afgeleide. Het resultaat is de *verschuivingswet van Wien*:

$$\lambda_{\max} T = b = \text{constant},$$

waarbij de *constante van Wien* b gelijk is aan

$$b = 0.0028978 \text{ K m}.$$

We kunnen een gelijkaardige procedure gebruiken om het maximum te vinden van B_ν . Maar dus wordt de frequentie ν_{\max} niet verkregen via $\nu_{\max} = c/\lambda_{\max}$. De reden hiervoor is dat de intensiteiten worden weergegeven per eenheid van golflengte of per eenheid van frequentie, en de afhankelijkheid tussen frequentie en golflengte is niet lineair.



Indien de golflengte dicht bij het maximum ligt of veel groter is dan λ_{\max} kan de functie van Planck benaderd worden door een eenvoudigere uitdrukking. Indien $\lambda \approx \lambda_{\max}$ (of $hc/(\lambda kT) \gg 1$), hebben we

$$e^{hc/(\lambda kT)} \gg 1.$$

In dit geval krijgen we de *benadering van Wien*

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/(\lambda kT)}.$$

Wanneer $hc/(\lambda kT) \ll 1$ ($\lambda \gg \lambda_{\max}$), hebben we (Taylorbenadering)

$$e^{hc/(\lambda kT)} \approx 1 + hc/(\lambda kT),$$

wat ons de *benadering van Rayleigh-Jeans* geeft

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{hc} = \frac{2ckT}{\lambda^4}.$$

Dit is vooral handig in de radiosterrenkunde.

Indien we veronderstellen dat bij een gegeven golflengte λ de vermogensdichtheid F_λ verkregen wordt uit de wet van Planck (zie eerder), dan krijgen we de **helderheids-temperatuur** T_b . In het geval van isotrope straling hebben we dan $F_\lambda = \pi B_\lambda(T_b)$.

In de radiosterrenkunde wordt de helderheidstemperatuur gebruikt om de intensiteit (of oppervlaktehelderheid) van de bron uit te drukken. Indien de intensiteit bij een frequentie ν gelijk is aan I_ν , kan de helderheidstemperatuur verkregen worden uit

$$I_\nu = B_\nu(T_b).$$

T_b geeft dus de temperatuur weer van een zwart lichaam dat straalt met dezelfde oppervlaktehelderheid als de waargenomen bron.

Aangezien de golflengtes van radiogolven zeer groot zijn, is de voorwaarde $h\nu \ll kT$ voor de benadering van Rayleigh-Jeans meestal voldaan, en kunnen we de wet van Planck schrijven als

$$\begin{aligned} B_\nu(T_b) &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT_b)} - 1} \\ &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{1 + h\nu/(kT_b) + \dots - 1} \\ &\approx \frac{2k\nu^2}{c^2} T_b. \end{aligned}$$

zo krijgen we de volgende uitdrukking voor de helderheidstemperatuur die gebruikt wordt in de radiosterrenkunde:

$$T_b = \frac{c^2}{2k\nu^2} I_\nu = \frac{\lambda^2}{2k} I_\nu.$$

3. Antennetemperatuur

Een maat voor het signaal dat geregistreerd wordt door een radiotelescoop is de **antennetemperatuur**, T_A . Nadat de antennetemperatuur gemeten werd, krijgen we de helderheidstemperatuur uit

$$T_A = \eta T_b,$$

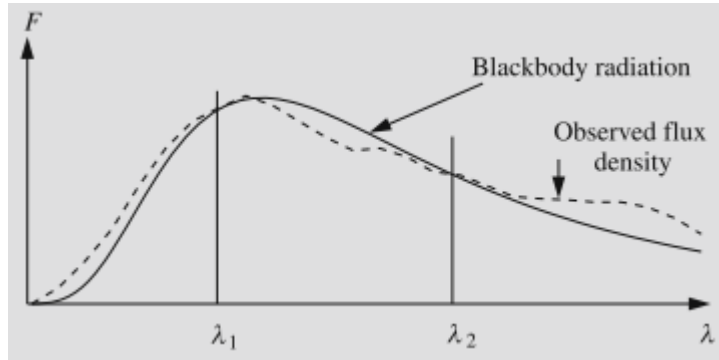
waar η gelijk is aan de *bundelefficiëntie* van de antenne (typisch is $0.4 \lesssim \eta \lesssim 0.8$). Deze vergelijking geldt indien de bron breed genoeg is om de ruimtehoek Ω_A waaronder de antenne de straling ontvangt te bedekken. Als de ruimtehoek Ω_S die door de bron wordt ingesloten kleiner is dan Ω_A , is de waargenomen antennetemperatuur gelijk aan

$$T_A = \eta \frac{\Omega_S}{\Omega_A} T_b, \quad (\Omega_S < \Omega_A).$$

4. Kleurtemperatuur, en geef een uitdrukking voor een zwarte straler in de benadering van Wien

De **kleurtemperatuur** T_C kan bepaald worden zelfs indien de hoekdiameter van de bron niet gekend is. We hoeven alleen de relatieve energiedistributie te kennen in een bepaald golflengtebereik $[\lambda_1, \lambda_2]$; de absolute waarde van het vermogen is niet nodig.

De waargenomen vermogensdichtheid in functie van de golflengte wordt vergeleken met de functie van Planck bij verschillende gegeven temperaturen. De temperatuur waarbij de twee functies het best samenvallen is de kleurtemperatuur in het interval $[\lambda_1, \lambda_2]$. De kleurtemperatuur is gewoonlijk verschillend voor verschillende intervallen, aangezien de vorm van de energieverdeling mogelijk erg kan verschillen van dat van het spectrum van het zwarte lichaam.



Een eenvoudige methode om de kleurtemperatuur te vinden gaat als volgt. We meten de vermogensdichtheid F'_λ bij twee golflengtes λ_1 en λ_2 . Indien we veronderstellen dat de intensiteitsdistributie de wet van Planck volgt, moet de verhouding van deze vermogensdichtheden gelijk zijn aan de verhouding gekregen uit de wet van Planck:

$$\frac{F'_{\lambda_1}(T)}{F'_{\lambda_2}(T)} = \frac{B_{\lambda_1}(T)}{B_{\lambda_2}(T)} = \frac{\lambda_2^5 e^{hc/(\lambda_2 kT)} - 1}{\lambda_1^5 e^{hc/(\lambda_1 kT)} - 1}.$$

De temperatuur T die uit deze vergelijking opgelost wordt is de kleurtemperatuur.

De waargenomen vermogensdichtheid komt overeen met zekere magnitudes m_{λ_1} en m_{λ_2} . De definitie van magnitudes geeft

$$m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} = -2.5 \log \frac{F'_{\lambda_1}}{F'_{\lambda_2}} + \text{const},$$

waarbij de constante term een gevolg is van de verschillende nulpunten op de magnitudeschalen. Indien de temperatuur niet te hoog is, kunnen we de benadering van Wien (zie eerder) gebruiken in het optisch deel van het spectrum:

$$\begin{aligned} m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} &= -2.5 \log \frac{B_{\lambda_1}}{B_{\lambda_2}} + \text{const} \\ &= -2.5 \log \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^5 + 2.5 \frac{hc}{kT} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \log e + \text{const}. \end{aligned}$$

Dit kan geschreven worden als

$$m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} = a + b/T_c,$$

waarbij a en b constanten zijn. Dit toont aan dat er een eenvoudige relatie bestaat tussen het verschil in twee magnitudes en de kleurtemperatuur.

5. Kinetische temperatuur

De *kinetische temperatuur* T_K houdt verband met de gemiddelde snelheid van gasmoleculen. De kinetische energie van een ideale gasmolecule is een functie van de temperatuur die volgt uit de kinetische gastheorie¹⁶ die zegt dat

$$T_K = \frac{mv^2}{3k},$$

waarbij m gelijk is aan de massa van het molecule, v diens gemiddelde snelheid (of liever de 'root-mean-square' snelheid, wat betekent dat v^2 gelijk is aan het gemiddelde van de snelheden in het kwadraat), en k de constante van Boltzmann (zie eerder). Voor ideale gassen staat de druk rechtstreeks in verhouding tot de kinetische temperatuur:

$$P = nkT_K,$$

waarbij n gelijk is aan het aantal moleculen per volume-eenheid.

6. Ionisatietemperatuur

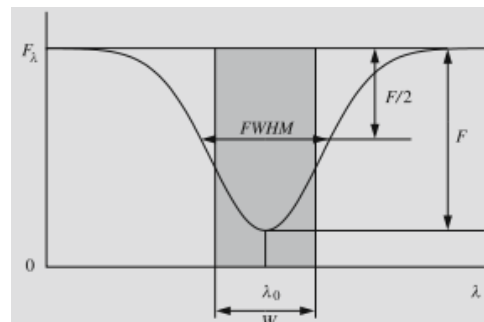
De ionisatietemperatuur T_i wordt gevonden door het aantal atomen in verschillende stadia van ionisatie te bekijken. Aangezien sterren niet exact zwarte lichamen zijn, zullen de waarden van excitatie en ionisatietemperaturen meestal variëren, afhankelijk van het element waarvan de spectraallijnen werd gebruikt voor het bepalen van de temperatuur.

Type III

FWHM.

Men zou denken dat spectraallijnen steeds fijn en scherp zouden zijn, maar in de realiteit zijn ze enigszins uitgestreker. De vorm van een spectraallijn wordt een *lijnprofiel* genoemd.

FWHM staat voor *full width at half maximum*, dit is de breedte van een lijnprofiel bij een diepte waar de intensiteit de helft van het maximum bedraagt. Het is een maat om een lijnsterkte uit te drukken.



Equivalente breedte van een absorptielijn.

De *equivalente breedte* is een andere maat om een lijnsterkte uit te drukken. Het is gelijk aan de breedte van een rechthoekige lijn die een hoogte heeft alsof die geen licht zou uitzenden en die dezelfde oppervlakte heeft als de oppervlakte van het lijnprofiel. De

¹⁶Deze formule zal worden afgeleid in hoofdstuk 10.

equivalente breedte kan gebruikt worden om de energie te beschrijven die overeenkomt met een lijn onafhankelijk van de vorm van het lijnprofiel.

Verboden overgang.

Kwantummechanica beschrijft het elektron als een driedimensionale golf, en geeft een zekere waarschijnlijkheid om een elektron op een bepaalde plaats terug te vinden. De kwantummechanische beschrijving neemt vier verschillende kwantumgetallen in betrekking, één ervan is n , het hoofdkwantumgetal (zie eerder). Het hoofdkwantumgetal beschrijft de gekwantiseerde energieniveaus van het elektron en kan willekeurige natuurlijke getalwaarden groter dan nul aannemen.

Het *nevenkwantumgetal* l , ook wel het *impulsmomentkwantumgetal* genoemd, bepaalt de vorm van het orbitaal van het atoom. De waarschijnlijke posities, met gezamenlijk een kans van 90% om het elektron er aan te treffen, vormen het orbitaal. Het is het trefkansgebied van een elektron binnen de grenzen van het atoom. Het kwantumgetal l kan alleen de volgende waarden aannemen:

$$l = 0, 1, \dots, n - 1.$$

De naam impulsmomentkwantumgetal is historisch bepaald en is gebaseerd op de voorstelling dat dit kwantumgetal het impulsmoment¹⁷ van het om de atoomkern draaiende elektron beschrijft.

Het *magnetisch kwantumgetal* van het impulsmoment wordt met m_l aangeduid en beschrijft de ruimtelijke oriëntatie van het baanimpulsmoment van het elektron. Het mag in waarde niet groter zijn dan het nevenkwantumgetal l , maar het mag wel negatieve waarden aannemen:

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

Het vierde kwantumgetal is het *spinkwantumgetal* en beschrijft de oriëntatie van de spin van het elektron. Het spinkwantumgetal s voor een elektron is gelijk aan $1/2$. Bij een spinkwantumgetal hoort een magnetisch spinkwantumgetal m_s , voor een elektron is dit dan

$$m_s = \pm \frac{1}{2},$$

het teken van m_s geeft de projectie van de spin weer in een gegeven richting z .

Ook is er nog het kwantumgetal j dat het totale impulsmoment van een elektron parametrizeert, door diens nevenkwantumgetal en spin te combineren. Dit kwantumgetal kan twee waarden aannemen:

$$j = l \pm \frac{1}{2},$$

(behalve voor $l = 0$, dan is $j = 1/2$). De z -component van het totale impulsmoment kan de volgende waarden aannemen:

$$m_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j.$$

¹⁷Het impulsmoment is een maat voor de "hoeveelheid draaibeweging" van een voorwerp.

De staat van een elektron kan niet willekeurig veranderen; overgangen zijn beperkt tot selectieregels die uit bepaalde behoudswetten volgen. De selectieregels drukken uit hoe een kwantumgetal moet veranderen bij een overgang. De meest waarschijnlijke zijn de *elektrische dipoolovergangen*, die doen het elektron zich gedragen als een soort van oscillerende dipool. De behoudswetten eisen dat we bij een overgang hebben dat

$$\begin{aligned}\Delta l &= \pm 1, \\ \Delta m_l &= 0, \pm 1.\end{aligned}$$

In termen van het totale impulsmoment zijn de selectieregels

$$\begin{aligned}\Delta l &= \pm 1, \\ \Delta j &= 0, \pm 1, \\ \Delta m_j &= 0, \pm 1.\end{aligned}$$

De waarschijnlijkheden voor andere overgangen zijn veel kleiner, deze worden *verboden overgangen* genoemd, en betreffen bijvoorbeeld de magnetische dipoolovergangen.

21 cm straling van het waterstofatoom.

Bij een magnetische dipoolovergang van een waterstofatoom wordt er een straling uitgezonden waarvan de golflengte 21 cm bedraagt, wat in de radioband van het spectrum gelegen is. Extinctie (zie eerder) bij radiogolflengtes is zeer klein. Hiermee kunnen we dus beter verder afgelegene objecten waarnemen dan bij het gebruik van optische golflengtes. De **21 cm straling** heeft tot nu toe een zeer belangrijke rol gespeeld bij het onderzoek naar interstellair waterstof.

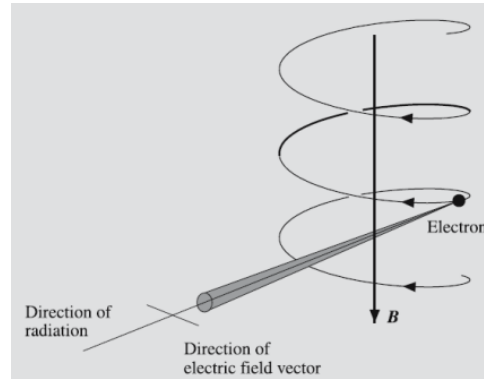
Maser en laser straling.

Er bevinden zich meestal meer atomen in het grondstadium dan in een geëxciteerde toestand. Er zijn echter manieren om een *populatie-inversie* te creëren, een geëxciteerde staat die minder atomen in het grondstadium bevat. Deze staat is essentieel voor zowel de *maser* als de *laser* (Microwave/Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Indien de geëxciteerde atomen nu belicht worden met fotonen die een energie dragen dat in waarde gelijk is aan de geëxciteerde energie, zal de straling neerwaartse overgangen induceren. Het aantal fotonen dat hierbij uitgezonden wordt is veel hoger dan het aantal geabsorbeerde fotonen, en de straling wordt versterkt. De toestand van excitatie is typisch een *metastabiele staat*, een staat minder stabiel dan de grondstaat, maar met een zeer lange gemiddelde levensduur, wat betekent dat de bijdrage van spontane emissie verwaarloosbaar is. Daarom is de resulterende stralengang coherent (zie geïnduceerde emissie) en monochromatisch¹⁸.

¹⁸Monochromatisch licht is licht van exact één golflengte. Monochromatisch licht heeft één enkele kleur.

Synchrotron straling

Een vrije lading in een versnelde beweging zal elektromagnetische straling uitzenden. Geladen deeltjes die in een magnetisch veld bewegen volgens een helix langs de veldlijnen. Gezien vanuit de richting van het veld, is de beweging circulair en dus versneld. De bewegende lading zal straling uitzenden in dezelfde richting als diens snelheidsvector. Deze straling wordt *synchrotron straling* genoemd.



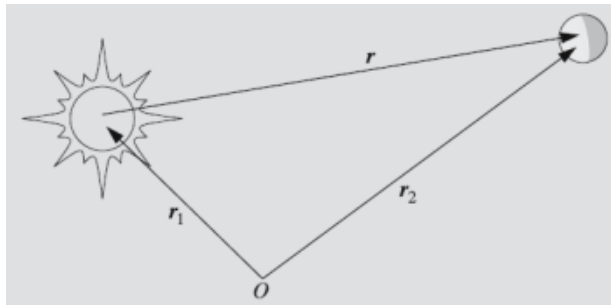
Vragen Hoofdstuk 6

Type I

Het tweelichamenvraagstuk:

1. Leid de bewegingsvergelijkingen af in de relatieve beweging.

We zullen ons concentreren op systemen die enkel uit twee lichamen bestaan. Laat ons om simpele redenen de twee lichamen de zon en een planeet noemen, hoewel het ook een planeet en diens maan, of twee componenten van een dubbelster kunnen zijn.



Zij de massa's van de lichamen gelijk aan m_1 en m_2 en de straalvectoren in een bepaald vast coördinatenstelsel \bar{r}_1 en \bar{r}_2 . De positie van een planeet ten opzichte van de zon wordt genoteerd door $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$. Volgens de gravitatiewet van Newton ondergaat de planeet een gravitationele aantrekkingskracht dat evenredig is met de massa's m_1 en m_2 en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand r . Sinds de kracht in de richting van de zon wijst kan het uitgedrukt worden als

$$\bar{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{-\bar{r}}{r} = -Gm_1m_2 \frac{\bar{r}}{r^3},$$

Waarbij G gelijk is aan de *gravitatieconstante*.

De tweede wet van Newton zegt ons dat de versnelling $\ddot{\bar{r}}_2$ van de planeet evenredig is met de uitgeoefende kracht:

$$\bar{F} = m_2 \ddot{\bar{r}}_2.$$

Combineren we deze twee vergelijkingen krijgen we de ***bewegingsvergelijking*** van een planeet:

$$m_2 \ddot{\bar{r}}_2 = -Gm_1m_2 \frac{\bar{r}}{r^3}.$$

Aangezien de zon dezelfde gravitatiekracht ondergaat, maar in de tegenovergestelde richting, kunnen we onmiddellijk de bewegingsvergelijking van de zon schrijven als:

$$m_1 \ddot{\bar{r}}_1 = +Gm_1m_2 \frac{\bar{r}}{r^3}.$$

We zijn vooral geïnteresseerd in de **relatieve beweging** van de planeet ten opzichte van de zon. Om de vergelijking van de relatieve baan te vinden, delen we de massa's die in beide leden voorkomen weg in deze twee laatste vergelijkingen en trekken we de laatste vergelijking af van de eerste, dit geeft

$$\ddot{\bar{r}} = -\mu \frac{\bar{r}}{r^3},$$

waarbij

$$\mu = G(m_1 + m_2).$$

2. Bewijs dat de vectoren $\bar{k} = \bar{r} \times \dot{\bar{r}}$ en $-\mu \bar{e} = \bar{k} \times \dot{\bar{r}} + \mu \bar{r}/r$ constante vectoren zijn.

We starten met aan te tonen dat het impulsmoment constant blijft. Het impulsmoment van de planeet in het heliocentrisch stelsel is

$$\bar{L} = m_2 \bar{r} \times \dot{\bar{r}}.$$

Bij hemelbewegingen wordt meestal de voorkeur gegeven aan het impulsmoment gedeeld door de massa van de planeet

$$\bar{k} = \bar{r} \times \dot{\bar{r}}.$$

Laat ons deze vergelijking afleiden naar de tijd:

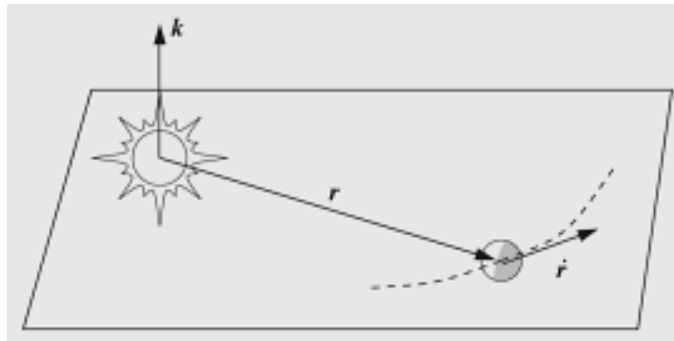
$$\dot{\bar{k}} = \dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}} + \bar{r} \times \ddot{\bar{r}}.$$

Deze laatste term verdwijnt als vectorproduct van twee parallelle vectoren. De eerste term bevat $\dot{\bar{r}}$, hetgeen gegeven wordt door de bewegingsvergelijking:

$$\dot{\bar{k}} = \bar{r} \times (-\mu \bar{r}/r^3) = (-\mu/r^3) \bar{r} \times \bar{r} = 0.$$

Dus is \bar{k} een constante vector onafhankelijk van de tijd (alook \bar{L} natuurlijk).

Aangezien de impulsmomentsvector altijd loodrecht staat op de beweging, wat volgt uit de definitie van het impulsmoment als vectorproduct, vindt de beweging steeds plaats in het invariant vlak loodrecht op \bar{k} .



Om een andere constante vector te vinden, berekenen we het vectorproduct $\bar{k} \times \ddot{\vec{r}}$:

$$\begin{aligned}\bar{k} \times \ddot{\vec{r}} &= (\bar{r} \times \dot{\vec{r}}) \times (-\mu\bar{r}/r^3) \\ &= -\frac{\mu}{r^3} [(\bar{r} \cdot \bar{r})\dot{\vec{r}} - (\bar{r} \cdot \dot{\vec{r}})\bar{r}],\end{aligned}$$

hetgeen volgt uit de formule van Lagrange:

$$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c.$$

De afgeleide van de afstand r naar de tijd is gelijk aan de projectie van $\dot{\vec{r}}$ op de richting van \bar{r} ¹⁹. We hebben dus $\dot{r} = \dot{\vec{r}} \cdot \bar{r}/r$, hetgeen geeft dat

$$\bar{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r\dot{r}.$$

Zodus,

$$\bar{k} \times \ddot{\vec{r}} = -\mu(\dot{\vec{r}}/r - \bar{r}\dot{r}/r^2) = \frac{d}{dt}(-\mu\bar{r}/r).$$

Het vectorproduct kan ook uitgedrukt worden als

$$\bar{k} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\bar{k} \times \dot{\vec{r}}),$$

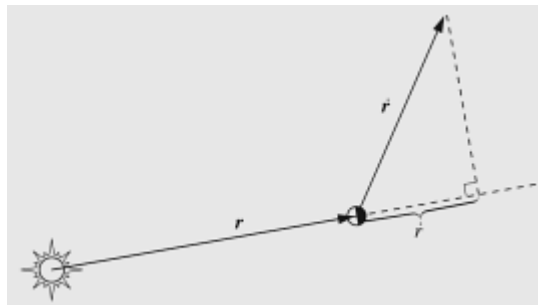
aangezien \bar{k} een constante vector is. Combineren we dit met de vorige vergelijking dan hebben we

$$\frac{d}{dt}(\bar{k} \times \dot{\vec{r}} + \mu\bar{r}/r) = 0$$

en

$$\bar{k} \times \dot{\vec{r}} + \mu\bar{r}/r = \text{const} = -\mu\bar{e}.$$

Aangezien \bar{k} loodrecht staat op het baanvlak, moet $\bar{k} \times \dot{\vec{r}}$ in dat vlak liggen. Dus is \bar{e} een lineaire combinatie van twee vectoren in het baanvlak, en ligt dus zelf ook in het baanvlak.



¹⁹Merk op dat $v = |\dot{\vec{r}}| \neq \dot{r} = v_r$, de radiale snelheid. Indien deze redenering ($v = \dot{r}$) wel zou gemaakt worden zou bijvoorbeeld bij een eenparig cirkelvormige beweging van de planeet rond de zon gelden dat $\dot{r} = v \neq 0$. Echter neemt de afstand r niet toe bij een eenparig cirkelvormige beweging en heeft dus als afgeleide naar de tijd $\dot{r} = 0 = v_r$.

3. Leid de energie integraal h af.

Een andere constante wordt gevonden door $\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$ uit te rekenen:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\mu \dot{\vec{r}} \cdot \bar{\vec{r}}/r^3 = -\mu r \dot{r}/r^3 = -\mu \dot{r}/r^2 = \frac{d}{dt}(\mu/r).$$

Aangezien er ook, wegens de symmetrie-eigenschap van het inproduct, geldt dat

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right),$$

krijgen we dat

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

of

$$\frac{1}{2}v^2 - \mu/r = \text{const} = h.$$

Hier staat v voor de snelheid van de planeet ten opzichte van de zon. De constante h wordt de **energie integraal** genoemd; de totale energie van de planeet wordt gegeven door $m_2 h$.

4. Bewijs dat $\mu^2(e^2 - 1) = 2hk^2$.

We hebben reeds dat

$$\bar{\vec{k}} \times \dot{\vec{r}} + \mu \bar{\vec{r}}/r = \text{const} = -\mu \bar{\vec{e}},$$

indien we beide leden kwadrateren dan krijgen we

$$\mu^2 e^2 = (\bar{\vec{k}} \times \dot{\vec{r}}) \cdot (\bar{\vec{k}} \times \dot{\vec{r}}) + \mu^2 \frac{\bar{\vec{r}} \cdot \bar{\vec{r}}}{r^2} + 2(\bar{\vec{k}} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \frac{\mu \bar{\vec{r}}}{r}.$$

Aangezien $\bar{\vec{k}}$ loodrecht staat op $\dot{\vec{r}}$, is de lengte van $\bar{\vec{k}} \times \dot{\vec{r}}$ gelijk aan $|\bar{\vec{k}}||\dot{\vec{r}}| = kv$ en $(\bar{\vec{k}} \times \dot{\vec{r}}) \cdot (\bar{\vec{k}} \times \dot{\vec{r}}) = k^2 v^2$. Zodus hebben we

$$\mu^2 e^2 = k^2 v^2 + \mu^2 + \frac{2\mu}{r} (\bar{\vec{k}} \times \dot{\vec{r}} \cdot \bar{\vec{r}}).$$

De laatste term bevat een triple product, deze heeft als eigenschap dat de operator voor het inwendig product en die voor het vectorieel product van plaats kunnen gewisseld worden: $\bar{\vec{k}} \cdot \dot{\vec{r}} \times \bar{\vec{r}}$. Vervolgens veranderen we de volgorde van de laatste twee termen in dit triple product, wegens de anticommutativiteit van het vectorproduct moeten we daardoor het teken veranderen:

$$\mu^2(e^2 - 1) = k^2 v^2 - \frac{2\mu}{r} (\bar{\vec{k}} \cdot \bar{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) = k^2 v^2 - \frac{2\mu}{r} k^2 = 2k^2 \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \right) = 2k^2 h.$$

5. Bewijs dat de baan een kegelsnede is, en leid de vergelijking af.

Om de geometrische vorm van de baan te vinden, leiden we de vergelijking van de baan af. Aangezien $\bar{\vec{e}}$ een constante vector is in het baanvlak, kiezen we het als

referentierichting. We noteren de hoek tussen de straalvector \bar{r} en \bar{e} door f . De hoek f wordt de *ware anomalie* (letterlijk *afwijking*) genoemd. Gebruik makend van de eigenschappen van het scalair product krijgen we

$$\bar{r} \cdot \bar{e} = r e \cos f.$$

Maar dit scalair product kan ook geëvalueerd worden gebruik makend van de definitie van \bar{e} :

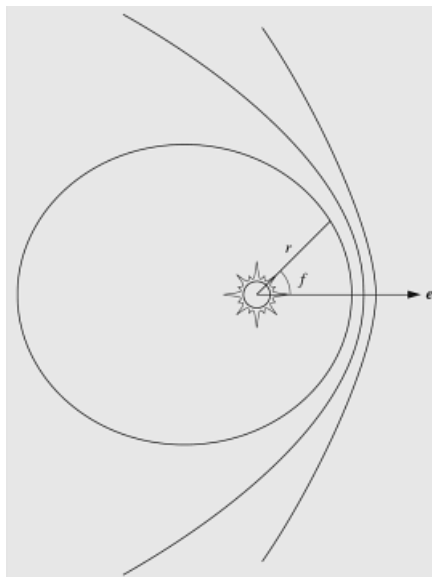
$$\begin{aligned} \bar{r} \cdot \bar{e} &= -\frac{1}{\mu}(\bar{r} \cdot \bar{k} \times \dot{\bar{r}} + \mu \bar{r} \cdot \bar{r}/r) \\ &= -\frac{1}{\mu}(\bar{k} \cdot \dot{\bar{r}} \times \bar{r} + \mu r) \\ &= -\frac{1}{\mu}(-k^2 + \mu r) \\ &= \frac{k^2}{\mu} - r. \end{aligned}$$

Stellen we de twee uitdrukkingen gekregen voor $\bar{r} \cdot \bar{e}$ aan elkaar gelijk dan krijgen we

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e \cos f}.$$

Dit is de algemene vergelijking voor een **kegelsnede** in poolcoördinaten. De grootte van e geeft ons de *excentriciteit* van de kegelvorm:

$e = 0$	cirkel,
$0 < e < 1$	ellips,
$e = 1$	parabool,
$e > 1$	hyperbool.



De eerste wet van Kepler zegt dat de baan van een planeet rond de zon een ellips is, waarvan de zon in één van de twee brandpunten ligt.

De algemene vergelijking van een kegelsnede in poolcoördinaten wordt gegeven door

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

waarbij e de excentriciteit en p de *parameter* van de kegelsnede is. We zien dat in ons geval de excentriciteit gewoon de grootte van de vector \bar{e} is. De parameter is $p = k^2/\mu$. Maar een eigenschap van kegelsnedes zegt dat de parameter steeds gelijk is aan $a|1 - e^2|$, wat de lengte van de halve lange as geeft indien k en e gekend zijn:

$$a = \frac{k^2/\mu}{|1 - e^2|}.$$

Gebruik makend van $\mu^2(e^2 - 1) = 2hk^2$ krijgen we een belangrijke relatie tussen de grootte van de baan en de energie integraal h :

$$a = \begin{cases} -\mu/2h, & \text{als de baan een ellips is,} \\ \mu/2h, & \text{als de baan een hyperbool is.} \end{cases}$$

6. Geef de 6 baanelementen, en maak een behoorlijke tekening.

De *tijd van het perihelium* τ is de tijd wanneer de planeet het perihelium passeert. Het perihelium is het punt op de baan van een planeet of ander object dat in een baan om de zon draait, dat het dichtst bij de zon gelegen is. Objecten met een elliptische baan hebben ook nog een aphelium, waar de baan de grootste afstand tot de zon bereikt. Het perihelium is ook de plaats waar de vector \bar{e} naartoe wijst.

De inclinatie i geeft de helling van het baanvlak weer ten op zichte van een referentievlak. Voor lichamen in het zonnestelsel is dit referentievlak gewoonlijk de ecliptica. Voor objecten die zich tegen de klok in voortbewegen ligt de inclinatie in het interval $[0^\circ, 90^\circ]$, voor objecten die zich met de klok mee voort bewegen ligt de inclinatie in het interval $]90^\circ, 180^\circ]$.

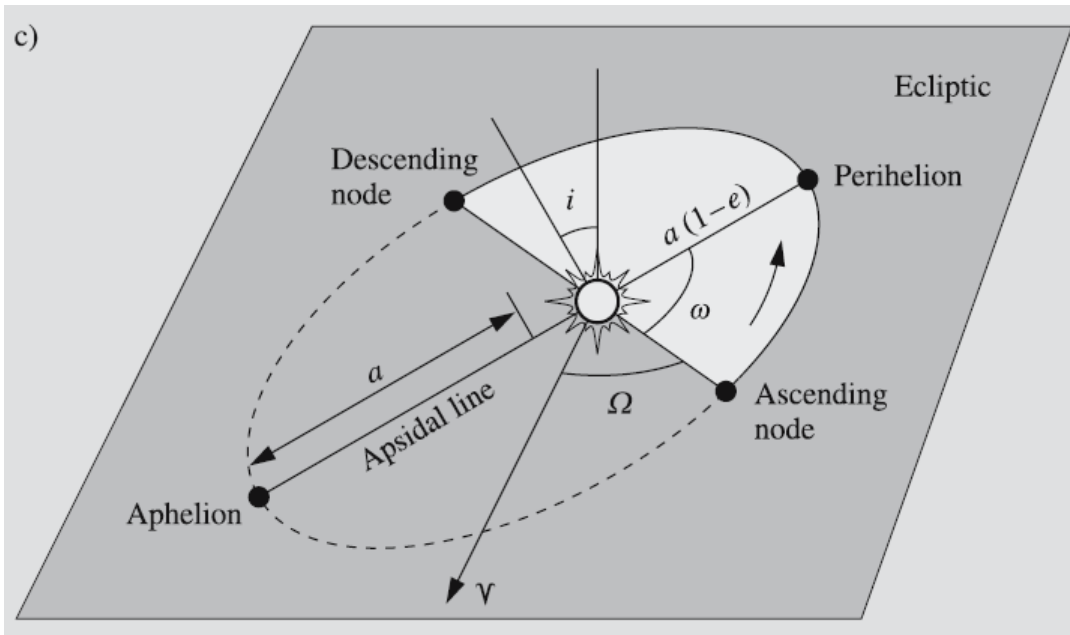
De lengte van de klimmende knoop Ω duidt de plaats aan waar het object de eplicta doorkruist van zuid naar noord. Het wordt tegen de klok in gemeten vanaf het lentepunt.

Het argument van het perihelium ω geeft de richting weer van het perihelium, en wordt gemeten vanaf de klimmende knoop volgens de bewegingsrichting.

De **6 baanelementen** zijn:

- de helft van de lengte van de lange as a ,
- de excentriciteit e ,
- de inclinatie i ,

- de lengte van de klimmende knoop Ω ,
- het argument van het perihelium ω ,
- de tijd van het perihelium τ .



7. Bewijs de 2de en 3de wet van Kepler.

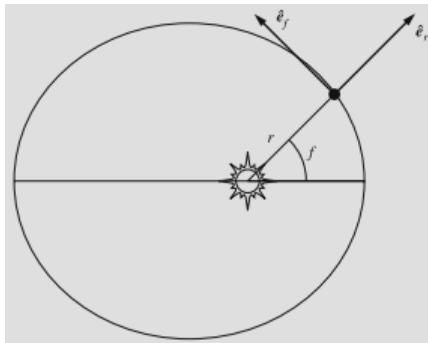
De straalvector van een planeet in poolcoördinaten is simpelweg

$$\vec{r} = r\hat{e}_r,$$

waarbij \hat{e}_r een eenheidsvector is parallel met \vec{r} . Indien de planeet met een hoeksnelheid \dot{f} beweegt, dan verandert de richting van deze eenheidsvector met eenzelfde snelheid. Via een overgang van pool- naar cartesische coördinaten kan men vaststellen dat

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{f}\hat{e}_f,$$

waarbij \hat{e}_f een eenheidsvector is loodrecht op \hat{e}_r .



De snelheid van de planeet bedraagt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r.$$

Het impulsmoment \vec{k} is nu

$$\vec{k} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = r^2 \dot{f} \hat{e}_z,$$

waarbij \hat{e}_z een eenheidsvector is loodrecht op het baanvlak. De grootte van \vec{k} bedraagt

$$k = r^2 \dot{f}.$$

De *oppervlaktesnelheid* van een planeet betekent de oppervlakte doorkruist door de straalvector per eenheid van tijd. Dit is duidelijk de afgeleide naar de tijd van een bepaalde oppervlakte, dus laten we het \dot{A} noemen. In een infinitesimale tijd dt doorkruist de planeet een driehoek met basis r en hoogte $r df$, bijgevolg hebben we

$$dA = \frac{1}{2} r^2 df,$$

delen we deze vergelijking door dt dan krijgen we

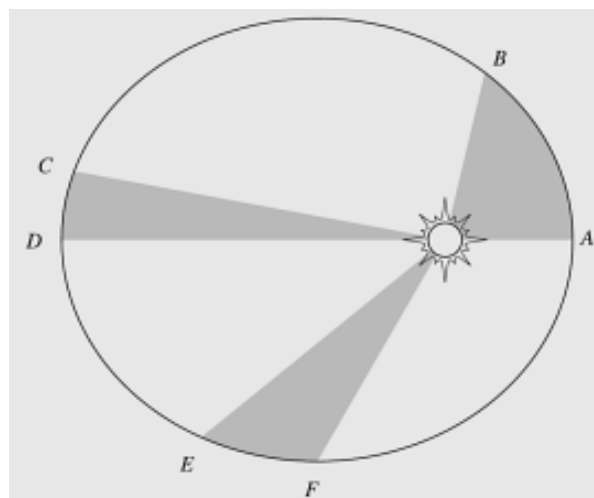
$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{f}.$$

Vergelijken we dit met de lengte van \vec{k} dan vinden we dat

$$\dot{A} = \frac{1}{2} k.$$

Aangezien k constant is, is de oppervlaktesnelheid dit ook. Hieruit volgt de tweede wet van Kepler:

De straalvector van een planeet doorkruist dezelfde oppervlakte in dezelfde tijd.



Aangezien de afstand van de zon tot een planeet varieert, moet de baansnelheid dus ook variëren. Uit de tweede wet van Kepler volgt dat een planeet het snelst beweegt wanneer die zich het dichtst bij de zon bevindt (nabij het perihelium). De beweging gaat het traagst wanneer de planeet zich het verst van de zon bevindt bij het *aphelium*.

We kunnen de gevonden vergelijking voor \dot{A} herschrijven als

$$dA = \frac{1}{2}k dt,$$

en we integreren dit over de hele periode:

$$\int_{\text{baanellips}} dA = \frac{1}{2}k \int_0^P dt,$$

waarbij P de baanperiode bedraagt. Aangezien de oppervlakte van een ellips gegeven wordt door

$$\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

waarbij a en b respectievelijk de halve lange as en de halve korte as zijn en e de excentriciteit, krijgen we

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2}kP.$$

Om de grootte van \bar{k} te vinden substitueren we de energie integraal h als functie van de halve grote as voor een ellips ($h = \mu/(2a)$) in de vergelijking $\mu^2(e^2 - 1) = 2hk^2$, we vinden dat

$$k = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)} = \sqrt{G(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}.$$

Substitueren we dit in de vorige vergelijking dan vinden we

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3.$$

Dit is de exacte vorm van de derde wet van Kepler zoals afgeleid uit de wetten van Newton.

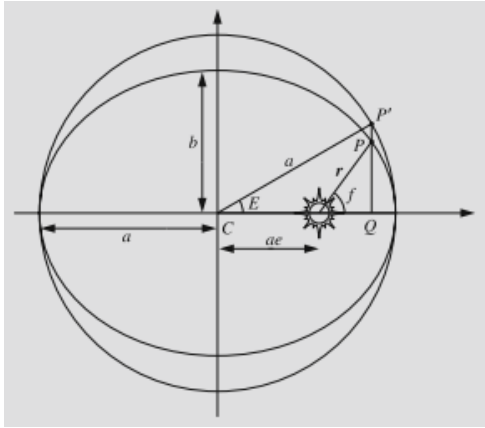
De originele vorm van de wet was:

de verhouding van de derde machten van de lengtes van de halve as van de banen
van twee planeten is gelijk aan de verhouding van de kwadraten van hun
baanperiodes.

In deze vorm is de wet echter niet exact geldig, zelfs niet voor planeten van het zonnestelsel, sinds hun eigen massa ook de periode beïnvloedt. De fouten die kunnen ontstaan door dit te negeren zijn echter zeer klein.

Type II

Definieer ware anomalie en excentrische anomalie. Maak een behoorlijke tekening, en leid de vergelijking van Kepler af.



We kunnen nog steeds niet de locatie van een planeet op diens baan vinden gegeven een bepaald tijdstip. De variabele in de vergelijking voor de baan is een hoek, de **ware anomalie** f , gemeten vanaf het perihelium. Uit de tweede wet van Kepler volgt dat f niet met een constante snelheid kan toenemen. Daarom hebben we enige voorbereiding nodig voor we de straalvector gegeven een bepaald tijdstip kunnen vinden.

De straalvector kan worden uitgedrukt door

$$\bar{r} = a(\cos E - e)\hat{i} + b \sin E \hat{j},$$

waarbij \hat{i} en \hat{j} eenheidsvectoren zijn parrallel met respectievelijk de grote en de kleine as. Hier vinden we de factor bij \hat{i} uit de figuur, de factor bij \hat{j} vinden we vervolgens uit de vergelijking van een ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hier is $x = ae + a(\cos E - e) = a \cos E$ en y is de gezochte factor bij \hat{j} . De hoek E is de **excentrische anomalie**. Vele formules van elliptische bewegingen worden zeer eenvoudig indien ofwel de tijd ofwel de ware anomalie vervangen wordt door de excentrische anomalie. Als voorbeeld nemen we het kwadraat van de vergelijking voor \bar{r} om de afstand tot de zon te vinden:

$$\begin{aligned} r^2 &= \bar{r} \cdot \bar{r} \\ &= a^2(\cos E - e)^2 + b^2 \sin^2 E \\ &= a^2[(\cos E - e)^2 + (1 - e^2)(1 - \cos^2 E)] \\ &= a^2[\cos^2 E - 2e \cos E + e^2 + 1 - \cos^2 E - e^2 + e^2 \cos^2 E] \\ &= a^2[1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E] \\ &= a^2(1 - e \cos E)^2, \end{aligned}$$

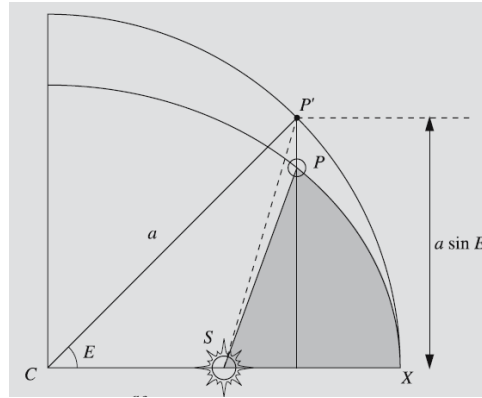
waaruit

$$r = a(1 - e \cos E).$$

Ons volgend probleem is om E te berekenen bij een gegeven tijdstip. Volgens de tweede wet van Kepler is de oppervlaktesnelheid constant. Aangezien de oppervlakte van een ellips gelijk is aan πab is de oppervlakte van het donkere fragment in de figuur dus gelijk aan

$$A = \pi ab \frac{t - \tau}{P},$$

waarbij $t - \tau$ gelijk is aan de verstreken tijd sinds het perihelium en P de baanperiode. Maar een wiskundige eigenschap zegt dat de oppervlakte van een deel van de ellips verkregen wordt door de oppervlakte van het overeenkomstig deel van de omschreven cirkel te reduceren met een axiale verhouding van b/a . (Zoals de wiskundigen zeggen is een ellips een affiene transformatie van een cirkel, het zal dan althans ik niet zijn die dat heel de dagen loop te verkondigen, ik heb andere dingen te doen met m'n leven.) Zodus is de oppervlakte van SPX



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{b}{a}(\text{oppervlakte van } SP'X) \\
 &= \frac{b}{a}(\text{oppervlakte van de sector } CP'X - \text{oppervlakte van de driehoek } CP'S) \\
 &= \frac{b}{a} \left(\frac{1}{2}a \cdot aE - \frac{1}{2}ae \cdot a \sin E \right) \\
 &= \frac{1}{2}ab(E - e \sin E).
 \end{aligned}$$

Door deze laatste twee uitdrukking voor A aan elkaar gelijk te stellen, krijgen we de beroemde **vergelijking van Kepler**,

$$E - e \sin E = M,$$

waarbij

$$M = \frac{2\pi}{P}(t - \tau)$$

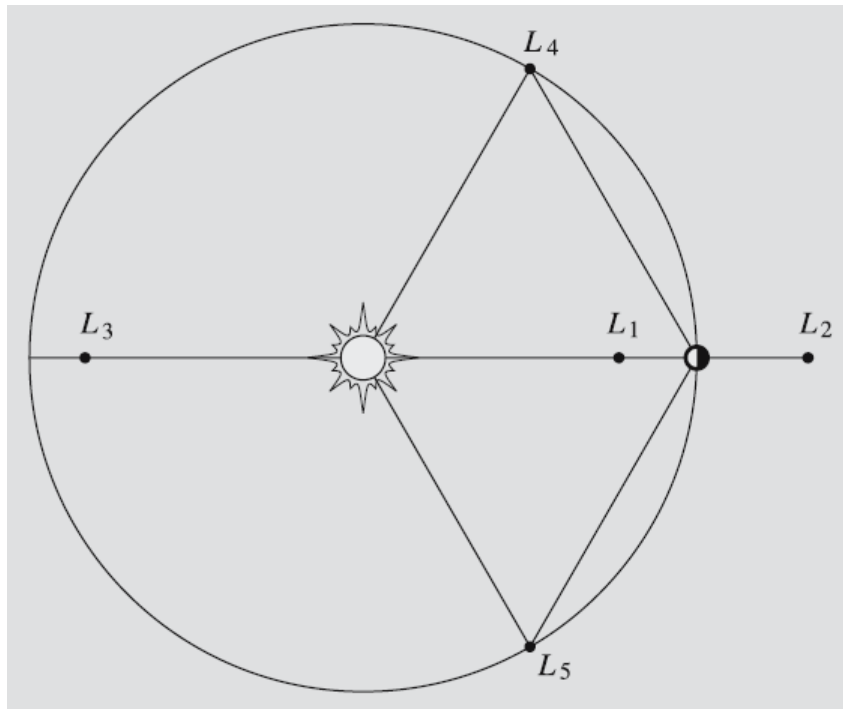
de *middelbare anomalie* is van een planeet gegeven een tijdstip t . De middelbare anomalie stijgt met een constant tempo in de tijd. Het duidt aan waar de planeet zich zou bevinden indien het zich zou voortbewegen volgens een cirkel met straal a . Voor circulaire banen zijn de drie anomalieën f , E en M steeds gelijk.

Type III

Schets het beperkt drielichamenvraagstuk, en duid de 5 Lagrangepunten aan. Wat is hun betekenis?

De 5 **Langrangepunten** zijn punten in het drielichamenvraagstuk waar het derde object in rust kan blijven ten op zichte van de eerste twee objecten. Drie van deze punten bevinden zich op een rechte lijn die bepaald wordt door de eerste twee objecten. Deze

drie punten zijn onstabiel: indien een object in één van deze punten verstoord wordt dan zal het aan het systeem ontsnappen. De twee andere punten zijn wel stabiel, en vormen samen met de twee eerste lichamen gelijkzijdige driehoeken.

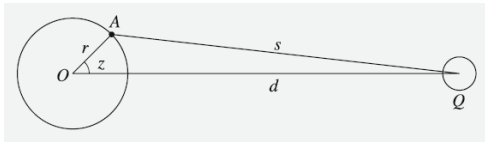


Vragen Hoofdstuk 7

Type I

Leid de getijdenvergelijking van Laplace af.

Gravitationele verschillen die door de maan en de zon op verschillende plaatsen aan het oppervlak van de aarde veroorzaakt worden, leiden tot *getijden*. Gravitatie is het grootst bij de geografische positie van de aarde waar de maan in het zenit staat en het kleinst aan de tegenovergestelde kant van de aarde. Op deze eerste positie staat het zeeoppervlak het hoogst (hoogtij, *vloed*). Ongeveer 6 h na vloed, staat het oppervlak het laagst (laagtij, *eb*). Het getij dat veroorzaakt wordt door de zon is minder dan de helft dan dat van de maan. Als de maan precies tussen de aarde en de zon staat (nieuwe maan) dan bereikt dit getij een maximum, dit wordt *springtij* genoemd.



Laat het lichaam dat het getij veroorzaakt, met een massa M , zich bevinden op een positie Q op een afstand d van het midden van de aarde. De potentiaal V op een punt A veroorzaakt door het lichaam Q wordt gegeven door

$$V(A) = \frac{GM}{s},$$

waarbij s gelijk is aan de afstand van het punt A tot het lichaam Q .

Passen we de cosinusregel toe in de driehoek OAQ , dan kan de afstand s uitgedrukt worden in termen van de andere zijden van de driehoek en de hoek $z = \hat{AOQ}$

$$s^2 = d^2 + r^2 - 2dr \cos z,$$

Waarbij r gelijk is aan de afstand van het punt A tot het centrum van de aarde. Substitueren we dit in de eerste vergelijking dan krijgen we

$$V(A) = \frac{GM}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos z}}.$$

Wanneer de noemer wordt uitgedrukt met een Taylorreeks

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots$$

waarbij

$$x = \frac{r^2}{d^2} - 2\frac{r}{d} \cos z$$

en we alle termen met een orde groter dan of gelijk aan 4 bij de term met factor d^{-1} negeren, dan hebben we

$$\begin{aligned} V(A) &= \frac{GM}{d} \left(1 + \frac{r^2}{d^2} - 2\frac{r}{d} \cos z \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{GM}{d} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{d^2} + \frac{r}{d} \cos z + \frac{3}{2} \frac{r^2}{d^2} \cos^2 z \right) \\ &= \frac{GM}{d} + \frac{GM}{d^2} r \cos z + \frac{GM r^2}{d^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 z - 1). \end{aligned}$$

Indien men van $V(A)$ de gradiënt zou nemen zou men een krachtvector per eenheid van massa krijgen. Hierbij zou de eerste term verdwijnen en de tweede term een constante onafhankelijk van r geven. De derde term is dus de voornaamste term bij de getijdenkracht. Zoals men kan zien is deze term omgekeerd evenredig met d tot de derde macht. De getijdenkrachten nemen dus zeer snel af wanneer de afstand tot een lichaam toeneemt, wat verklaart waarom de getijdenkracht veroorzaakt door de zon minder dan de helft is dan die veroorzaakt door de maan, ondanks de veel grotere massa van de zon.

We kunnen de derde term schrijven als

$$V_2 = 2D \left(\cos^2 z - \frac{1}{3} \right),$$

waarbij

$$D = \frac{3}{4} GM \frac{r^2}{d^3}$$

De *getijdeconstante van Doodson* wordt genoemd. Diens waarde voor de maan bedraagt $2.628 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ en voor de zon $1.208 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$. Er kan benaderd worden dat z de zenithhoek²⁰ is van het lichaam. Via de transformatieformules uit hoofdstuk 2 (met $a = 90^\circ - z$) kan de zenithhoek z uitgedrukt worden in termen van de uurhoek h , de declinatie δ van het lichaam en de breedtegraad ϕ van de waarnemer

$$\cos z = \cos h \cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi.$$

Substitueren we dit in de vergelijking voor V_2 dan krijgen we na een lange algebraïsche bewerking dat

$$\begin{aligned} V_2 &= D \left(\cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2h + \sin 2\phi \cos 2\delta \cos h + (3 \sin^2 \phi - 1) \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \right) \\ &= D(S + T + Z). \end{aligned}$$

Deze vergelijking is de traditionele basisvergelijking van het getijdenpotentiaal, de **getijdenvergelijking van Laplace**.

²⁰De zenithhoek is de hoek tussen het punt onmiddellijk boven de waarnemer en het centrum van het lichaam.

Albedo theorie:

De planeten en alle andere lichamen in het zonnestelsel reflecteren enkel het zonlicht (we kunnen hier de straling van warmte- en radiogolven verwaarlozen en ons hoofdzakelijk op visuele golflengtes concentreren). De helderheid van een lichaam hangt af van diens afstand tot de zon en de aarde, en de albedo van het oppervlak. De term **albedo** definieert het vermogen van een lichaam om licht te reflecteren.

1. Bond albedo A

Indien de lichtkracht van de zon L_{\odot} bedraagt, wordt de vermogensdichtheid op een afstand r gegeven door

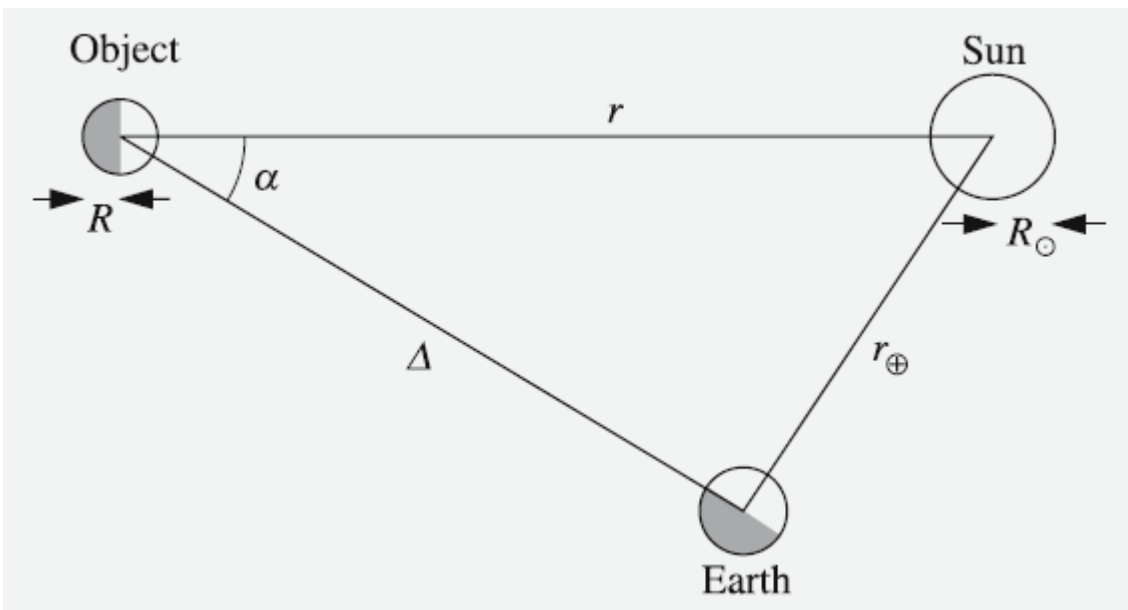
$$F = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2}.$$

Indien de straal van de planeet R is, dan bedraagt de oppervlakte van diens doorsnede πR^2 , en het totale vermogen dat invalt op dit oppervlak bedraagt

$$L_{\text{in}} = \pi R^2 \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = \frac{L_{\odot} R^2}{4r^2}.$$

Enkel een deel van dit vermogen wordt teruggereflecteerd. Het andere deel wordt geabsorbeerd en geconverteerd in warmtestraling wat vervolgens uitgezonden wordt als warmte-emissie van de planeet. De **Bond albedo** A (of sferische albedo) wordt gedefinieerd als de verhouding van het uittredend vermogen tot het intredend vermogen ($0 \leq A \leq 1$). Het vermogen gereflecteerd door de planeet is dus

$$L_{\text{out}} = AL_{\text{in}} = \frac{AL_{\odot} R^2}{4r^2}.$$



2. Fase functie $\phi(\alpha)$

De planeet wordt geobserveerd op een afstand Δ . Indien de straling isotroop wordt gereflecteerd, dan zou de waargenomen vermogensdichtheid gelijk moeten zijn aan

$$F = \frac{L_{\text{out}}}{4\pi\Delta^2}.$$

In werkelijkheid wordt de straling echter anisotroop gereflecteerd, dus wel afhankelijk van de richting. Indien we veronderstellen dat het reflecterend object een homogene sfeer is, dan hangt de distributie van de gereflecteerde straling enkel af van de fasehoek α . Zodus kunnen we de vermogensdichtheid op een afstand Δ uitdrukken als

$$F = C\Phi(\alpha)\frac{L_{\text{out}}}{4\pi\Delta^2}.$$

De functie Φ is afhankelijk van de fasehoek en wordt de **fasefunctie** genoemd. De functie wordt genormaliseerd zodanig dat $\Phi(\alpha = 0^\circ) = 1$.

3. Fase integraal

Aangezien alle straling dat gereflecteerd wordt door de planeet ergens op het oppervlak van de sfeer met straal Δ wordt teruggevonden, moet er gelden dat

$$\int_S C\Phi(\alpha)\frac{L_{\text{out}}}{4\pi\Delta^2} dS = L_{\text{out}}$$

of

$$\frac{C}{4\pi\Delta^2} \int_S \Phi(\alpha) dS = 1,$$

waarbij de integratie gedaan wordt over de hele oppervlakte van de sfeer. Een oppervlakte-element in bolcoördinaten van zo'n sfeer is $dS = \Delta^2 d\alpha \sin \alpha d\phi$, en we hebben dat

$$\begin{aligned} \int_S \Phi(\alpha) dS &= \Delta^2 \int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \Phi(\alpha) \sin(\alpha) d\alpha d\phi \\ &= \Delta^2 2\pi \int_0^{\pi} \Phi(\alpha) \sin(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

De normalisatieconstante C is

$$C = \frac{4\pi\Delta^2}{\int_S \Phi(\alpha) dS} = \frac{2}{\int_0^{\pi} \Phi(\alpha) \sin \alpha d\alpha}.$$

De grootheid

$$q = 2 \int_0^{\pi} \Phi(\alpha) \sin \alpha d\alpha$$

is de **fase integraal**. In termen van de fase integraal is de normalisatieconstante

$$C = \frac{4}{q}.$$

4. Geometrisch albedo p

Wegens $L_{\text{out}} = AL_{\text{in}}$ kunnen we de vergelijking

$$F = C\Phi(\alpha)\frac{L_{\text{out}}}{4\pi\Delta^2}$$

schrijven als

$$F = \frac{CA}{4\pi}\Phi(\alpha)\frac{1}{\Delta^2}L_{\text{in}}.$$

De eerste factor is kenmerkend voor ieder object, de tweede geeft de afhankelijkheid van de fasehoek weer, de derde de afhankelijkheid van de afstand en de vierde het intredend vermogen. De eerste factor wordt vaak genoteerd met

$$\Gamma = \frac{CA}{4\pi}.$$

Indien we dit in termen van de fase integraal oplossen naar A dan krijgen we

$$A = \frac{4\pi\Gamma}{C} = \pi\Gamma\frac{4}{C} = \pi\Gamma q = pq.$$

Hier wordt $p = \pi\Gamma$ de **geometrische albedo** genoemd, q is de reeds geïntroduceerde fase integraal. Deze grootheden staan in relatie via

$$A = pq.$$

5. Het speciaal geval van een Lambertiaanse straler en aansluitend de fysische interpretatie van p .

De geometrische albedo komt precies over als een willekeurige factor zonder enige fysische interpretatie. We zullen nu deze grootheid proberen te verklaren gebruik makend van een *Lambertoppervlak*. Een Lambertoppervlak is gedefinieerd als een absoluut wit, diffuus²¹ oppervlak dat alle straling reflecteert, met dus een Bond albedo van $A = 1$. Daarenboven is de oppervlaktehelderheid (intensiteit) van een Lambertoppervlak gelijk voor alle kijkrichtingen, wat betekent dat de fasefunctie²² gelijk is aan

$$\Phi(\alpha) = \begin{cases} \cos(\alpha), & \text{als } 0 \leq \alpha \leq \pi/2, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

In de werkelijkheid bestaat zo'n oppervlak echter niet maar er zijn enkele materialen die zich bijna gelijkaardig gedragen als een Lambertoppervlak. Een matte witte muur is bijvoorbeeld een zeer goede benadering; hoewel het niet alle intredende straling reflecteert is de lichtdistributie van het gereflecteerd licht ongeveer goed, en diens helderheid lijkt hetzelfde in alle richtingen.

²¹Bij diffuse reflectie wordt een intredende lichtstraal onder vele hoeken gereflecteerd in tegenstelling tot onder juist één hoek.

²²Voor meer informatie over de verklaring van deze factor $\cos(\alpha)$ zie de website http://graphics.wikia.com/wiki/Lambert's_cosine_law.

Voor een Lambertoppervlak is de constante C

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{\int_0^\pi \Phi(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha} \\ &= \frac{2}{\int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha \, d\alpha} \\ &= \frac{2}{\int_0^\pi \frac{\sin 2\alpha}{2} \, d\alpha} \\ &= \frac{2}{1/2} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Dus de geometrische albedo van een Lambertoppervlak is

$$p = \pi\Gamma = \frac{CA}{4} = \frac{4 \times 1}{4} = 1.$$

Bij een fasehoek van nul graden is $\Phi(\alpha = 0^\circ) = 1$ en de gereflecteerde vermogensdichtheid is

$$F = \frac{CA}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2} L_{\text{in}}.$$

Indien we het object veranderen door een Lambertoppervlak van dezelfde grootte, krijgen we

$$F_L = \frac{4}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2} L_{\text{in}}.$$

De verhouding van deze vermogensdichtheden is

$$\frac{F}{F_L} = \frac{CA}{4} = \pi\Gamma = p.$$

We hebben dus een fysische interpretatie gekregen voor p : de geometrische albedo is de verhouding van de vermogensdichtheden bij een fasehoek $\alpha = 0^\circ$ gereflecteerd door een planeet en een Lambertoppervlak met dezelfde doorsnede.

Type II

Leid een uitdrukking af voor druk en dichtheid van een atmosfeer als functie van de hoogte.

Met uitzondering van Mercurius, hebben alle hoofdplaneten een atmosfeer. De compositie, dikte, dichtheid en structuur van een atmosfeer verschillen van planeet tot planeet, maar er kunnen een aantal algemene kenmerken worden gevonden.

Laten we eerst de afhankelijkheid van de druk P en de dichtheid ρ van de hoogte h bepalen. Laat ons een cilinder met een lengte dh beschouwen. De verandering in druk dP van de hoogte h naar $h + dh$ staat in verhouding met de massa van het gas in de cilinder:

$$dP = -g\rho dh,$$

waarbij g de valversnelling is. Deze vergelijking is de *hydrostatische evenwichtsvergelijking*.

Voor een eerste benadering kunnen we veronderstellen dat g onafhankelijk is van de hoogte. In het geval van de aarde is de foutmarge ongeveer maar 3% indien g als constant wordt beschouwd van het aardoppervlak tot een hoogte van 100 km.

De ideale gaswet beschrijft het gedrag van ideale gassen onder invloed van druk, volume, temperatuur en aantal deeltjes. De wet zegt

$$PV = NkT$$

dit geeft een uitdrukking voor de druk P

$$P = \frac{\rho kT}{\mu},$$

waarbij N het aantal atomen of moleculen is, k de constante van Boltzmann (precies veel nodig, chance dat we die mens hadden), μ de massa van één atoom of molecule en

$$\rho = \frac{\mu N}{V}.$$

Door gebruik te maken van de hydrostatische evenwichtsvergelijking en de vergelijking voor P krijgen we

$$\frac{dP}{P} = -g \frac{\mu}{kT} dh.$$

Integratie geeft P in functie van de hoogte:

$$\begin{aligned} P &= P_0 \exp\left(-\int_0^h \frac{\mu g}{kT} dh\right) \\ &= P_0 \exp\left(-\int_0^h \frac{dh}{H}\right). \end{aligned}$$

De variabele H , die lengte als dimensie heeft, wordt de *schaalhoogte* genoemd:

$$H = \frac{kT}{\mu g}.$$

H is een functie van de hoogte, maar we kunnen hier veronderstellen dat die constant is. Dus de schaalhoogte definieert de hoogte waar de druk met een factor e is afgenomen. Met deze benadering krijgen we

$$-\frac{h}{H} = \ln \frac{P}{P_0}$$

of gebruik makend van de uitdrukking voor P die we vonden via de ideale gaswet,

$$\frac{\rho T(h)}{\rho_0 T_0} = e^{-h/H}.$$

Geef een uitdrukking voor de oppervlaktetemperatuur van een planeet als een functie van de afstand tot de zon.

Warmtestraling van hemellichamen in ons zonnestelsel hangt af van de albedo en de afstand tot de zon, of dus van de hoeveelheid geabsorbeerde straling. Interne warmte is belangrijk bij Jupiter en Saturnus, maar we kunnen het voorlopig verwaarlozen.

Door de wet van Stefan-Boltzmann (zie eerder), kan het vermogen aan het oppervlak van de zon geschreven worden als

$$L = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4.$$

Met R_{\odot} de straal van de zon en T_{\odot} de temperatuur. Indien de Bond albedo van het lichaam gelijk is aan A , dan geldt

$$L_{\text{abs}} = L_{\text{in}} - L_{\text{out}} = L_{\text{in}} - AL_{\text{in}} = (1 - A)L_{\text{in}}.$$

Met L_{abs} het geabsorbeerde vermogen. De fractie straling dat door de planeet wordt geabsorbeerd is dus gelijk aan $(1 - A)$. Dit wordt later terug uitgezonden onder de vorm van warmte. Indien het lichaam zich op een afstand r van de zon bevindt, is het geabsorbeerde vermogen gelijk aan

$$L_{\text{abs}} = \frac{R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 \pi R^2}{r^2} (1 - A),$$

met R de straal van het lichaam (zie eerder voor de formule voor L_{in}). Er zijn een aantal goede redenen waarom we kunnen aannemen dat het lichaam zich in een *thermisch evenwicht* bevindt, d.i. dat de uitgestraalde en geabsorbeerde vermogens gelijk zijn. Indien niet, zou het lichaam opwarmen of afkoelen tot een evenwicht is bereikt.

Laat ons eerst veronderstellen dat het lichaam langzaam roteert. De donkere zijde heeft tijd gehad om af te koelen, en de warmtestraling wordt hoofdzakelijk door één hemsfeer uitgestraald. Het uitgestraald vermogen is wegens Boltzmann

$$L_{\text{em}} = 2\pi R^2 \sigma T^4,$$

waarbij T gelijk is aan de temperatuur van het lichaam en $2\pi R^2$ de oppervlakte van één hemsfeer. Bij een thermisch evenwicht is $L_{\text{abs}} = L_{\text{em}}$ of dus

$$\frac{R_{\odot}^2 T_{\odot}^4}{r^2} (1 - A) = 2T^4,$$

waaruit

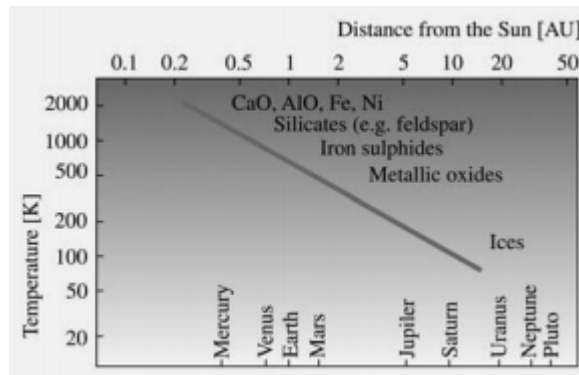
$$T = T_{\odot} \left(\frac{1 - A}{2} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^{1/2}.$$

Een snel roterend lichaam zendt bij benadering een gelijk vermogen uit vanuit alle delen van diens oppervlak. De uitgestraalde flux is dan

$$L_{\text{em}} = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

en de temperatuur

$$T = T_{\odot} \left(\frac{1 - A}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^{1/2} .$$



Hoe is ons zonnestelsel ontstaan, en hoe spoort de vigerende²³ theorie met de fysische karakteristieken van de planeten?

Kosmogonie is een tak van de astronomie die zich bezighoudt met de oorsprong van het zonnestelsel te bestuderen. De eerste stappen van het vormingsproces van planeten zijn sterk verwant aan die van sterren.

De oudste stenen die op aarde gevonden zijn, zijn ongeveer 3.9×10^9 jaar oud; enkele maan- en meteorietfragmenten zijn iets ouder. Wanneer alle feiten samen gegoooid worden, kan er geschat worden dat de aarde en andere planeten zo'n 4.6×10^9 jaar geleden gevormd werden. Aan de andere kant, is de leeftijd van de melkweg tenminste twee keer zo hoog, dus is de algemene conditie niet drastisch veranderd gedurende de levensduur van het zonnestelsel. Hiervoor bestaat tegenwoordig rechtstreeks bewijs.

De zon en zo goed als heel het zonnestelsel zijn gelijktijdig gecondenseerd uit een roterende en krimpende wolk van stof en gas, met een dichtheid van een 10,000-tal atomen of moleculen per cm^3 en een temperatuur van 10-50 K. Elementen zwaarder dan helium werden in sterren uit de vorige generaties gevormd. Het instorten van de wolk werd mogelijk veroorzaakt door een schokgolf afkomstig van een nabije supernova explosie.

De oorspronkelijke massa van de wolk zou duizenden zonnemassa's geweest moeten zijn om de *Jeans massa*, de kritieke massa om te wolk te doen instorten (niet te verwarren met de massa van je broek), te overschrijden. Wanneer de wolk krimpt daalt de Jeans massa. Verschillende wolkenfragmenten trokken onafhankelijk van elkaar samen, één van deze fragmenten werd de zon.

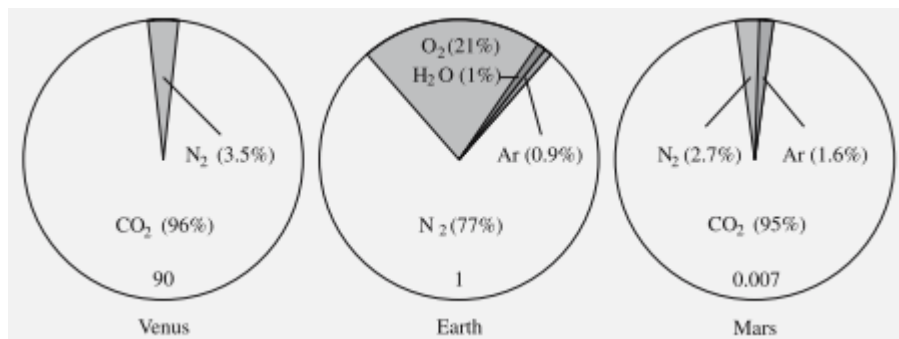
²³Vigerende theorie = in deze tijd geldende theorie.

Terwijl de fragmenten verder krompen, botsten er deeltjes in de wolk tegen elkaar. De rotatie van de wolk stond toe dat de deeltjes naar hetzelfde vlak zakten, loodrecht op de rotatie-as, maar verhinderde de deeltjes om naarheen de as te bewegen. Dit verklaart waarom de planetaire banen bijna in hetzelfde vlak liggen.

De massa van de nog vormende zon, de protozon, was groter dan de massa van de huidige zon. De vlakke schijf in het eclipticavlak bevatte ongeveer 1/10 van de totale massa. Overigens waren de verafgelegen randen van de wolk nog naar het centrum toe aan het bewegen. De zon was diens impulsmoment aan het verliezen aan het omringende gas door middel van een elektromagnetisch veld. Wanneer de nucleaire reacties begonnen, droeg een sterke zonnwind²⁴ nog meer impulsmoment van de zon met zich mee. Het uiteindelijke resultaat was de huidige, langzaam roterende zon.

De kleine deeltjes in de schijf klonterden samen tot grotere brokken door middel van continue onderlinge botsingen, wat uiteindelijk resulteerde in lichamen met het formaat van asteroïden/planetoïden, *planetesimalen*. De zwaartekracht van de brokken trok hen samen, om zo steeds groeiende planeetzaadjes te vormen (plant ze niet in uwen hof). Wanneer deze protoplaneten groot genoeg waren, begonnen ze gas en stof uit de omringende wolk op te nemen. Enkele kleinere brokken gingen in een baan rond deze planeten; deze werden manen.

De temperatuurverdeling van de oorspronkelijke wolk verklaart het verschil in chemische samenstelling van de planeten.



Type III

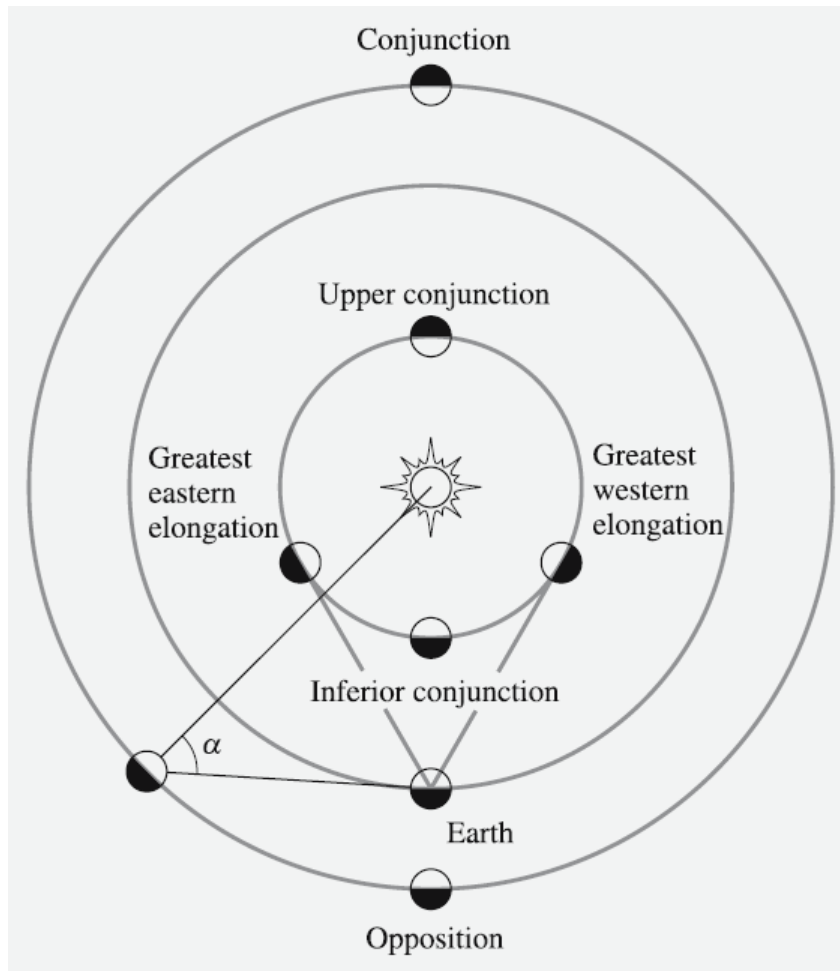
Schets de bijzondere standen van 2 planeten ten opzichte van elkaar. Definieer fasehoek, en bespreek het verloop ervan, kwalitatief, voor binnen- en buitenplaneten.

Een binnenplaneet is een planeet die om de zon draait in een baan binnen de baan van de aarde. Dit zijn Mercurius en Venus. Buitenplaneten liggen buiten de baan van de aarde.

De hoek zon-planeet-aarde wordt de **fasehoek** genoemd, vaak genoteerd met de Griekse letter α . De fasehoek kan tussen 0° en 180° liggen voor Mercurius en Venus. Zo kunnen

²⁴Een zonnwind is een stroom van geladen deeltjes die ontsnappen aan het oppervlak van de zon.

we dus een "volle Venus", een "halve Venus", en zo verder zien, precies zoals bij de fases van de maan. De fasehoek voor buitenplaneten heeft een beperkter bereik. Voor Mars is de maximumfase 41° , voor Jupiter 11° en voor Neptunus slechts 2° .



Welke soorten jaren onderscheidt men. Verklaar.

SIDERISCH JAAR

Een **siderisch jaar** of sterrenjaar is de werkelijke baanperiode van de aarde rond de zon. Na één siderisch jaar wordt de zon terug op dezelfde positie ten opzichte van de sterren gezien.

TROPISCH JAAR

Wegens precessie beweegt het lentepunt zo'n $50''$ langsheen de ecliptica per jaar. Dit betekent dat de zon terugkeert in het lentepunt nog voordat het siderisch jaar ten einde is gelopen. Dit tijdsinterval wordt een **tropisch jaar** genoemd.

ANOMALISTISCH JAAR

Een derde definitie is gebaseerd op de passage van de aarde langsheen het perihelium. Planetaire verstoringen veroorzaken een geleidelijke verandering in de richting van het

perihelium van de aarde. Het tijdsinterval tussen twee passages van het perihelium door de aarde wordt een ***anomalistisch jaar*** genoemd. Deze is iets langer dan een siderisch jaar. Het duurt ongeveer 21,000 jaar voor het perihelium om 360° ten opzichte van het lentepunt te draaien.

Welke soorten maanden onderscheidt men. Verklaar.

SIDERISCHE MAAND

De maan draait tegen de klok in rond de aarde. Één omloop, een ***siderische maand***, duurt ongeveer 27.322 dagen.

SYNODISCHE MAAND

In de praktijk is een ***synodische maand*** belangrijker, dit is de duur van de maanfases (bv. van volle maan naar volle maan). Tijdens de loop van één maand heeft de aarde ongeveer 1/12 van diens baan rond de zon afgelegd. De maan moet dan nog ongeveer 1/12 van diens baan afleggen opdat de configuratie aarde-maan-zon terug hetzelfde zou zijn. Dit duurt ongeveer twee dagen, en dus worden de maanfases elke 29 dagen herhaald. Meer nauwkeurig bedraagt de lengte van een synodische maand 29.531 dagen.

DRACONISCHE MAAND OF KNOPENMAAND

Het baanvlak van de maan is slechts een vijftal graden geheld ten op zichte van de ecliptica. Echter verandert dit baanvlak geleidelijk met de tijd, vooral vanwege verstoringen die veroorzaakt worden door de aarde en de zon. Deze verstoringen zorgen ervoor dat de knooplijn (de doorsnede van de ecliptica en het baanvlak van de maan) een volledige omloop maakt in 18.6 jaar. We zijn dezelfde periode reeds tegengekomen bij nutatie.

Een ***draconische maand*** of ***knopenmaand*** is de tijd die de maan nodig heeft om van één stijgende knoop naar de volgende te bewegen. Omdat de knooplijn roteert is een knopenmaand 3 uur korter dan een siderische maand en bedraagt dus 27.212 dagen.

ANOMALISTISCHE MAAND

De baanperiode van perigeum tot perigeum wordt een ***anomalistische maand*** genoemd. Het perigeum is het punt in een baan rond de Aarde dat het dichtst bij het zwaartepunt van de Aarde ligt. Een anomalistische maand is 5.5 uur langer dan een siderische maand, of ongeveer 27.555 dagen.

Cyclus van Milankovi

De Servische geofysicus Milutin Milanković publiceerde in de jaren 1930 en 1940 zijn theorie over ijstijden. Gedurende de voorbije 2-3 miljoen jaar werden lange ijstijden ongeveer elke 100,000 jaar herhaald. Hij stelde voor dat variaties in de baan van de aarde langdurige periodische klimaatveranderingen veroorzaakten, nu gekend onder de ***cyclus van Milankovi***. Milanković beweerde dat cycli in excentriciteit, richting van het perigeum, helling en precessie resulteren in een 100,000-jarige ijstijdcyclus.

Saros

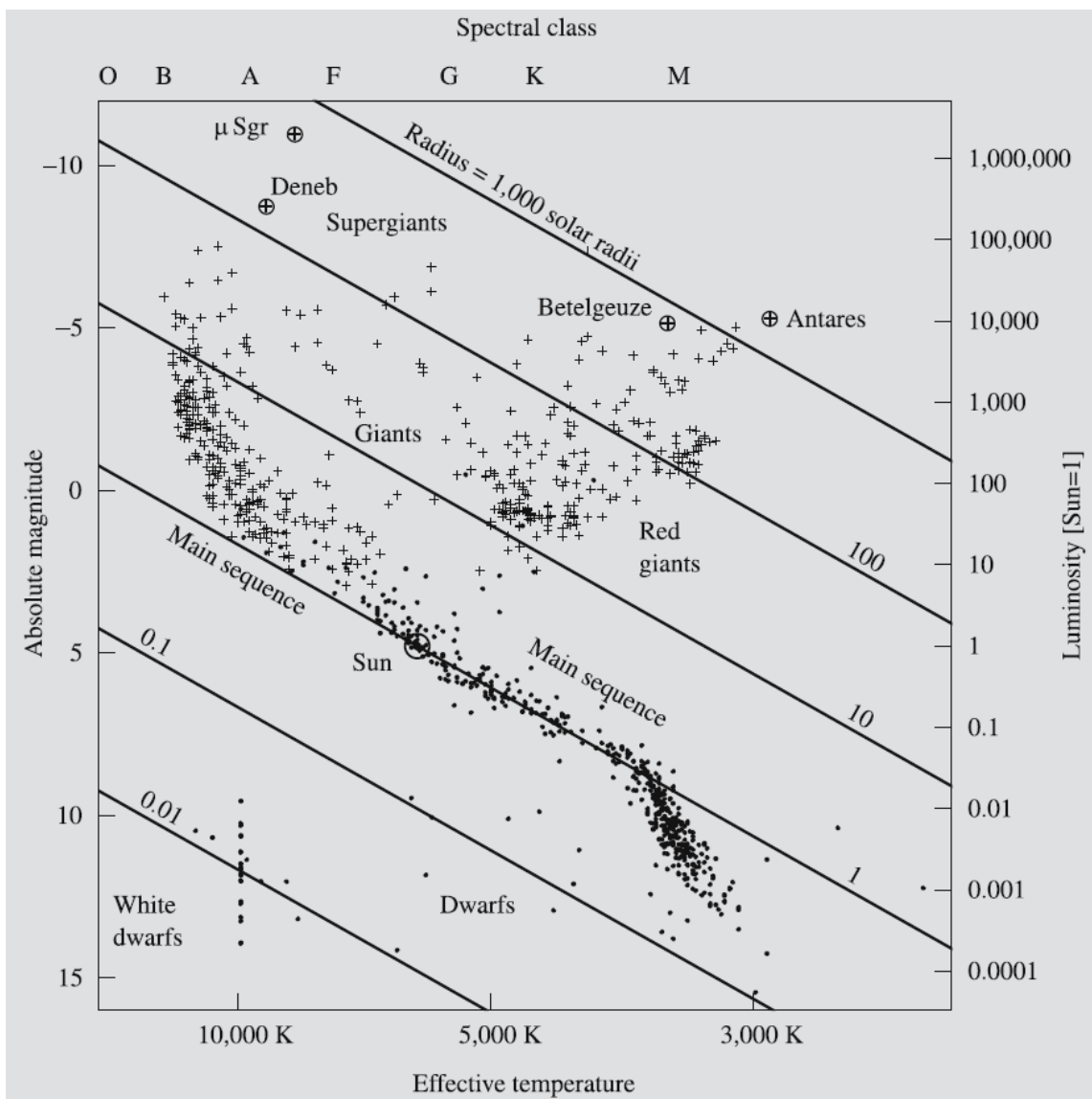
De zon en de (stijgende of dalende) knoop van de maan liggen eens om de 346.62 dagen in dezelfde richting. Negentien zo'n periodes (= 6585.75 dagen = 18 jaar 11 dagen) ligt zeer dicht bij de periode van 223 synodische maanden. Dit betekent dat de zon-maan configuratie en dus ook de eclips (zons- of maansverduistering) zich herhalen met eenzelfde tempo als deze periode (ongeveer 18 jaar). Deze periode wordt de **Saros** periode genoemd en was reeds gekend bij de oude Babyloniërs.

Vragen Hoofdstuk 8

Type II

Schets het Hertzsprung-Russell diagram, en duid hierin aan en benoem de plaatsen waar sterren worden gevonden.

De spectraalklasse is een indeling van sterren op basis van de kleur en het spectrum van het uitgestraalde licht. De soorten spectra werden begin 20ste eeuw geclassificeerd volgens de letters van het alfabet, maar later bijgesteld tot de reeks W-O-B-A-F-G-K-M-R-N-S (te onthouden door het ezelsbruggetje Wow! Oh, Be A Fine Girl, Kiss Me Right Now, Sweety!), waarbij de O sterren het heetst (en blauw) zijn, en de M sterren het koelst (en rood).



Type III

Beschrijf de Harvard spectraalclassificatie, en de Yerkes verfijning hiervan.

De spectraalclassificatie die voor het moment in gebruik is werd ontwikkeld in het Harvard Observatory in de Verenigde Staten in het begin van de 20ste eeuw. Het werk was begonnen door *Henry Draper* die in 1872 de eerste foto nam van het spectrum van Vega, de helderste ster in het sterrenbeeld Lier.

De **Harvard spectraalclassificatie** is gebaseerd op lijnen die vooral gevoelig zijn voor de stellaire temperatuur in plaats van voor de gravitatie of lichtkracht. Belangrijke lijnen zijn onder andere de Balmer-lijnen (de spectraallijnen van waterstof, met golflengten die grotendeels in het visuele gebied van het elektromagnetisch spectrum liggen), de lijnen van neutraal helium en de lijnen van ijzer.

De hoofdtypes in de Harvard classificatie worden genoteerd met een hoofdletter. Eerst werd dit gedaan met letters volgens het alfabet, maar achteraf merkte men dat ze konden geordend worden volgens de temperatuur. Met de temperatuur dalend van links naar rechts is de sequentie

O - B - A - F - G - K - M - L - T.
C
S

Bijkomende notaties zijn Q voor novae²⁵, P voor planetaire nevels²⁶, en W voor Wolf-Rayetsterren²⁷. De klasse C bestaat uit de vroegere types R en N. De klasse C en S representeren parallelle klassen aan de klassen G-M, verschillend in de chemische samenstelling van hun oppervlak. De meeste recente toevoeging zijn de spectraalklassen L en T die de sequentie voorbij M voortzetten, zij representeren *bruine dwergen*²⁸. Er is een welbekend ezelsbruggetje voor het onthouden van de spectraalklassen maar wegens diens chauvinistische toon weigert het boek het om het te geven. (Ikzelf heb het reeds gedaan, leve de opstand!)

De voornaamste kenmerken (exclusief de vele tralala in het boek) van de verschillende klassen zijn:

O Blauwe sterren met een oppervlaktetemperatuur van 20,000 - 35,000 K.

B Blauw-witte sterren met een oppervlaktetemperatuur rond de 15,000 K.

²⁵Een nova is een ster die plotseling veel helderder wordt en daarna geleidelijk, over een periode van maanden tot vele jaren, tot zijn vroegere helderheid terugkeert.

²⁶Een planetaire nevel is een uitdijende gasschil in de ruimte geproduceerd door bepaalde types sterren aan het eind van hun leven in de reuzentak van het Hertzsprung-Russelldiagram. Het is een emissielevel.

²⁷Wolf Rayersterren zijn zware sterren met een massa van meer dan 20 zonmassa's, die hun massa snel verliezen door een krachtige sterrenwind, die sterrenwind kan een snelheid van wel 2000 km/s bedragen.

²⁸Bruine dwergen zijn objecten met een massa die kleiner is dan een ster, maar groter dan een gasreus, hetgeen een planeet is die voornamelijk uit gassen bestaat zoals Jupiter en Saturnus in ons zonnestelsel.

- A Witte sterren met een oppervlaktetemperatuur rond de 9000 K.
- F Geel-witte sterren met een oppervlaktetemperatuur rond de 7000 K.
- G Gele sterren zoals de zon met een oppervlaktetemperatuur rond de 5500 K.
- K Oranje-gele sterren met een oppervlaktetemperatuur rond de 4000 K.
- M Rode sterren met een oppervlaktetemperatuur rond de 3000 K.
- L Bruine (eigenlijk donkerrode) sterren met een oppervlaktetemperatuur rond de 2000 K.
- T Bruine dwergen met een oppervlaktetemperatuur rond de 1000 K.
- C Koolstofsterren, voorheen R en N. Zeer rode sterren met een oppervlaktetemperatuur rond de 3000 K.
- S Rode sterren met een lage temperatuur van rond de 3000 K (dus zoals M maar met andere tralala).

De Harvard classificatie neemt alleen de effectieve temperatuur op het spectrum in rekening. Voor een meer precieze classificatie moet men ook de lichtkracht van een ster in rekening nemen, aangezien twee verschillende sterren met dezelfde effectieve temperatuur zeer verschillende lichtkrachten kunnen hebben. Een twee-dimensionaal systeem van spectrale classificatie werd geïntroduceerd door *William W. Morgan, Philip C. Keenan* en *Edith Kellman* van het Yerkes observatorium. Dit systeem staat gekend als de MKK of ***Yerkes classificatie***. Hierbij worden zes verschillende klassen onderscheiden volgens de lichtkracht:

- Ia de superreuzen met de grootste lichtkracht,
- Ib de superreuzen met een minder grote lichtkracht,
- II lichtgevende reuzen,
- III normale reuzen,
- IV subreuzen (minder grote lichtkracht dan normale reuzen),
- V hoofdreekssterren (dwergen).

De klasse volgens de lichtkracht wordt bepaald door spectrale lijnen die sterk afhangen van de stellaire oppervlaktegravitatie, hetgeen sterk verwant is met de lichtkracht van de ster.

Vragen Hoofdstuk 9

Type III

Som op, en beschrijf bondig, de verschillende soorten dubbelsterren.

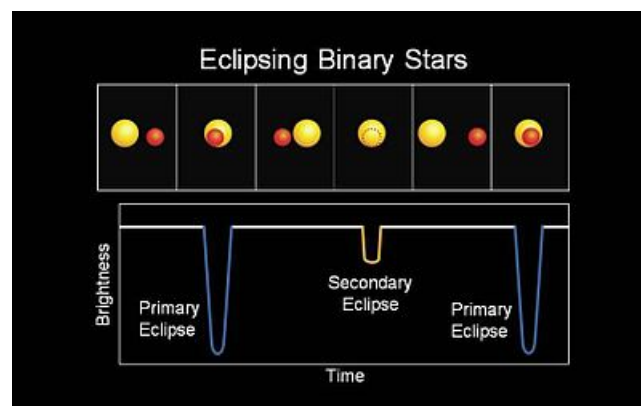
Soms lijkt het alsof twee sterren zich zeer dicht bij elkaar bevinden in de lucht, hoewel ze zich werkelijk op een heel grote afstand van elkaar bevinden. Deze paren worden *optische dubbelsterren* genoemd. Desondanks zijn er veel paren sterren die dicht bij elkaar gelegen zijn en een fysisch systeem vormen waarbij de sterren in een baan rond elkaar gaan. Minder dan de helft van de sterren zijn enkelvoudige sterren zoals de zon. Meer dan 50% behoort tot een systeem bestaande uit twee of meer leden. In het algemeen hebben de meervoudige systemen een hiërarchische structuur: een ster en een binaire ster in een baan rond elkaar in een drievoudig systeem, twee binaire sterren in een baan rond elkaar in een viervoudig systeem. De meeste meervoudige systemen kunnen dus beschreven worden als binaire systemen op verschillende niveaus. Binaire sterren kunnen bijvoorbeeld geclassificeerd worden volgens hun onderlinge scheiding, of volgens de manier waarop ze ontdekt worden.

VISUELE DUBBELSTER

Visuele dubbelsterren zijn dubbelsterren die kunnen gezien worden als twee aparte componenten, d.i. dat de scheiding tussen de twee sterren meer dan 0.1 boogseconden bedraagt. De relatieve positie van de sterren ten op zichte van elkaar verandert doorheen de jaren terwijl de sterren volgens hun baan bewegen.

FOTOMETRISCHE DUBBELSTER

De *fotometrische dubbelsterren* of *eclipserende dubbelsterren* zijn binaire systemen waarvan de componenten van het paar regelmatig voorheen elkaar passeren wat resulteert in een verandering in de totale schijnbare magnitude.



SPECTROSCOPISCHE DUBBELSTER

Spectroscopische dubbelsterren lijken zelf met de meest krachtige telescopen enkelvoudige sterren te zijn. Ze worden ontdekt op basis van hun spectra. Ofwel zijn er twee

sets spectraallijnen te zien, ofwel variëren de waargenomen lijnen periodiek vanwege het Doppler-effect²⁹, wat een tweede niet-zichtbare partner aantoont.

ASTROMETRISCHE DUBBELSTER

Bij *astrometrische dubbelsterren* wordt slechts één component gezien, maar diens variabele eigenbeweging toont aan dat er nog een tweede, niet-zichtbare, component aanwezig moet zijn.

VERAFGELEGEN DUBBELSTER

Bij *verafgelegen dubbelsterren* bedraagt de afstand tussen de twee componenten tientallen tot hondertallen astronomische eenheden en hun baanperiodes variëren van tientallen tot duizendtallen jaren.

DICHTE DUBBELSTER

Bij *dichte dubbelsterren* gaat de scheiding tussen de twee componenten van iets van 1 AU tot beneden de straal van de sterren. De baanperiode varieert van een paar uur tot een paar jaar.

CONTACT DUBBELSTER

Ik quoteer het boek: "The components of *contact binaries* are so close that they are touching each other."



²⁹Het dopplereffect is de waargenomen verandering van frequentie van geluid, licht of andere golfverschijnselen, door een snelheidsverschil tussen de zender en de ontvanger.

Vragen Hoofdstuk 10

Type I

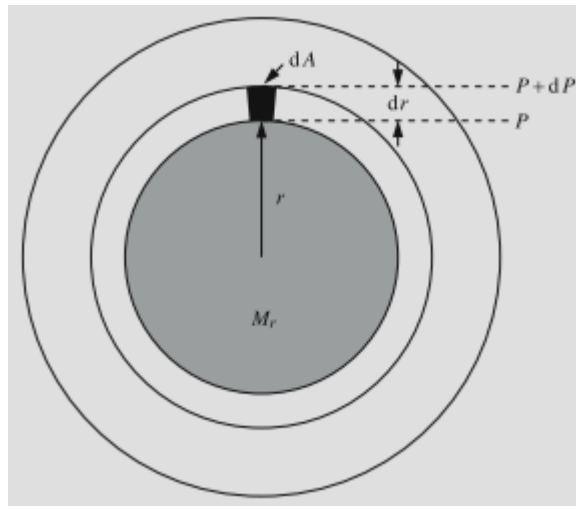
Sterstructuur:

Sterren zijn gigantische gasferen, honderden tot duizenden tot miljoenen keer zwaarder dan de aarde. Een ster zoals de zon kan nog voor miljarden jaren blijven schijnen. Dit werd aangetoond door studies van de voorgeschiedenis van de aarde, die aantonen dat de energie uitgestraald door de zon niet veel veranderd is gedurende de laatste viermiljard jaar. Het evenwicht van een ster moet stabiel blijven gedurende zo'n periodes.

Wiskundig gezien kunnen de condities voor het intern evenwicht van een ster uitgedrukt worden door middel van vier differentiaalvergelijkingen met betrekking tot de massadistributie, de gasdruk en de energieproductie en -transport van de ster. Deze vergelijkingen zullen nu afgeleid worden.

1. Leid de vergelijking af die hydrostatisch evenwicht uitdrukt.

De zwaartekracht trekt het stellair materiaal naar de kern toe. Het wordt tegengehouden door de drukkracht ten gevolge van thermische bewegingen van de gasmoleculen. De eerste evenwichtsvoorwaarde is dat deze krachten in evenwicht zijn.



Beschouw een cilindrisch volume-element op een afstand r van het centrum van de ster. Deze heeft een volume van $dV = dA dr$, waarbij dA diens basisoppervlak en dr diens hoogte bedraagt; diens massa is $dm = \rho dA dr$, waarbij $\rho = \rho(r)$ de gasdensiteit is bij de straal r . Indien de massa binnen de straal r gelijk is aan M_r , dan zal de zwaartekracht op het volume-element gelijk zijn aan

$$dF_g = -\frac{GM_r dm}{r^2} = -\frac{GM_r \rho}{r^2} dA dr,$$

waarbij G de gravitatieconstante is. Het minteken in deze uitdrukking betekent dat de kracht gericht is naar de kern van de ster. Indien de druk aan het benedenoppervlak van het volume-element gelijk is aan P en op het bovenoppervlak $P + dP$, dan is de netto drukkracht inwerkend op het element gelijk aan

$$dF_p = P dA - (P + dP) dA = - dP dA.$$

aangezien de druk afneemt naar buiten toe zal dP negatief zijn en de kracht dF_p positief. De evenwichtsvoorwaarde zegt dat de totale kracht dat inwerkt op het volume-element gelijk moet zijn aan nul, d.i.

$$0 = dF_g + dF_p = -\frac{GM_r \rho}{r^2} dA dr - dP dA$$

of

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho}{r^2}.$$

Dit is de *hydrostatische evenwichtsvergelijking*.

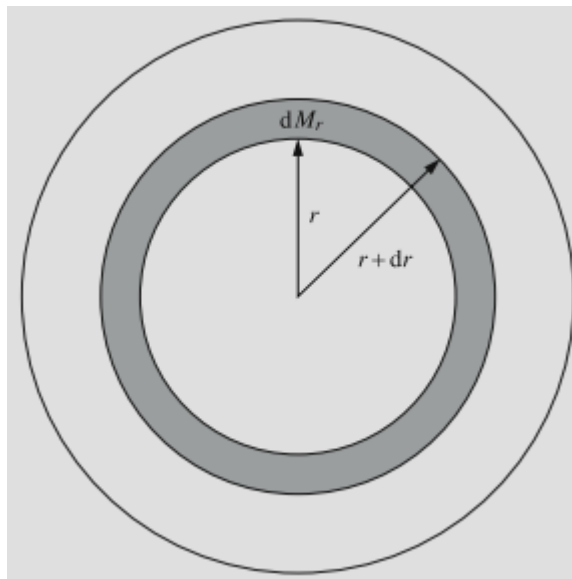
2. Leid de vergelijking af die de dichtheid en de massafunctie met elkaar verbinden.

De tweede vergelijking geeft de ingesloten massa weer bij een gegeven straal. Beschouw een sferische schil met dikte dr op de afstand r van het centrum. Deze heeft een volume van $4\pi r^2 dr$ en dus een massa van

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho dr,$$

wat ons de *massacontinuïteitsvergelijking* geeft

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$



3. Geef de uitdrukking voor het behoud van energie.

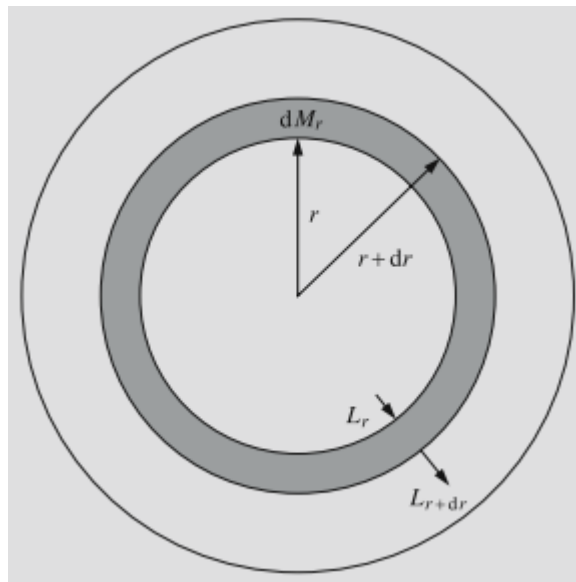
De derde evenwichtsvoorwaarde drukt het behoud van energie uit door te stellen dat alle energie geproduceerd door de ster naar het oppervlak toe gedragen moet worden om vervolgens te worden uitgezonden. We beschouwen terug een sferische schil met dikte dr en massa dM_r bij een straal r . Zij L_r het energievermogen, d.i. de hoeveelheid energie die doorheen het oppervlak met straal r gaat per tijdseenheid. Indien ϵ de energieproductiecoëfficiënt bedraagt, d.i. de hoeveelheid energie vrijgegeven door de ster per eenheid van tijd en massa, dan geldt

$$dL_r = L_{r+dr} - L_r = \epsilon dM_r = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr.$$

Dus de *vergelijking van behoud van energie* is

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon.$$

De mate waarin energie geproduceerd wordt hangt dus af van het afstand tot het centrum. Vrijwel alle energie dat door de ster wordt uitgestraald wordt geproduceerd in diens hete en dichte kern. In de buitenste lagen is de energieproductie verwaarloosbaar en L_r zo goed als constant.



4. Leid de vergelijking van stralingsoverdracht af: $dI/d\tau = -I + S$, en geef de vorm hiervan die past voor een sferische geometrie.³⁰

De voortplanting van straling in een medium, ook wel stralingstransport genoemd, is één van de basisproblemen van de astrofysica. Het onderwerp is te ingewikkeld om hier in enig detail te bespreken. (Yuuy!) De basisvergelijking voor stralingstransport is echter makkelijk af te leiden.

³⁰Deze opgave wordt teruggevonden in hoofdstuk 5.

Onderstel dat we een kleine cilinder hebben met een bodemoppervlakte dA en een lengte dr . Zij I_ν de stralingsintensiteit loodrecht op het bodemoppervlak onder een ruimtehoek $d\omega$ ($[I_\nu] = \text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$). Indien de intensiteit verandert met een hoeveelheid dI_ν binnen de afstand dr , verandert de energie met

$$dE = dI_\nu dA d\nu d\omega dt$$

in de cilinder binnen een tijd dt . Dit is gelijk aan de absorptie afgetrokken van de emissie van de cilinder. De geabsorbeerde energie bedraagt

$$dE_{\text{abs}} = \alpha_\nu dE dr = \alpha_\nu I_\nu dr dA d\nu d\omega dt,$$

hetgeen volgt uit $dL = -\alpha_\nu L dr$, met α_ν de opaciteit van het medium bij een frequentie ν (zie eerder). Oké nu komt er een hele boterham: zij j_ν de hoeveelheid uitgestraalde energie per hertz bij een frequentie ν onder een eenheidsruimtehoek vanuit een eenheidsvolume per tijdseenheid *zucht* ($[j_\nu] = \text{W m}^{-3} \text{ Hz}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$). Dit wordt de *emissiecoëfficiënt* genoemd van het medium. De energie uitgestraald onder een ruimtehoek $d\omega$ door de cilinder bedraagt dan

$$dE_{\text{em}} = j_\nu dr dA d\nu d\omega dt.$$

De vergelijking

$$dE = -dE_{\text{abs}} + dE_{\text{em}}$$

geeft dan

$$dI_\nu = -\alpha I_\nu dr + j_\nu dr$$

of

$$\frac{dI_\nu}{\alpha_\nu dr} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}.$$

We zullen de verhouding van de emissiecoëfficiënt j_ν tot de absorptiecoëfficiënt of opaciteit α_ν noteren door S_ν :

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}.$$

S_ν wordt de *bronfunctie* genoemd. Wegens $\alpha_\nu dr = d\tau_\nu$, waarbij τ_ν gelijk is aan de optische dichtheid bij een frequentie ν (zie eerder), hebben we dat

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu.$$

Deze vergelijking is de de basisvergelijking voor stralingstransport.

Een belangrijke toepassing van deze theorie van stralingstransport vindt men bij de studie naar planetaire en stellaire atmosferen. In dit geval is het een goede benadering dat de eigenschappen van het medium slechts in één richting veranderen, stel langsheen de z -as. De intensiteit zal dan slechts afhangen van z en θ , waarbij θ de hoek is tussen de z -as en de richting van de voortplanting van de straling.

Bij toepassing in de sferische geometrie, bv. bij atmosferen, wordt gewoonlijk de optische diepte τ_ν in de verticale richting gedefiniëerd als

$$\tau_\nu = -\alpha_\nu dz.$$

Conventioneel stijgt z opwaarts en de optische diepte neerwaarts in de atmosfeer. Het verticale lijnelement dz staat in relatie tot het element volgens de lichtstraal, dr , via

$$dz = dr \cos \theta,$$

Met deze conventies geeft de basisvergelijking voor stralingstransport

$$\cos \theta \frac{dI_\nu(z, \theta)}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu.$$

Dit is de vorm van de vergelijking voor stralingstransport die gewoonlijk wordt tegengekomen bij de studie naar stellaire en planetaire atmosferen.

5. Gebruik (4) om de vergelijking voor de temperatuurgradiënt op te stellen in geval van stralingsoverdracht.

De vierde evenwichtsvergelijking geeft de temperatuursverandering weer als functie van de straal, d.i. de temperatuurgradiënt dT/dr , de vorm van de vergelijking hangt af van de manier waarop de energie getransporteerd wordt: door *geleiding*, *convectie*³¹ of *straling*.

In het inwendige van normale sterren is geleiding zeer inefficiënt, aangezien de elektronen die de energie dragen slechts een kleine afstand kunnen afleggen zonder te botsen tegen andere deeltjes. Geleiding wordt enkel belangrijk in compacte sterren, witte dwergen³² en neutronensterren³³. Hier is het gemiddeld vrije pad van fotonen zeer kort. Bij normale sterren kan energietransport via geleiding verwaarloosd worden.

Bij energietransport worden fotonen die uitgestraald worden door hetere delen van de ster geabsorbeerd in koelere regio's, die de fotonen dus verwarmen. Er wordt gezegd dat de ster zich in een stralingsevenwicht bevindt wanneer dat de energie vrijgegeven door het inwendige van de ster volledig via straling naar buiten getransporteerd wordt.

De **temperatuurgradiënt in geval van stralingsoverdracht** staat in relatie tot het energievermogen L_r via

$$\frac{dT}{dr} = \left(-\frac{3}{4ac} \right) \left(\frac{\kappa \rho}{T^3} \right) \left(\frac{L_r}{4\pi r^2} \right),$$

³¹Een mechanisme voor warmtestroming door verplaatsing van materie.

³²Sterren die aan het einde van hun levenscyclus zijn gekomen.

³³Een neutronenster is het eindstadium van een ster waarvan de kernmassa voor de implosie tussen 1,4 en 3 maal die van de zon bedraagt, een neutronenster bestaat geheel uit neutronen, doordat tijdens het ineenvallen van de ster kern de elektronen met de protonen versmelten, één theelepeltje 'neutronenster' weegt meer dan 1 miljard ton.

waarbij $a = 4\sigma/c = 7.564 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$ gelijk is aan de stralingsconstante, c de lichtsnelheid en ρ de dichtheid. De *massa-absorptiecoëfficiënt* κ geeft de hoeveelheid absorptie per eenheid van massa weer. Diens waarde hangt af van de temperatuur, dichtheid en chemische samenstelling (er geldt $\kappa_\nu = \alpha_\nu/\rho$).

Om deze formule af te leiden, gebruiken we de vergelijking voor stralingstransport:

$$\cos \theta \frac{dI_\nu(r, \theta)}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu.$$

Via de overgang $d\tau_\nu = -\alpha_\nu dr$ geeft dit

$$\cos \theta \frac{dI_\nu}{dr} = -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu.$$

In deze vergelijking wordt κ_ν vervangen door een gepaste gemiddelde waarde κ , I_ν in het linkerlid kan benaderd worden door de functie van Planck B_ν , integreren we dit over alle mogelijke frequenties dan geeft dit

$$\frac{d}{dr} (\cos \theta B_r) = -\kappa \rho I_r + \int_\nu j_\nu d\nu,$$

We weten dat $B_r(T) = AT^4$. We vermenigvuldigen beide leden met $\cos \theta d\omega$ en integreren dit over alle mogelijke richtingen:

$$\frac{d}{dr} \left(AT^4 \int_S \cos^2 \theta d\omega \right) = -\kappa \rho \int_S I_r \cos \theta d\omega + \int_S \int_\nu j_\nu \cos \theta d\nu d\omega,$$

Uit hoofdstuk 4 weten we dat de eerste integraal in het rechterlid gelijk is aan F_r . Verder gelden de gelijkheden

$$\int_S \cos \theta d\omega = 0$$

en

$$\int_S \cos^2 \theta d\omega = \frac{4\pi}{3}.$$

Deze eerste integraal werd reeds berekend in hoofdstuk 4, wat betreft de tweede integraal gaat men analoog te werk als voor de eerste integraal door een overgang op sferische coördinaten en voert men de substitutie $t = \cos \theta$ uit. Aangezien j_ν niet afhangt van θ is de tweede term in de vergelijking gelijk aan nul. We hebben dus

$$\frac{4\pi}{3} \frac{d}{dr} (AT^4) = -\kappa \rho F_r,$$

wegens $\sigma = \pi A$ valt dit te schrijven als

$$\frac{4\pi}{3} \frac{d}{dr} \left(\frac{ac}{4\pi} T^4 \right) = -\kappa \rho F_r.$$

Gebruik makend van

$$F_r = \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

en

$$\frac{d(T^4)}{dr} = \frac{d(T^4)}{dT} \frac{dT}{dr} = 4T^3 \frac{dT}{dr}$$

vinden we de gezochte vergelijking.

De afgeleide dT/dr is negatief, aangezien de temperatuur stijgt naar binnen toe.

6. Maak gebruik van de toestandsvergelijking bij adiabatie³⁴ om de temperatuurgradiënt te berekenen in geval van convectief evenwicht.

Indien de stralingsoverdracht van energie inefficiënt wordt, zal de absolute waarde van de temperatuurgradiënt enorm groot worden. In dat geval zullen bewegingen van start gaan in het gas, die de energie meer efficiënt dan straling naar buiten toe dragen. Bij deze convectieve bewegingen, zal heet gas naar omhoog stijgen in de richting van koelere lagen, waar het diens energie zal verliezen en terug zal zakken. Het stijgen en zakken van gaselementen mengt ook de stellaire materie, en de samenstelling van de convectieve delen wordt homogeen. Straling en conductie aan de andere hand, mengen de materie niet, sinds zij alleen energie verplaatsen en geen gas.

Om de **temperatuurgradiënt in het convectieve geval** te bepalen, beschouw een stijgend gasbel. Veronderstel dat het gas dat zich verplaatst met de bel de **toestandsvergelijking bij adiabatie** volgt

$$T \propto P^{1-\frac{1}{\gamma}},$$

waarbij P de druk van het gas is en γ de *adiabatische exponent*

$$\gamma = c_p/c_v,$$

is de verhouding van de specifieke warmtecapaciteiten³⁵ bij een constante druk (c_p) en bij een constant volume (c_v). Deze verhouding van de soortelijke warmtes hangt af van de ionisatie van het gas, en kan berekend worden wanneer de temperatuur, dichtheid en chemische samenstelling geweten zijn.

Nemen we de afgeleide van de toestandsvergelijking bij adiabatie dan krijgen we

$$\frac{dT}{dr} \propto \frac{d}{dr} \left(P^{1-\frac{1}{\gamma}} \right) = \frac{d \left(P^{1-\frac{1}{\gamma}} \right)}{dP} \frac{dP}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{P^{1-\frac{1}{\gamma}}}{P} \frac{dP}{dr}$$

of dus (met wegdeling van de factor waar T en $P^{1-\frac{1}{\gamma}}$ zich toe verhouden)

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr},$$

dit is de vergelijking van de temperatuurgradiënt in het geval van convectief evenwicht.

³⁴Een proces is adiabatisch als er geen warmte met de omgeving wordt uitgewisseld.

³⁵De specifieke warmtecapaciteit c is gelijk aan de warmtecapaciteit C per eenheid van massa en wordt ook wel de specifieke warmte of soortelijke warmte genoemd. De warmtecapaciteit van een voorwerp is in de thermodynamica het vermogen van dat voorwerp om energie in de vorm van warmte op te slaan.

7. Hoe kiest men tussen (5) en (6)?

Bij praktische berekeningen van de stellaire structuur gebruikt men één van beide vergelijkingen, afhankelijk van welke vergelijking een minder steile temperatuurgradiënt geeft. In de buitenste lagen van de ster moet warmteoverdracht met de omgeving in rekening gebracht worden en is de tweede vergelijking geen goede benadering meer. De convectietheorie is een moeilijk en nog steeds een onvolkomen begrepen onderwerp.

De convectiebewegingen gaan van start wanneer de temperatuurgradiënt bij stralingsoverdracht groter wordt in absolute waarde dan de adiabatische temperatuurgradiënt, d.i. als ofwel de stralingsgradiënt zeer steil wordt ofwel de convectieve gradiënt zeer klein wordt. Uit de vergelijking in het geval van stralingsoverdracht kan men afleiden dat een steile gradiënt verwacht wordt als ofwel het energievermogen ofwel de massa-absorptiecoëfficiënt groot wordt. De convectieve gradiënt kan klein worden wanneer de adiabatische exponent naar 1 nadert.

Energieproductie in sterren:

Bij een zeer hoge temperatuur van rond de 10 miljoen kelvin, zoals in de kern van de zon, kunnen er *thermische fusiereacties* plaatsvinden. Bij fusiereacties worden lichte elementen omgezet tot zwaardere elementen. De uiteindelijke reactieproducten hebben een lagere totale massa dan de initiële kernen (waar de massa van een element zich vooral bevindt). Dit massaverschil wordt vrijgegeven onder de vorm van energie volgens Einstein's relatie $E = mc^2$. Thermonucleaire reacties worden vaak benoemd als verbranding, ook al hebben ze niets te maken met chemische verbranding van gewone brandstoffen.

De atomische kern bestaat uit protonen en neutronen, samen benoemd onder de term nucleonen. we definiëren

m_p = massa van een proton,

m_n = massa van een neutron,

Z = kernlading = atoomnummer,

N = neutronnummer,

$A = Z + N$ = atomisch gewicht,

$m(Z, N)$ = massa van de nucleus.

De massa van de nucleus is kleiner dan de som van de massa van al diens nucleonen. Het verschil wordt de *bindingsenergie* genoemd. De bindingsenergie per nucleon bedraagt

$$Q = \frac{1}{A}(Zm_p + Nm_n - m(Z, N))c^2.$$

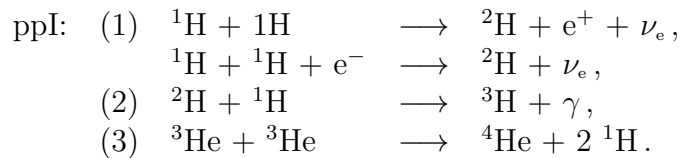
Het blijkt dat Q toeneemt naar zwaardere elementen toe tot aan ijzer ($Z = 26$). Vanaf ijzer begint de bindingsenergie terug te dalen.

Isotopen zijn atomen van hetzelfde chemische element, en dus met hetzelfde aantal protonen, waarin het aantal neutronen verschilt. Indien we dus in de volgende reacties een element ${}^n\text{X}$ tegenkomen kan via het getal n steeds het aantal neutronen in het isotoop bepaald worden aangezien het aantal protonen voor een vast element steeds hetzelfde is voor de isotopen. Het aantal neutronen in het isotoop is dan gelijk aan n min het vast aantal protonen van een isotoop. Zo is bijvoorbeeld het aantal neutronen in ${}^1\text{H}$ gelijk aan $1 - 1 = 0$, ${}^1\text{H}$ bestaat dus enkel uit een proton.

e^+ staat voor een positron. Het is het antideeltje van het elektron e^- , met dezelfde massa maar een tegengestelde lading. ν_e staat voor een elektron-neutrino. Een neutrino is een elektrisch ongeladen subatomair, elementair deeltje. Doordat het neutrino zeer weinig wisselwerking vertoont met materie, gaat het bijna ongehinderd door gewone materie heen. Een blok lood zou een lichtjaar (circa 9,5 biljoen km) dik moeten zijn om de helft van de neutrino's die erdoorheen gaan tegen te houden. γ staat voor gammastraling (γ -straling), onzichtbare elektromagnetische straling.

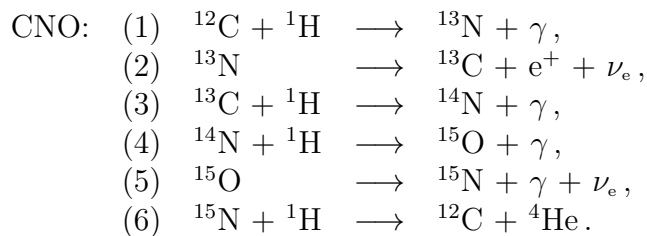
1. Geef PPI keten

De Proton-Proton keten bestaat drie mogelijke takken, hiervan is de eerste³⁶ tak, of de ppI keten:

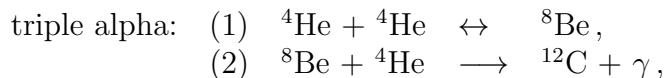


Voor elke reactie (3) moeten de reacties (1) en (2) tweemaal plaatsvinden.

2. Geef CNO keten



3. Geef triple alpha reactie



³⁶De twee volgende takken, ppII en ppIII, zijn slechts mogelijke verdere takken. De eerste tak verloopt standaard.

4. Geef een 5-tal voorbeelden van de fusie van zwaardere elementen

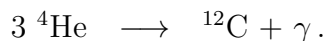
1. $^{20}\text{Ne} + ^4\text{He} \longrightarrow ^{24}\text{Mg} + \gamma,$
2. $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \longrightarrow ^{16}\text{O} + 2\ ^4\text{He},$
3. $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \longrightarrow ^{28}\text{Si} + ^4\text{He},$
4. $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \longrightarrow ^{24}\text{Mg} + 2\ ^4\text{He},$
5. $^{28}\text{Si} + ^{28}\text{Si} \longrightarrow ^{56}\text{Ni} + \gamma.$

5. Bespreek in welke omstandigheden deze reacties zich voordoen en hun waarschijnlijkheid.

De pp keten vindt vooral plaats bij sterren met een gelijkaardige massa als de zon of kleiner. De verwachte tijd voor twee protonen om bij een botsing deuterium (^2H) te vormen bedraagt 10^{10} jaar. Het is dankzij deze traagheid dat de zon nog schijnt, anders zou die al lang opgebrand zijn. De tweede reactie, waarbij deuterium en een proton samen een heliumisotoop ^3He vormen verloopt zeer snel vergeleken met de vorige stap. Vandaar is de overvloed aan deuterium in de ster zeer klein. De laatste stap van de keten kan drie verschillende vormen aannemen. Hier is de waarschijnlijkste gegeven. In de zon wordt 91 % van de energie geproduceerd door de ppI keten.

Bij een temperatuur onder de 20 miljoen graden is de pp keten de belangrijkste methode voor energieproductie van sterren. Bij hogere temperaturen die overeenkomen met sterren met een massa boven $1.5M_{\odot}$, wordt de koolstof keten (CNO) keten dominant, omdat diens reactiesnelheid stijgt met de temperatuur. De vierde reactie in de keten is de traagste en bepaalt dus de snelheid van de CNO keten. Bij een temperatuur van 20 miljoen graden bedraagt de reactiesnelheid van de vierde stap een miljoen jaar. De fractie vrijgekomen energie bij de CNO keten ligt iets lager dan bij de pp keten, aangezien er meer energie wordt weggedragen door neutrino's.

Als gevolg van de vorige reacties stapelt het overschat aan helium in de interne ster op³⁷. Bij een temperatuur boven de 10^8 graden kan het helium omgezet worden in koolstof via de triple alpha reactie. Hier is ^8Be zeer onstabiel en vervalt zeer vlug in twee helium kernen (alfadeeltjes) in 2.6×10^{-16} seconden. De productie van koolstof vereist dus zo goed als de gelijktijdige botsing van drie deeltjes. Deze reactie wordt vaak genoteerd als



Type II

Leid de uitdrukkingen af voor (1) druk in het geval van een ideaal gas en (2) druk ten gevolge van straling.

Laat ons niet-enteractieve deeltjes beschouwen in een rechthoekige doos. De deeltjes mogen ook fotonen zijn. Zij de zijdes van de doos gelijk aan Δx , Δy en Δz , en het aantal

³⁷Ook na ppII en ppIII duikt He in het rechterlid op.

deeltjes gelijk aan N . De druk wordt veroorzaakt door het botsen van de deeltjes tegen de wand van de doos. Wanneer een deeltje tegen de wand loodrecht op de x -as botst, zal diens impuls ($\bar{p} = m\bar{v}$) in de x -richting, p_x , veranderen met $\Delta p = 2p_x$ ³⁸. Het deeltje zal naar dezelfde wand terugkeren na een tijd $\Delta t = 2\Delta x/v_x$. Dus de druk door deze deeltjes uitgeoefend op de wand (met een oppervlakte van $A = \Delta y\Delta z$) bedraagt

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\sum \Delta p / \Delta t}{A} = \frac{\sum p_x v_x}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{N \langle p_x v_x \rangle}{V},$$

waarbij $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ het volume is van de doos en de driehoekige haakjes staan voor de gemiddelde waarde:

$$\langle p_x v_x \rangle = \frac{1}{N} \sum p_x v_x.$$

De impuls is $p_x = mv_x$ (voor fotonen stelt men $m = h\nu/c^2$)³⁹, en dus

$$P = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{V}.$$

Veronderstel dat de snelheid van de deeltjes isotroop verdeeld is. Dan is $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, en dus

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle,$$

en

$$P = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3V}.$$

Indien de deeltjes gasmoleculen zijn, dan bedraagt de energie van een molecule $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$. De totale energie van het gas is dan $E = N\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2}Nm \langle v^2 \rangle$, en dus kan de druk geschreven worden als

$$P = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \quad (\text{gas}).$$

Indien de deeltjes fotonen zijn, verplaatsen ze zich met de lichtsnelheid en hun energie bedraagt $\epsilon = mc^2$. De totale energie van een fotongas is dus $E = N\langle \epsilon \rangle = Nm \langle c^2 \rangle$ en de druk is

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V} \quad (\text{straling}).$$

Bekijken we het geval van een zwarte straler, dan weten we uit hoofdstuk 4 dat er voor de energiedichtheid u geldt dat

$$u = \frac{4\pi}{c} I,$$

en dat $F = \pi I$, wegens $F = \sigma T^4$ (hoofdstuk 5) geldt

$$\frac{E}{V} = u = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4}{c} F = \frac{4}{c} \sigma T^4 \equiv aT^4,$$

³⁸De waarde van de snelheid verandert niet bij het botsen, de vector \bar{v}_x verandert echter van zin.

³⁹Men kent immers de impuls $p = h\nu/c$ aan fotonen toe, bijgevolg geldt voor fotonen dat $mv = mc = (h\nu/c^2)c = h\nu/c = p$.

waarbij $a = 4\sigma/c$ gelijk is aan de stralingsconstante. De stralingsdruk bedraagt dus

$$P_{\text{rad}} = aT^4/3.$$

Geef een uitdrukking voor de gedegenererde elektronendruk. Maak hierbij gebruik van $P = (2/3)(E/V)$, met P de druk, E de energie en V het volume. Beschouw het nietrelativistische geval en het relativistische geval.

De algemene gaswet, ook wel ideale gaswet of wet van Boyle en Gay-Lussac genoemd, beschrijft het gedrag van ideale gassen onder invloed van druk, volume, temperatuur en aantal deeltjes. De wet luidt:

$$PV = nRT,$$

met P de druk in Pa (N/m^2), V het volume in m^3 , n de hoeveelheid gas in mol, R de gasconstante ($= 8.314472 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$) en T de temperatuur in kelvin.

Een ideaal gas heeft de volgende eigenschappen:

- Het eigen volume van de moleculen is verwaarloosbaar ten opzichte van de ruimte tussen de moleculen.
- De onderlinge aantrekkingskrachten tussen de moleculen zijn verwaarloosbaar bij de gewenste meetnauwkeurigheid. De potentiële energie is dus ook verwaarloosbaar.
- Moleculen botsen volkomen elastisch, dat wil zeggen zonder netto verlies van kinetische energie. Energie-overdracht van het ene op het andere molecuul is wel mogelijk.
- Het blijft steeds in zijn gastoestand, ook al verandert de temperatuur of de druk.

Uit de statistische mechanica blijkt echter ook dat geldt dat

$$PV = NkT,$$

waarbij k de constante van Boltzmann is en N het aantal deeltjes in het gas. Dit impliceert dat $Nk = nR$. We hebben reeds afgeleid dat

$$P = \frac{Nm\langle v^2 \rangle}{3V},$$

bijgevolg geldt dat

$$T = \frac{m\langle v^2 \rangle}{3k},$$

of dus de kinetische gaswet zoals eerder gegeven.

Wegens de hoge temperatuur van het gas in sterren is het gas bijna volledig geïoniseerd. De interactie tussen de individuele deeltjes is klein, zodat met een goede benadering het

gas de ideale gaswet volgt. Zij m_{H} de moleculaire massa van een waterstofatoom, en μ het gemiddeld moleculair gewicht van een gasdeeltje per eenheid van m_{H} ⁴⁰, dan geldt er

$$N = \frac{m}{\mu m_{\text{H}}},$$

met m de massa van het gas. Wegen $\rho = m/V$ vinden we dat de algemene gaswet geschreven kan worden als

$$P = \frac{1}{V} \frac{m}{\mu m_{\text{H}}} kT = \frac{k}{\mu m_{\text{H}}} \rho T.$$

Het gemiddeld moleculair gewicht kan bij benadering berekend worden indien men een complete ionisatie veronderstelt. Een atoom met een kernlading Z produceert dan $Z + 1$ vrije deeltjes bij ionisatie (de nucleus en Z elektronen). Waterstof geeft aanleiding tot twee deeltjes per atomische massa-eenheid. Helium geeft aanleiding tot drie deeltjes per vier⁴¹ atomische massa-eenheden. Voor alle elementen zwaarder dan waterstof en helium volstaat het meestal om $Z + 1$ ⁴² als de helft van het atomisch gewicht te nemen. (Exacte waarden zouden eenvoudig berekend kunnen worden, maar de overvloed aan zwaardere elementen is zo klein dat dit meestal niet nodig is.) In de astrofysica wordt de relatieve massa van waterstof genoteerd met X , die van helium met Y en die van alle zwaardere elementen met Z , zodat

$$X + Y + Z = 1.$$

(De Z in deze vergelijken mag niet verward worden met de nucleaire lading, wat helaas met dezelfde letter genoteerd wordt. Pak dan A, B en C eh mottigaards.) Dus het gemiddelde moleculaire gewicht zal gelijk zijn aan

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z}.$$

Bij hoge temperaturen moet de stralingsdruk aan de gasdruk worden toegevoegd om de ideale gaswet te beschrijven. De druk die uitgeoefend wordt door de straling bedraagt

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4,$$

waarbij a gelijk is aan de stralingsconstante. Dus de totale druk bedraagt

$$P = \frac{k}{\mu m_{\text{H}}} \rho T + \frac{1}{3} a T^4.$$

De constante gaswet geldt niet bij zeer hoge dichtheden.

Volgens de kwantummechanica kan niet alles tegelijk nauwkeurig gemeten worden. Bijvoorbeeld is er in principe geen manier om de x -coördinaat en de impuls p_x in de richting

⁴⁰D.i. μm_{H} is gelijk aan de gemiddelde massa van een gasdeeltje $= m/N$.

⁴¹De meest voorkomende isotoop van waterstof, protium (^1H), bevat geen neutronen, en bestaat enkel uit een proton en een elektron. De meest voorkomende isotoop van helium is ^4He , met twee neutronen en twee protonen en bestaat dus uit vier atomische massa-eenheden.

⁴²Dit kan intuïtief gezien worden als een benadering van $(Z + 1)/2Z$ door $1/2$.

van de x -as met een willekeurige precisie tegelijk te bepalen. Deze hoeveelheden hebben kleine onzekerheden Δx en Δp_x , zodat

$$\Delta x \Delta p_x \approx \bar{h},$$

waarbij $\bar{h} = h/2\pi$ met \bar{h} de constante van Dirac, de gereduceerde constante van Planck. Een gelijkaardige relatie geldt ook voor de andere richtingen. Ook tijd en energie staan in verband via een onzekerheidsrelatie,

$$\Delta E \Delta t \approx \bar{h}.$$

Dit principe staat gekend als de *onzekerheidsrelatie van Heisenberg*.

Het *uitsluitingsprincipe van Pauli* stelt dat een atoom met meerdere elektronen geen meerdere elektronen kan hebben waarvoor alle vier de kwantumgetallen gelijk zijn. Dit kan ook veralgemeend worden naar een gas bestaande uit elektronen. Een *faseruimte* kan gebruikt worden om de elektronen te beschrijven. Een faseruimte is een 6-dimensionale ruimte, drie coördinaten geven de positie van het deeltje weer en de andere drie coördinaten bestaan uit de impuls in de x , de y en de z richtingen. Een volume-element van de faseruimte is

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z.$$

Uit de onzekerheidsrelatie volgt dat het kleinste betekenishoudende volume-element van de orde h^3 is. Volgens het uitsluitingsprincipe kunnen er slechts twee elektronen met een tegenovergestelde spin zich in zo'n volume-element bevinden.

Wanneer de druk hoog genoeg wordt zullen alle volume-elementen van de faseruimte opgevuld geraken tot een zekere limietimpuls p_0 , gekend als de Fermi impuls. Zo'n materie wordt **gedegenererd** genoemd.

Elektronengas begint te degenereren wanneer de dichtheid een orde van 10^7 kg/m³ heeft. In gewone sterren is het gas meestal niet gedegenererd, maar in witte dwergen en neutronensterren, is deze gedegenererde toestand enorm belangrijk (zie verder).

We zullen nu de druk bepalen van een volledig gedegenererd gas.

Zij het volume van het gas gelijk aan V . We beschouwen elektronen met een impuls in het bereik $[p, p + dp]$. Hun beschikbare faseruimtevolume bedraagt⁴³ $4\pi p^2 dp V$. Volgens de onzekerheidsrelatie van Heisenberg is het elementaire volume in de faseruimte gelijk aan h^3 en volgens het uitsluitingsprincipe van Pauli kan dit volume twee elektronen met een tegengestelde spin bevatten. Het aantal elektronen in het impulsbereik $[p, p + dp]$ bedraagt dus

$$dN = 2 \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3}.$$

⁴³Men kan dit intuïtief inzien doordat de vectoren \vec{p} een soort van driedimensionale deelruimte van de zesdimensionale faseruimte in beslag nemen. De vectoren met een grootte p binnen het bereik $[p, p + dp]$ zijn de vectoren die zich in de bolschil bevinden die bepaald wordt door de bol met straal p en de bol met straal $p + dp$.

Het totaal aantal elektronen met een impuls kleiner dan p_0 bedraagt

$$N = \int dN = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_0} p^2 dp = \frac{8\pi V}{3h^3} p_0^3.$$

De Fermi impuls p_0 bedraagt dus

$$p_0 = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{h}{2} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}.$$

NIETRELATIVISTICH GAS

De kinetische energie van een elektron bedraagt $\epsilon = p^2/2m_e$. De totale energie van het gas wordt gegeven door

$$E = \int \epsilon dN = \frac{4\pi V}{m_e h^3} \int_0^{p_0} p^4 dp = \frac{4\pi V}{5m_e h^3} p_0^5.$$

Substitueren we de verkregen uitdrukking voor de Fermi impuls in deze vergelijking p_0 , dan krijgen we

$$E = \frac{\pi}{40} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3} \frac{h^2}{m_e} V \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}.$$

Verder geldt

$$P = \frac{2E}{3V} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}.$$

Hier staat N/V voor de aantaldichtheid in elektronen.

De druk van een gedegeneerd elektronengas is dus

$$P \approx \left(\frac{h^2}{m_e}\right) \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3},$$

waarbij m_e de massa is van een elektron en N/V het aantal elektronen per volume-eenheid. Deze vergelijking kan geschreven worden in termen van de dichtheid

$$\rho = N\mu_e m_H / V,$$

met μ_e het gemiddeld moleculair gewicht per vrij elektron in eenheden van m_H . Een uitdrukking voor μ_e kan analoog worden afgeleid:

$$\mu_e = \frac{1}{X + \frac{2}{4}Y + \frac{1}{2}Z} = \frac{2}{X + 1},$$

waarbij deze laatste gelijkheid volgt uit $X + Y + Z = 1$. Voor de overvloed aan waterstof wat betreft de zon geeft dit

$$\mu_e = 2/(0.71 + 1) = 1.17.$$

De laatste uitdrukking voor de druk is

$$P \approx \left(\frac{h^2}{m_e} \right) \left(\frac{\rho}{\mu_e m_H} \right)^{5/3}.$$

Dit is de toestandsvergelijking voor een gedegeneerd elektronengas. In tegenstelling tot de ideale gaswet hangt de druk niet langer af van de temperatuur, alleen van de dichtheid en van de massa van de deeltjes.

Bij normale sterren is de gedegeneerde gasdruk verwaarloosbaar, maar in centrale gedeelten van reuzensterren, waar de dichtheid van een orde van 10^8 kg/m^3 is, wordt de gedegeneerde gasdruk dominant, ondanks de hoge temperatuur.

Bij nog hogere dichtheden wordt de elektronenimpuls zodanig groot dat hun snelheden de lichtsnelheid benaderen. In dit geval moeten de formules van de speciale relativiteitstheorie gebruikt worden.

In de relativiteitstheorie hangt de massa van een voorwerp af van diens snelheid volgens de vergelijking

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

waarbij m_0 staat voor de rustmassa van het voorwerp, de massa bij $v = 0 \text{ m/s}$. Dus hoe groter de snelheid van een voorwerp, hoe groter diens massa. De relativistische impuls wordt bijgevolg gegeven door

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Indien de snelheid v veel kleiner is dan c geeft dit de standaard formule voor de impuls. Indien v naar c nadert zien we dat de noemer van de vergelijking voor de impuls naar nul nadert, of dus p nadert wiskundig gezien naar oneindig. Samen met de welbekende formule van Einstein

$$\epsilon = mc^2,$$

geeft dit

$$\begin{aligned} p^2 c^2 &= \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{m_0^2 \frac{v^2}{c^2} c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{m_0^2 c^4 \left[\frac{v^2}{c^2} - 1 \right]}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{m_0 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= -m_0^2 c^4 + (mc^2)^2 \\ &= -m_0^2 c^4 + \epsilon^2, \end{aligned}$$

of dus

$$pc = \sqrt{\epsilon^2 - (m_0c^2)^2}.$$

We zien dus dat in extreem relativistische gevallen, waarbij de energie ϵ veel groter is dan de rustenergie m_0c^2 , dat $pc \rightarrow \epsilon$.

RELATIVISTICH GAS

Indien de dichtheid zodanig groot wordt dat de kinetische energie ϵ dat overeenkomt met de Fermi impuls de rustenergie $m_e c^2$ overschrijdt, moet de relativistische uitdrukking voor de elektronenenergie gebruikt worden. In het extreem relativistisch geval is $\epsilon = cp$, en de totale energie bedraagt

$$E = \int \epsilon \, dN = \frac{8\pi cV}{h^3} \int_0^{p_0} p^3 \, dp = \frac{2\pi cV}{h^3} p_0^4.$$

De uitdrukking voor de Fermi impuls blijft onveranderd, en dus

$$E = \frac{\pi}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{4/3} hcV \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}.$$

De druk van een relativistisch elektronengas kan afgeleid worden via de formule van de druk in een fotogas:

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} hc \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}.$$

We hebben de nietrelativistische en de extreem relativistische benaderingen van de druk verkregen. Bij intermediaire gevallen moet de exacte waarde

$$\epsilon = (m_e^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2},$$

worden gebruikt.

Bij de nog hogere dichtheden wanneer de elektronen de lichtsnelheid benaderen, wordt de druk van een gedegeneerd gas dus gegeven door

$$P \approx hc \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} = hc \left(\frac{\rho}{\mu_e m_H}\right)^{4/3}.$$

In het relativistisch geval is de druk proportioneel met de dichtheid volgens de macht $4/3$, in tegenstelling tot $5/3$ zoals bij het nietrelativistisch geval. De overgang naar het relativistisch geval neemt ongeveer bij een dichtheid van 10^9 kg/m^3 plaats.

Gewoonlijk hangt de druk in een ster af van de temperatuur (behalve bij een volledig gedegeneerd gas), de dichtheid en de chemische samenstelling. In de praktijk zal het gas in de sterren nooit compleet geïoniseerd zijn of volledig gedegeneerd. De druk zal dan gegeven worden door ingewikkeldere uitdrukkingen. Toch kan het in elk geval waarin men geïnteresseerd is berekend worden. Men kan dan schrijven

$$P = P(T, \rho, X, Y, Z),$$

gegeven de druk als een bekende functie van de temperatuur, dichtheid en chemische samenstelling.

De *opaciteit* van een gas beschrijft hoe moeilijk het is voor de straling om er zich door voort te planten. De verandering dI van de intensiteit binnen een afstand dr kan uitgedrukt worden als

$$dI = -I\alpha dr ,$$

waarbij α de opaciteit is. De opaciteit hangt af van de chemische samenstelling, temperatuur en dichtheid van het gas. Het wordt gewoonlijk geschreven als $\alpha = \kappa\rho$, waarbij ρ de dichtheid is van het gas en κ de massa-absorptiecoëfficiënt ($[\kappa] = \text{m}^2/\text{kg}$).

Vragen Hoofdstuk 11

Type II

Leid uitdrukkingen af voor de 3 tijdsschalen die kunnen onderscheiden worden in de evolutie van een ster.

NUCLEAIRE TIJDSSCHAAL

De tijd waarin een ster alle energie die vrijkomt door nucleaire reacties kan uitstralen (via lichtkracht) wordt de **nucleaire tijdsschaal** genoemd. Een schatting van deze tijd kan verkregen worden indien men de tijd berekent waarin alle beschikbare waterstof wordt omgezet in helium. Op basis van theoretische overwegingen en evolutionaire berekeningen weet men dat dat slechts iets over de 10% van de totale massa van waterstof in een ster geconsumeerd kan worden voordat andere, snellere evolutionaire mechanismen in gang gebracht worden. Aangezien 0.7% van de rustmassa door waterstofverbranding omgezet wordt in energie zal de nucleaire tijdschaal bij benadering gelijk zijn aan

$$t_n \approx \frac{0.007 \times 0.1 M c^2}{L}.$$

Voor de zon verkreeg men een nucleaire tijdsschaal van 10^{10} jaar, en dus geldt

$$10^{10} \text{ jaar} \approx \frac{0.007 \times 0.1 M_\odot c^2}{L_\odot},$$

waaruit

$$t_n \approx \frac{M/M_\odot}{L/L_\odot} \times 10^{10} \text{ jaar}.$$

Dit geeft de nucleaire tijdsschaal in functie van de massa M en lichtkracht L bij een gegeven ster.

THERMISCHE TIJDSSCHAAL

De tijd waarin een ster al diens warmte-energie zou uitstralen indien de nucleaire energieproductie van de ster plots zou stoppen wordt de **thermische tijdsschaal** genoemd. Dit is ook de tijd die nodig is om straling vanuit de kern naar het oppervlak te transporteren.

We zullen een benadering doen van de totale gravitationele bindingsenergie van de ster. De algemene formule voor de gravitationele potentiële energie tussen twee objecten met massa m_1 en m_2 die zich op een afstand r van elkaar bevinden wordt gegeven door

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

We veronderstellen dat de ster een ideale sfeer is opgebouwd uit verschillende concentrische schillen. Om de gravitationele bindingsenergie te vinden kan de gravitationele potentiële energie vervolgens geïntegreerd worden over alle schillen van de kern tot aan de straal R

van de ster. Hierbij stellen we de twee massa's in de vergelijking van de gravitationele potentiële energie gelijk aan de massa van de dunne schillen met een dikte dr en de door deze schillen ingesloten massa op een afstand r van het centrum:

$$U = -G \int_0^R \frac{m(r)4\pi r^2 \rho(r)}{r} dr ,$$

waarbij $m(r)$ voor de ingesloten massa bij een straal r staat. Voor een benadering zullen we een uniforme dichtheid veronderstellen, zodat ρ onafhankelijk is van r , en bijgevolg

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho ,$$

hieruit volgt

$$U = -G \frac{16}{3}\pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr = -G \frac{16}{15}\pi^2 \rho^2 R^5 .$$

Aangezien er bij deze uniforme dichtheid geldt dat $\rho = M/V = 3M/(4\pi R^3)$ vinden we dat

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} .$$

Een benadering van de thermische tijdschaal krijgen we wanneer we de tijd bepalen die een ster met een massa M , een straal R en een lichtkracht L nodig heeft om een energie van deze grootte uit te stralen:

$$t_t \approx \frac{3GM^2}{5RL} .$$

In het boek wordt dit anders gedaan. De formule in het boek gaat als volgt:

$$t_t \approx \frac{0.5GM^2/R}{L} ,$$

en verschilt dus wat betreft de constante factor.

Uit bronnen haal ik dat de thermische tijdschaal van de zon met de formule die hier afgeleid werd zo'n 18 miljoen jaar bedraagt, terwijl deze in het boek 20 miljoen jaar geschat wordt, nochtans is de factor $3/5$ groter dan de factor $1/2$. Het punt van dit soort problemen is nu eenmaal niet om een precieze waarde te krijgen voor de geschatte grootheden maar een idee van hun omvang, bijvoorbeeld spreken we hier nu over miljarden jaren, miljoenen jaren of misschien wel over uren? Het doel van deze formules is om hierop een antwoord te kunnen geven, niet om de exacte tijd te kunnen voorspellen. In de praktijk zal deze toch niet geverifieerd kunnen worden. Zo zou een relatief korte benadering van deze formule kunnen beginnen met het uitrekenen van de gravitationele potentiële energie van de stellaire massa in de potentiaal aan de oppervlakte van de ster (GM/R) bij een uniforme dichtheid. Hierbij zou men geen constante factor uitkomen.

Verdergaand met de formule uit het boek vinden we analoog als bij de nucleaire tijdschaal:

$$t_t \approx \frac{(M/M_\odot)^2}{(R/R_\odot)(L/L_\odot)} \times 2 \times 10^7 \text{ jaar} .$$

DYNAMISCHE TIJDSSCHAAL

De **dynamische tijdschaal** is de derde en korste tijdschaal en is de tijd dat een ster zou nodig hebben om in te storten indien de interne druk die de ster ondersteunt tegen de zwaartekracht in plots zou wegvallen. Het kan geschat worden door de tijd dat een deeltje op het oppervlak van de ster zou nodig hebben om vrij te vallen naar de kern toe.

De valversnelling⁴⁴ aan het oppervlak van de ster wordt gegeven door

$$g = G \frac{M}{R^2},$$

waarbij G de gravitatieconstante is, M de massa en R de straal van de ster. Er geldt

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

Stellen we $\Delta x = R$, $v_0 = 0$ m/s, $a = g$, en lossen we de vergelijking op naar t vinden we de dynamische tijdschaal:

$$t_d = \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}}.$$

De dynamische tijdschaal van de zon bedraagt ongeveer een half uur⁴⁵.

De ordening van de tijdschaal is gewoonlijk zoals bij de zon, d.i. $t_d \ll t_i \ll t_n$.

Beschrijf de contractie van een gaswolk tot een ster die waterstof omzet in helium, zowel fysisch, als in het HR diagram.

Een *protoster* is een object dat zich in het contractieproces van de vorming van een ster bevindt.

Wanneer een gaswolk samentrekt komt er gravitationele potentiële energie vrij onder de vorm van warmte-energie van het gas en onder de vorm van straling. In het begin kan de straling vrij doorheen de materie gaan vanwege diens lage dichtheid en kleine opaciteit. Daarom wordt de meeste vrijgekomen energie weggestraald en stijgt de temperatuur niet. De contractie neemt plaats op een dynamische tijdschaal; het gas valt vrij naar binnen toe.

De dichtheid en de druk nemen het snelst toe nabij het centrum van de wolk. Terwijl de dichtheid stijgt, stijgt de opaciteit mee. Een groter deel van de vrijgekomen energie wordt dan omgezet in warmte, en de temperatuur begint te stijgen. Dit leidt tot een verdere stijging in druk die de vrije val tegengaat. De contractie van het centrale deel van de wolk vertraagt. De buitenste delen zijn echter nog steeds vrij aan het vallen.

Tijdens deze fase zou de wolk reeds als protoster beschouwd kunnen worden. Het bestaat vooral uit moleculair waterstof. Wanneer de temperatuur 1800 K bereikt, worden de

⁴⁴De formule voor t_d uit het boek verschilt met een factor $\sqrt{2}$ van de hier afgeleide formule.

⁴⁵Volgens het boek.

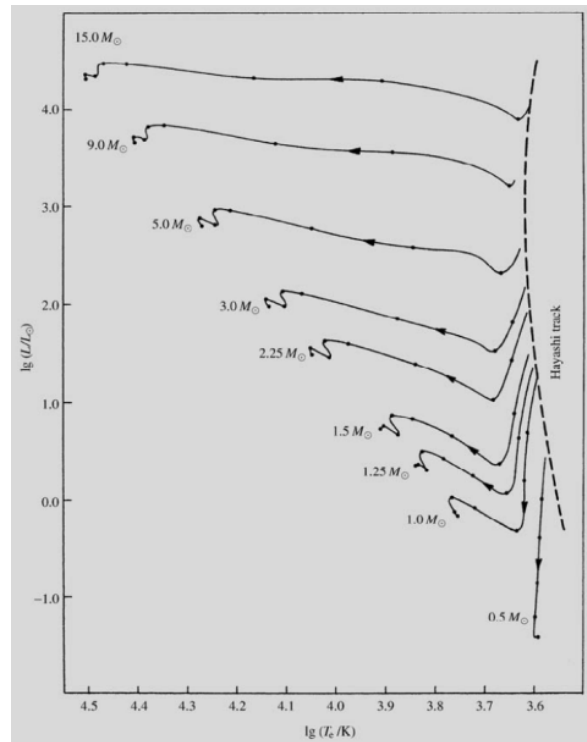
moleculen gescheiden in atomen. Deze scheiding vereist energie, en de temperatuusstijging vertraagt. Ook de druk stijgt dan trager waardoor de snelheid van de contractie verhoogt. Deze sequentie wordt herhaald, eerst wanneer waterstof geïoniseerd wordt bij 10^4 K, vervolgens wanneer helium geïoniseerd wordt. Wanneer de temperatuur ongeveer 10^5 K heeft bereikt, is het gas zo goed als volledig geïoniseerd.

De contractie van een protoster stopt slechts wanneer een grote fractie gas volledig geïoniseerd is onder de vorm van *plasma*. De ster stelt zich dan in een hydrostatisch evenwicht. De verdere evolutie van de ster verloopt veel langzamer. De straal van een protoster is gekrompen van een originele waarde van ongeveer 100 AU tot ongeveer 1/4 AU. Het zal zich vaak in een grotere gaswolk bevinden en materie aanleggen uit diens omgeving. De massa neemt hierdoor toe, en de centrale temperatuur en dichtheid stijgen.

De temperatuur van een ster die juist een evenwicht heeft bereikt is nog laag en diens opaciteit overeenkomstig hoog. Dus zal de ster convectief zijn in diens kern. De convectieve energietransport is best efficiënt en het oppervlak van de protoster zal daardoor relatief helder zijn.

We bespreken nu de evolutie in het HR-diagram. Oorspronkelijk zal de protoster vaag en koel zijn, het zal zich onderaan rechts in het HR diagram bevinden (nog buiten de figuur). Tijdens het instorten zal het oppervlak snel opwarmen en helderder worden waardoor de ster zich naar rechtsboven toe zal verplaatsen op het diagram van de figuur. Op het eind van de instorting zal de ster zich vestigen op een punt dat overeenkomt met diens massa op het *Hayashi pad*. Dat pad geeft de locatie van sterren in het HR-diagram weer die volledig convectief zijn. Sterren rechts van dit pad kunnen nooit in evenwicht zijn en zullen instorten op een dynamische tijdschaal.

De straal en lichtkracht van de ster zullen afnemen en de ster zal zich op een thermische tijdschaal bijna verticaal naar beneden volgens het Hayashi pad in het HR-diagram verplaatsen. Terwijl de temperatuur in de kern verder toeneemt zal de opaciteit dalen en energie zal beginnen getransporteerd worden via straling. De massa van de radiatieve zone zal gradueel toenemen tot uiteindelijk het grootste deel van de ster radiatief is. Voorheen was alle stellaire energie afkomstig van vrijgekomen potentiële energie, maar nu begint de bijdrage van kernreacties toe te nemen en de lichtkracht neemt toe. De stellaire oppervlaktetemperatuur zal ook toenemen en de ster zal zich langzaam naar linksboven in het HR-diagram verplaatsen. Bij massieve sterren gebeurt deze verplaatsing naar links veel eerder, aangezien hun centrale temperatuur hoger is en de nucleaire reacties eerder van start gaan.



De start van de hoofdreeks wordt gekenmerkt door de start van de waterstofverbranding in de pp keten bij een temperatuur van ongeveer 4 miljoen graden. De nieuwe vorm van energieproductie vervangt volledig de door contractie vrijgegeven energie. Wanneer de contractie wordt stopgezet zal de ster nog even oscilleren in het HR-diagram, maar zich vervolgens vlug in een evenwicht settelen waardoor de lange, kalme hoofdreeksfase begint.

Beschrijf de structuur van een ster op de hoofdreeks.

Een ster in de *hoofdreeks* is in een evolutionaire fase waarin de energie die vrijkomt door de waterstofverbranding de enige bron van energie is van de ster. Tijdens deze fase is de ster in een stabiel evenwicht, en diens structuur verandert enkel maar omdat de chemische compositie van de ster langzaam verandert vanwege de nucleaire reacties. Dus deze evolutie vindt plaats op een nucleaire tijdschaal, wat betekent dat de hoofdreeks de langste fase is in de levensduur van de ster. Bijvoorbeeld voor een ster met de massa van een zon duurt de hoofdreeksfase zo'n 10,000 miljoen jaar. Meer massieve sterren evolueren sneller omdat deze meer vermogen uitstralen.

Aangezien sterren het meest waarschijnlijk in het stadium van constante waterstofverbranding gevonden worden is de hoofdreeks in het HR-diagram het drukst bezet, in bijzonder aan het 'lage massa'-uiteinde. Massievere sterren bevinden zich minder talrijk in de hoofdreeks wegens de kortere duur van hun hoofdreeksduur.

De sterren op het *bovenste gedeelte van de hoofdreeks* zijn zo massief dat hun centrale temperatuur zo hoog is dat de CNO cyclus in werking kan gaan. De energieproductie in de CNO cyclus is zeer sterk geconcentreerd binnen de kern. Het uitgaande energievermogen is zodanig groot dat het niet onderhouden kan worden door transport via straling/radiatie. Daarom hebben deze sterren een *convectieve kern*, d.i. dat energie getransporteerd wordt via de verplaatsing van materie. Dit zorgt ervoor dat de materie goed gemengd blijft waardoor de overvloed aan waterstof uniform afneemt in de convectieregio.

Buiten de kern bevindt er zich een *stralingsevenwicht*, d.i. dat de energie door straling getransporteerd wordt en er hier geen nucleaire reacties plaatsvinden. Tussen de kern en deze enveloppe (hetgeen de kern omgeeft) is er een transitieregio waar de overvloed aan waterstof afneemt naar binnen toe. De massa van de convectieve kern zal langzaam afnemen terwijl het waterstof geconsumeerd wordt. Wanneer de voorraad uitgeput geraakt zal de kern zeer snel beginnen krimpen. Vanwege deze contractie van de kern zal de temperatuur in de omringende waterstofschild juist buiten de kern stijgen. Het wordt snel terug hoog genoeg opdat waterstofverbranding terug van start kan gaan.

De sterren op het *onderste gedeelte van de hoofdreeks* hebben een lagere centrale temperatuur dan de massieve sterren, en energie wordt geproduceerd door de pp keten. Aangezien de reactiesnelheid van de pp keten niet zo temperatuursgevoelig is als bij de CNO keten, kan de energieproductie verspreid worden over een grotere regio dan bij de meer massieve sterren. In gevolg wordt hun kern nooit convectief onstabiel, maar blijft radiatief.

In de buitenste lagen van deze sterren is de opaciteit zeer hoog vanwege de lage temperatuur. Straling kan de energie niet langer transporteren en convectie zal van start gaan. De

structuur van de sterren op het onderste gedeelte van de hoofdreeks is dus omgekeerd aan die van deze op het bovenste gedeelte: de kern is radiatief en de enveloppe convectief. Aangezien de materie in de kern niet gemengd wordt door convectie, wordt waterstof zeer snel geconsumeerd in de kern, en de overvloed aan waterstof stijgt naar buiten toe. De hoeveelheid waterstof in de kern neemt steeds af. Uiteindelijk bestaat de kern bijna alleen nog uit helium. De waterstofverbranding gaat door in de dikke schil rond de kern.

Verklaar hoe de helium flash ontstaat.

De hoofdreeksfase van de evolutie van een ster eindigt wanneer de waterstofbron in de kern uitgeput geraakt. De ster settelt zich in een staat waarbij waterstof verbrand wordt in een schil dat een heliumkern omgeeft.

De massa van de heliumkern stijgt doordat het waterstof in de schil verbrand wordt. Dit leidt tot een uitbreiding van de enveloppe van de ster, die bijna horizontaal naar rechts beweegt op het HR-diagram. Terwijl de convectieve enveloppe steeds verder uitbreidt benadert de ster het Hayashi pad. Aangezien de ster niet verder naar rechts kan en de straal blijft stijgen moet de ster naar boven bewegen volgens het Hayashi pad naar hogere lichtkrachten toe. De ster is een rode reus geworden.

Bij sterren met een lagere massa ($M \leq 2.3M_{\odot}$) zal wegens het toenemen van de massa van de kern de dichtheid uiteindelijk zodanig groot worden dat die gedegeneerd⁴⁶ zal worden. De kerntemperatuur blijft stijgen. De hele heliumkern zal een uniforme temperatuur hebben vanwege de grote conductiviteit van het ontaarde gas. Bij sterren met een massa van meer dan $0.26 M_{\odot}$ zal de kerntemperatuur uiteindelijk zo'n 100 miljoen graden worden, wat genoeg is om helium om te zetten in koolstof via het triple alpha proces.

Heliumverbranding zal gelijktijdig van start gaan in de hele centrale regio die hierdoor plots een stijging in temperatuur zal ondervinden. In tegenstelling tot een gewoon gas, kan de gedegeneerde kern zich niet uitbreiden, hoewel temperatuur stijgt, daardoor resulteert de temperatuurstijging enkel in een hogere frequentie van de kernreacties. Wanneer de temperatuur nog verder toeneemt, verliest het gas diens gedegeneerde toestand, de kern zal hierdoor heftig uitbreiden. Slechts enkele seconden na de ontsteking van het helium is er een explosie, de *helium flash*.

Hoe worden de elementen die zwaarder zijn dan ijzer aangemaakt. Welke nucleaire reacties spelen een rol? Beschrijf het r en s proces (kwalitatief, in grafiek, zonder specifieke getallen).

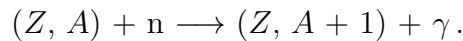
Bijna alle kernen zwaarder dan helium werden geproduceerd bij kernreacties in het inwendige van sterren. Bij de oudste sterren bedraagt de massafractie van de zware elementen slechts iets van 0.2%, terwijl dit bij de jongste sterren een paar procent is. Hoe dan ook bestaat de meeste stellaire materie uit waterstof en helium. Volgens het standaard

⁴⁶Gedegeneerde of ontaarde materie is materie die zodanig door de zwaartekracht wordt samengeperst dat de tegendruk van de materiedeeltjes dominant wordt in de totale druk. Een belangrijke eigenschap van een gedegeneerd gas is dat de temperatuur onafhankelijk is van de druk. Indien men een ballon met een gedegeneerd gas zou opvullen zou deze niet uitzetten bij het verwarmen.

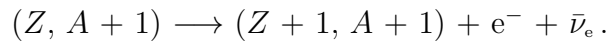
kosmologisch model werden deze gevormd in de vroege fases van het heelal, wanneer de temperatuur en dichtheid geschikt waren voor kernreacties. Hoewel helium geproduceerd wordt bij de hoofdreeks van de stellaire evolutie, wordt er zeer weinig van terug in de ruimte gezonden om te worden opgenomen door latere stellaire generaties. Het meeste ervan wordt omgezet in zwaardere elementen door verdere reacties, of anders blijft het opgesloten in de overblijfselen van witte dwergen. Hierdoor stijgt de overvloed aan helium vanwege stellaire processen niet veel.

De vorming van elementen zwaarder dan ijzer vereist een input van energie en kan niet op dezelfde manier verklaard worden als de belangrijkste kernreacties die leiden tot de opstapeling van zwaardere kernen tot aan ijzer. De meeste kernen zwaarder dan ijzer worden gevormd door middel van *neutronenvangst*. Aangezien een neutron geen elektrische lading heeft kan het gemakkelijk doordringen tot in de kern. De waarschijnlijkheid dat neutronenvangst optreedt hangt af van zowel de kinetische energie van het inkomende neutron als van het massagetal van de kern.

Bij neutronenvangst wordt een kern met massagetal A omgezet tot een massievere kern:



De nieuw gevormde kern zou kunnen gevoelig zijn voor β -verval. In de kernfysica wordt onder β -verval verstaan een soort radioactief verval, waarbij een β -deeltje, namelijk een elektron of een positron wordt uitgestraald (β -straling). In dit geval wordt een neutron omgezet in een proton:

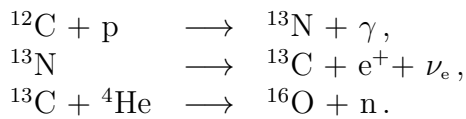


Hierbij staat $\bar{\nu}_e$ voor een antineutrino, het antideeltje van een neutrino. Antineutrino's komen vrij bij β -verval van een neutron, voor de rest er niet te veel bij stilstaan om potentiële hoofdpijn te vermijden. Het is nu per wiskundige inductie duidelijk hoe de zwaardere elementen kunnen geproduceerd worden.

Er worden twee vormen van neutronvangstprocessen tegengekomen, afhankelijk van de waarde van het neutronenvermogen. In het (slow) **s-proces**, is het neutronenvermogen zodanig klein dat elk β -verval tijd gehad heeft om te kunnen plaatsvinden voordat een volgende neutronvangstreactie kan plaatsvinden. De meest stabiele kernen tot een massagetal van 210 worden gevormd door middel van het s-proces.

Wanneer het neutronenvermogen groot is heeft β -verval geen tijd om plaats te vinden voor de volgende neutronenvangst. Men spreekt dan van het (rapid) **r-proces**, hetgeen aanleiding geeft tot meer neutronrijke isotopen.

Een neutronenvermogen geschikt voor het s-proces wordt verkregen in de loop van een normale stellaire evolutie. Bijvoorbeeld enkele van de koolstof- en zuurstofverbrandingsreacties produceren vrije neutronen. Indien er genoeg convectie is tussen de waterstof en helium verbrandende schillen kunnen er vrije protonen gedragen worden naar koolstofrijke lagen. Dan wordt de volgende neutronproducerende ketenreactie belangrijk:

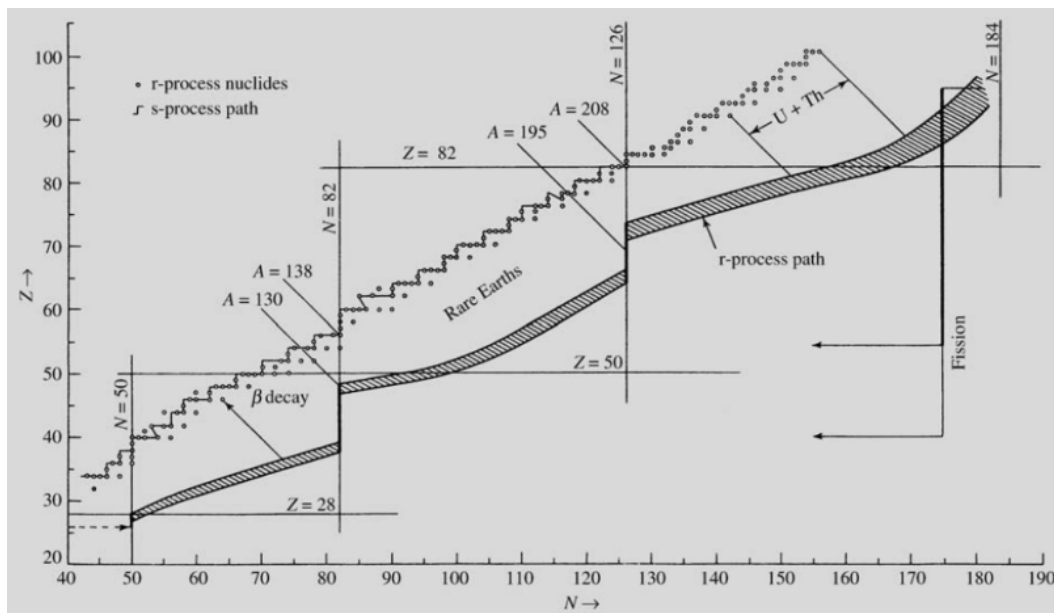


De convectie kan de reactieproducten ook dichterbij de oppervlakte toe brengen.

Het neutronenvermogen dat nodig is voor het r-proces is te groot om te kunnen geproduceerd worden bij normale evoluties van sterren. In dit geval zou de snelle neutronenvangst leiden tot kernen die geen verdere neutronen meer kunnen opvangen zonder sterk onstabiel te worden. Na één of meerdere β -vervalen kan het proces verder gezet worden.

Het r-proces stopt wanneer het neutronenvermogen afneemt. De geproduceerde kernen vervallen dan gradueel door middel van β -verval tot meer stabiele isotopen.

Op de grafiek volgt het s-proces een pad langs de β -stabiliteitslijn. De stabiele kernen afkomstig uit het r-proces resulteren uit β -verval van hun neutronrijke voorouders op het lager gelegen donkergrijze pad.



Type III

Wat is het verschil tussen een ster en een planeet?

Er is een minimum massa vereiste voor sterren op de hoofdreeks. Sterren met een massa van minder dan $0.8 M_{\odot}$ kunnen nooit warm genoeg worden voor waterstofverbranding in gang te zetten. Ze kunnen nog enig vermogen produceren door de verbranding van deuterium (^2H), maar deze energiebron is snel uitgeput. Deze *bruine dwergen* hebben een oppervlaktetemperatuur tussen de 1000 en 2000 K.

In een ster vinden er kernreacties plaats, in een planeet niet. Bij een zeer lage massa van sterren op de hoofdreeks zijn er geen nucleaire bronnen aanwezig. Zo gedragen de

kleinste protosterren (sterren in het begin van hun levenscyclus) zich gelijkaardig aan planeetachtige dwergen.

Men zou zich kunnen afvragen of er een verschil is tussen de bruine dwergen met de laagste massa en de meest massieve planeten. Indien het ontstaan van een bruine dwerg hetzelfde verloopt als dat van een andere ster is er geen reden om ze niet als ster mee te rekenen, ook al produceren ze geen energie door middel van kernreacties. Bij planeten onderstelt men echter dat deze veel trager worden gevormd uit de samenklontering van vaste materie en de aanleg van gas in een protoplanetaire schijf. De objecten die volgens dit mechanisme worden gevormd starten dus met een zeer verschillende structuur.

Vragen Hoofdstuk 13

Type III

Welke soorten pulserende sterren zijn er, en plaats ze in een HR diagram.

Veranderlijke sterren of *variabele sterren* zijn sterren waarvan de helderheid (magnitude) aan variaties onderhevig is. Strikt genomen zijn zoals gezien in hoofdstuk 11 alle sterren variabel, aangezien hun structuur en helderheid kan veranderen tijdens hun evolutie. Hoewel deze veranderingen gewoonlijk traag zijn, kunnen sommige evolutionaire fasen extreem snel verlopen. In bepaalde evolutionaire fasen zullen er ook periodieke variaties zijn, bijvoorbeeld pulsatie van de buitenste lagen van een ster. De helderheidsvariatie in functie van de tijd wordt de *lichtcurve* van een ster genoemd, indien de variatie periodiek is kan men uit deze curve de *amplitude* en de *periode* van de helderheidsvariatie halen.

De golflengten van de spectraallijnen van pulserende sterren veranderen samen met veranderingen in de helderheid van de sterren. Deze veranderingen worden veroorzaakt door het dopplereffect, hetgeen aantoont dat de buitenste lagen van de ster inderdaad pulseren. De waargenomen gassnelheden bevinden zich tussen de 40 en 200 km/s.

De periode van de pulsatie komt overeen met een grondtoon. Net zoals een stemvork gekarakteriseerd is met een grondtoon wanneer die wordt aangeslaan heeft een ster een fundamentele vibratiefrequentie. Bovenop deze grondtoon zijn andere frequenties, "boventonen", mogelijk⁴⁷.

Rond 1920 toonde de Engelse astrofysicus Arthur Eddington aan dat de pulsatieperiode P omgekeerd evenredig is met de vierkantswortel van de gemiddelde dichtheid,

$$P \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}.$$

De diameter van de ster kan verdubbelen maar gewoonlijk zijn de veranderingen in grootte gering. De voornaamste reden van de lichtvariatie is de periodieke variatie in de oppervlaktetemperatuur. In hoofdstuk 5 zagen we reeds dat de lichtkracht van een ster sterk afhangt van diens effectieve temperatuur, $L \propto T_e^4$. Dus een kleine verandering in effectieve temperatuur kan tot een grote variatie in helderheid leiden.

Gewoonlijk bevindt een ster zich in een stabiel hydrostatisch evenwicht. Indien diens buitenste lagen uitbreiden, zal de dichtheid en temperatuur afnemen. De druk wordt vervolgens kleiner en de zwaartekracht zal het gas terug samendrukken. Echter tenzij energie overgedragen kan worden in de gasbewegingen, zal het oscilleren afnemen.

Het stralingsvermogen uit het inwendige van ster zou een energiebron kunnen voorzien voor de stellaire oscillatie, indien het bij voorkeur zou geabsorbeerd worden in regio's met een hoge gasdensiteit. Gewoonlijk is dit niet geval, maar vindt deze absorptie plaats in

⁴⁷Iedere frequentie hoger dan de grondtoon is een boventoon.

ionisatiezones, waar waterstof en helium deels geïoniseerd zijn, de opaciteit stijgt in feite wanneer gas samengedrukt wordt. Indien de ionisatiezones zich op een geschikte diepte in de atmosfeer⁴⁸ bevinden, kan de geabsorbeerde energie tijdens de samendrukking en deze vrijgegeven tijdens de expansie van een ionisatiezone een oscillatie aandrijven. Sterren met een oppervlaktetemperatuur van 6000-9000 K zijn onderhevig aan deze instabiliteit. De overeenkomstige sectie in het HR-diagram wordt de *cepheïde instabiliteitsstrook* genoemd.

CEPHEÏDEN

Tot de belangrijkste pulserende variabelen behoren de **cepheïden**, genoemd naar δ Cephei. Hun periode bedraagt 1-50 dagen en hun amplitudes 0.1-2.5 magnitude. De vorm van de lichtcurve is regelmatig en vertoont een vrij snelle verheldering gevolgd door een tragere verduistering.

We hebben reeds vermeld dat de pulsatieperiode afhankelijk is van de gemiddelde dichtheid. Aan de andere hand is de grootte van de ster, en dus ook diens gemiddelde dichtheid, gerelateerd aan de totale lichtkracht. Dus men kan begrijpen dat er enige relatie moet bestaan tussen de periode en de lichtkracht van een pulserende ster. En dat is ook zo, men kan aantonen dat er een lineair verband bestaat tussen de absolute schijnbare magnitude M en de logaritme van de periode P van klassieke cepheïden.

W VIRGINIS-STERREN

In 1952 merkte *Walter Baade* op dat er eigenlijk twee groepen cepheïden zijn: de klassieke cepheïden en de **W Virgins-sterren**. Beide groepen volgen een periode-lichtkracht relatie maar de W Virgins-sterren bij een gegeven periode zijn 1.5 magnitude minder helder dan de overeenkomstige klasse cepheïden. De reden van dit verschil is dat de klassieke cepheïden behoren tot een jonge populatie objecten, terwijl de W Virgins-sterren tot een oudere populatie behoren. Voor de rest zijn de twee klassen gelijkaardig.

RR LYRAE-STERREN

De derde belangrijke klasse van pulserende variabelen zijn de **RR Lyrae-sterren**. Hun variatie in helderheid is kleiner dan die van de cepheïden, gewoonlijk minder dan één magnitude. Hun periode is ook korter, minder dan een dag. RR Lyrae-sterren behoren tot dezelfde oude populatie als de W Virgins-sterren.

MIRA VARIABELEN

De **Mira variabelen** (genaamd naar Mira Ceti) zijn superreuzen⁴⁹ van de spectraalklasse M, S of C. Ze verliezen gas door middel van een continue stellaire wind⁵⁰. Hun periode bedraagt normaal 100-500 dagen, om deze reden worden ze ook vaak langperiodieke variabelen genoemd. De amplitude van hun lichtvariatie bedraagt gewoonlijk 6 magnitude

⁴⁸De atmosfeer van een ster is de buitenste regio van het volume van een ster en ligt buiten de kern, convectie- en radiatiezone, voor de zon kan de atmosfeer bijvoorbeeld gezien worden bij een totale zonsverduistering.

⁴⁹Een superreus is de aanduiding voor de helderste soort min of meer stabiele sterren.

⁵⁰Analoog aan zonnewind.

in de zichtbare zone. De effectieve temperatuur van Mira variabelen is slechts ongeveer 2000 K. 95 % van hun straling bevindt zich in het infraroodgebied.

HALFREGELMATIGE EN ONREGELMATIGE VARIABELEN

Nog een grote groep van pulserende sterren zijn de *halfregelmatige* en *onregelmatige variabelen*. Het zijn superreuzen, vaak erg jonge massieve sterren met een nietcontinue pulsatie in hun uitgebreide buitenste lagen. Indien er enige periodiciteit terug te vinden is in de pulsaties worden deze variabelen halfregelmatig genoemd, zo niet worden ze onregelmatig genoemd.

DWERGCEPHEÏDEN

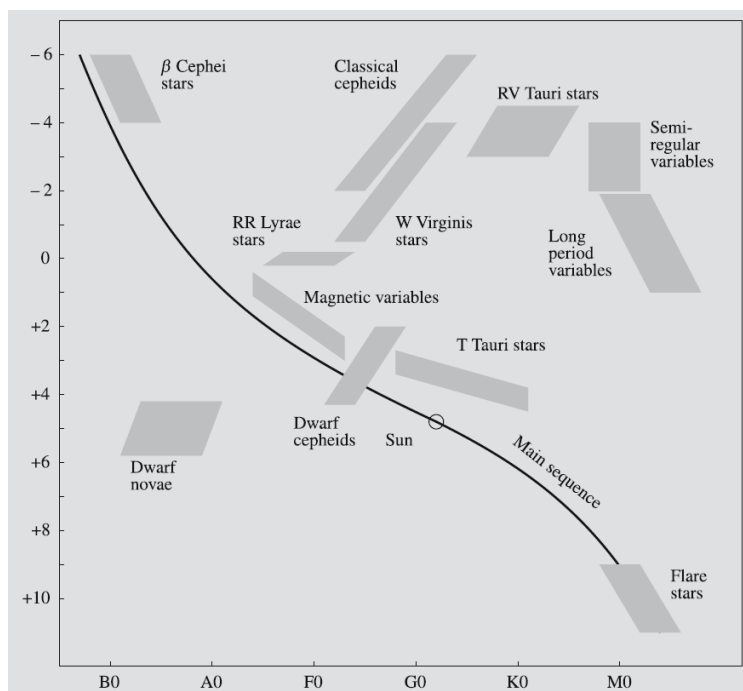
Dwergcepheïden zijn minder helder en variëren sneller dan de klassie cepheïden. Er zijn kleine variaties in de amplitude van deze sterren vanwege de interferentie tussen de grond- en overtoon.

β -CEPHEÏDEN

De *β -cepheïden* bevinden zich in een ander gebied op het HR-diagram dan de andere variabelen. Het zijn hete massieve sterren die vooral in ultraviolet stralen. De variaties zijn snel en van een kleine amplitude. Hun pulsatiemechanisme is onbekend.

RV TAURI VARIABELEN

De *RV Tauri-sterren* liggen tussen de cepheïden en de Mira-variabelen op het HR-diagram. Hun periode hangt lichtjes af van de lichtkracht. Er zijn een aantal onverklaarde eigenschappen van de lichtcurve van deze sterren.



Vragen Hoofdstuk 14

Type II

Leid een uitdrukking af voor de straal van een witte dwerg als een functie van de totale massa. Leid daartoe eveneens de vergelijking van het hydrostatisch evenwicht in een sferische ster af. Behandel vervolgens hetzelfde vraagstuk voor een neutronenster.

In de astrofysica staan de sterren waarbij de dichtheid van de materie veel groter is dan bij gewone sterren bekend als compacte objecten. Hiertoe behoren witte dwergen, zwarte gaten en neutronensterren. Bovenop een zeer hoge dichtheid worden compacte objecten ook gekarakteriseerd met het feit dat de kernreacties volledig zijn stopgezet in het inwendige van de objecten. Gevolgens kunnen ze zichzelf niet ondersteunen tegen de zwaartekracht in door middel van thermische gasdruk. Bij witte dwergen en neutronensterren wordt de zwaartekracht tegengegaan door middel van de druk van een gedegenererd gas. Bij een zwart gat is de zwaartekracht volledig dominant en drukt alle stellaire materiaal samen tot een oneindige dichtheid.

De hydrostatische evenwichtsvergelijking werd reeds afgeleid in hoofdstuk 10:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2}.$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{dP}{dr} \propto \frac{M_r\rho}{r^2}.$$

De massa van een witte dwerg of neutronenster bepaalt diens straal wat volgt uit de hydrostatische evenwichtsvergelijking en de relatie tussen druk en dichtheid voor een gedegenererd gas. Gebruik makend van de hydrostatische evenwichtsvergelijking kunnen we een schatting maken voor de gemiddelde druk P :

$$\left| \frac{dP}{dr} \right| \approx \frac{P}{R} \propto \frac{M \times M/R^3}{R^2} = \frac{M^2}{R^5}.$$

Hier hebben we gebruik gemaakt van $\rho \propto M/R^3$, hetgeen volgt uit de formule voor het volume van een bol. Dus de druk voldoet aan

$$P \propto M^2/R^4.$$

In het nietrelativistisch geval wordt de druk van een elektronengas gegeven door

$$P \approx (h^2/m_e)(\mu_e m_H)^{-5/3} \rho^{5/3}$$

en dus

$$P \propto \frac{\rho^{5/3}}{m_e \mu_e^{5/3}}$$

waaruit

$$\frac{M^2}{R^4} \propto \frac{\rho^{5/3}}{m_e \mu_e^{5/3}} \propto \frac{M^{5/3}}{R^5 m_e \mu_e^{5/3}}$$

of

$$R \propto \frac{1}{M^{1/3} m_e \mu_e^{5/3}} \propto M^{-1/3}.$$

Dus hoe kleiner de straal van een **witte dwerg** hoe groter diens massa wordt.

Neutronen zijn fermionen, net zoals elektronen. Ze voldoen aan het uitsluitingsprincipe van Pauli, en de gedegenererde neutronengasdruk wordt verkregen uit een analoge formule:

$$P_n \propto \frac{\rho^{5/3}}{m_n \mu_n^{5/3}},$$

waarbij m_n de massa is van een neutron en μ_n het moleculair gewicht per vrij neutron. Overeenkomstig, wordt de straal van een **neutronenster** gegeven door

$$R \propto \frac{1}{M^{1/3} m_n \mu_n^{5/3}}.$$