Analyse: vraagstuk van Kepler

Deel 1: Afleiden tweede wet (wet der perken)

Redelijk simpel. Uit de bewegingsvergelijking volgt dat $\ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r} = \mathbf{0}$. Dit impliceert dat $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{cte} = \boldsymbol{h}$.

Als je weet dat de tangentiële component van de snelheidsvector als grootte $r\dot{\theta}$ heeft dan komt dit op het volgende neer:

$$r^2 d\theta = h dt$$

Deel beide leden door twee en je hebt in het linkerlid een elementair stuk oppervlakte (waarbij de straal r reeds geïntegreerd is). Bovendien zien we direct dat na integratie dit oppervlak altijd hetzelfde zal zijn bij even grote tijdsintervallen, waarmee we besluiten:

Tweede wet van Kepler (*Wet der perken*): De planeet beweegt rond de zon met dusdanige snelheid dat de voerstraal planeet - zon gelijke oppervlakken in gelijke tijdsintervallen beschrijft.

(Deze hele bespreking kan in een notendop samengevat worden; behoud van impulsmoment, aangezien we hier met een centrale kracht te maken hebben, zie Theoretische Mechanica).

Deel 2: Afleiden eerste wet en ellipsvergelijking.

We keren terug naar de bewegingsvergelijking. We nemen van beide leden het inwendig product met $\dot{\boldsymbol{r}}$.

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}.\dot{\boldsymbol{r}}$$

Hetgeen, rekening houdend met de componenten van de vectoren in poolcoördinaten, na integratie oplevert:

$$\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{\mu}{r} = E_T$$

Met E_T de integratieconstante, die als betekening totale energie heeft

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mu}{r} = E_T$$

We vervangen waar nodig alle tijdsafgeleiden van θ met behulp van:

$$h = r^2\dot{\theta}$$

Hetgeen uit analyse van de newtonvergelijkingen een constante blijkt te zijn (zie Theoretische Mechanica I: Eerste Integralen).

Eveneens vervangen we in de tijdsafgeleide van r de dt door dθ(dt/dθ):

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{\mu}{r} = E_T$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 h^2}{r^4} + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r} = E_T$$

Hiermee hebben we een differentiaalvergelijking met twee onbekenden tot een met één onbekende herleid. Tenslotte doen we een substitutie: u = 1/r

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}\frac{dr}{du} = -\frac{du}{d\theta}\frac{1}{u^2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 h^2 + u^2h^2\right) - \mu u = E_T$$

Leiden we deze hele vergelijking af naar θ, en elimineren we alle overbodige factoren:

$$h^2\frac{d^2u}{d\theta^2} + h^2u - \mu = 0$$

Dit is onze finale differentiaalvergelijking (een niet-homogene lineaire harmonische oscillator) met als oplossing:

$$u(\theta) = \frac{\mu}{h^2} + A\cos(\theta - \omega)$$

A en ω zijn integratieconstanten. We nemen voor volgende beschouwingen zonder verlies van algemeenheid aan dat ω=0, dat de minimale afstand tot de zon in θ=0 ligt.

Hier de reciproke van nemen toont direct aan dat de baan een kegelsnede is:

$$r(\theta) = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{Ah^2}{\mu}\cos\theta}$$

Formeel:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Het punt bij θ=π/2 noemt men het **semilatus rectum**.

(*De hele bespreking omtrent de excentriciteit e laat ik hier weg.)*

Eerste wet van Kepler: De relatieve baan van een planeet om de zon is een ellips, met de zon in een van de brandpunten.

Deel 3: Afleiden betrekking voor de totale energie

Kijken we even terug naar het resultaat van het vorige deel dan zien we onmiddellijk:

$$A = \frac{e\mu}{h^2}$$

$$p = \frac{h^2}{\mu} \rightarrow h = \sqrt{p\mu}$$

Eveneens kunnen we uit de vergelijking voor de ellips direct afleiden wat de kortste en langste afstand planeet zon is:

$$r_m = \frac{p}{1+e}$$

$$r_M = \frac{p}{1-e}$$

Met deze betrekkingen kunnen we aan de slag om een uitdrukking voor de totale energie te zoeken. We beginnen hier bij een differentiaalvergelijking die we eerder vonden voor u, samen met de oplossing:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 h^2 + u^2h^2\right) - \mu u = E_T$$

$$u(\theta) = \frac{\mu}{h^2} + A\cos(\theta - \omega)$$

Dit uitwerken (ga ik hier niet doen) en vervolgens A substitueren leidt tot:

$$E_T = \frac{(e^2-1)\mu^2}{2h^2}(< 0\ voor\ ellipsen)$$

Vervolgens realiseren we ons dat als we r_m en r_M optellen, dit niets minder is dan 2a, met a de grote as van de ellips:

$$r_m + r_M = 2a = \frac{2p}{1-e^2}$$

Waaruit we direct zien dat :

$$(1-e^2) = \frac{p}{a}$$

Waaruit:

$$E_T = \frac{-p\mu^2}{2ah^2} = -\frac{\mu}{2a}$$

Waarbij we bij de laatste stap h gesubstitueerd hebben.

Deel 4: Derde wet van Kepler

We maken nu even een omweg, aangezien dit stuk in de les pas werd gegeven ná het stuk dat het verband legt tussen de excentrische en ware anomalie. Mijns inziens is het echter beter om eerst de derde wet af te leiden, gezien dit beter aansluit bij de vorige drie delen.

Nemen we wederom de betrekking waarmee we de wet der perken hebben afgeleid, en integreren we deze:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^T \frac{h}{2} dt$$

$$\pi ab = \frac{h}{2} T$$

Hetgeen een link legt tussen de oppervlakte van een ellips en zijn periode.

Nu gaan we enkele substituties maken:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$$

Waarmee we bekomen:

$$\pi a^2 = \frac{\sqrt{\mu a} T}{2}$$

We gaan nu wederom substituëren.

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

(Eigenlijk is dit niets minder dan de gemiddelde angulaire frequentie, maar in de bespreking tijdens de les noemden we dit dus n. Dit wordt in de nota's als integraal uitgewerkt, maar de uitwerking snap ik niet helemaal.)

We bekomen:

$$a^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\mu}}{n}$$

En dus uiteindelijk:

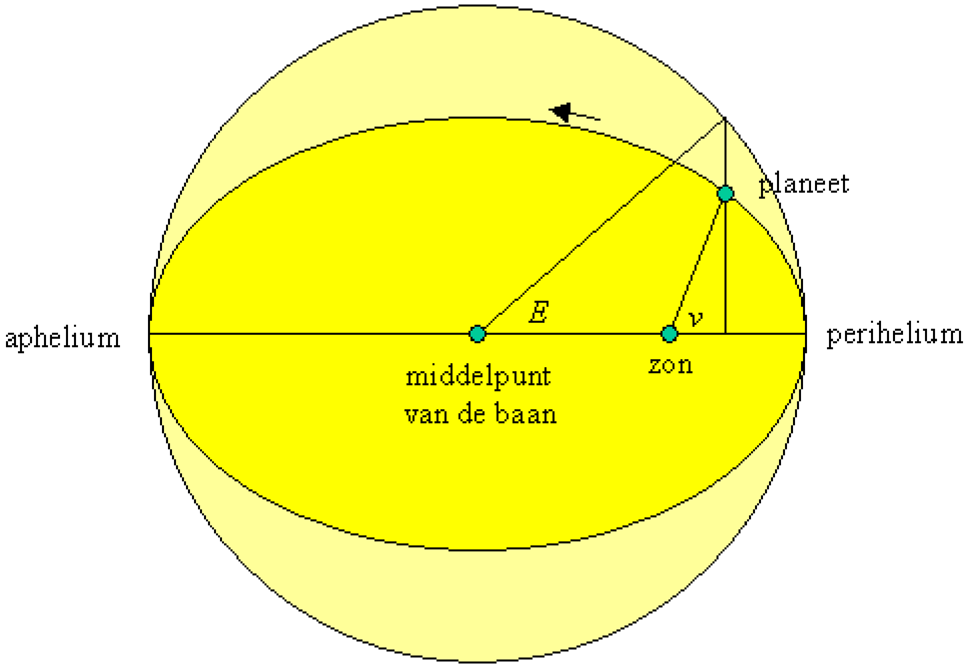
$$n^2 a^3 = \mu$$

Dit is niets minder dan de derde wet die zegt dat $a^3 \sim T^2$.

Derde wet van Kepler: Het kwadraat van de omloopstijd van een planeet om de zon is evenredig met de derde macht van de halve grote as van zijn baan.

Deel 5: Verband ware en excentrische anomalie

We gaan nu het verband leggen tussen de ware en excentrische anomalie.



Er zijn twee manieren om de baan de beschrijven, deze met de zon in de oorsprong, en deze met het middelpunt van de ellips in de oorsprong. Noemen we deze respectievelijk (x,y) en (x',y') dan is:

$$x = r\cos v$$
$$y = r\sin v$$
$$Met\ r = \frac{p}{1 + ecos\ v}$$

en:

$$x' = \ a\cos E = ae + x$$
$$y' = \ b\sin E = y$$

v is hierbij de **ware anomalie**, E de **excentrische anomalie**. Met de vergelijking van x' gaan we nu verder:

$$a\cos E = ae + \frac{p\cos v}{1 + e\cos v} = \frac{p\cos v + ae + ae^2\cos v}{1 + e\cos v}$$

Houden we nu rekening met een betrekking die we in deel 3 bekwamen, namelijk p = a(1-e²), dan versimpelt dit de vergelijking:

$$a\cos E = \frac{a(\ e + \cos v)}{1 + e\cos v}$$

Lossen we dit op naar cos v:

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$$

Dit is echter niet de meest elegante vergelijking die we kunnen bedenken om verband (v,E) te vinden. We voeren daarom een kunstgreep uit:

$$\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} = \frac{1 - e\cos E - \cos E + \ e}{1 - e\cos E + \cos E - \ e} = \frac{1 + e}{1 - e}\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}$$

Met behulp van de volgende goniometrische regel:

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}$$

is het simpel om de vergelijking nog eleganter te maken:

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\tan\frac{E}{2}$$

Hetgeen is wat we in dit deel moeten bekomen.

Ten slotte, alvorens we aan het sluitstuk beginnen, nog één laatste betrekking opstelling die r uitdrukt in functie van E, die in het volgende deel van pas zal komen.

Als we in $r = \frac{p}{1+e\cos v}$ cos v substitueren met $\frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$ dan bekomen we het volgende:

$$r = a(1 - e\cos E)$$

Deel 6: Opstellen vergelijking van Kepler

Dit deel is zonder twijfel het moeilijkste, aangezien voor het opstellen van de vergelijking van Kepler allerlei betrekkingen uit verscheidene van de vorige 5 delen aan bod komen. De belangrijkste:

$$h = \sqrt{\mu p} = r^2\dot{\theta}$$
$$\mu = n^2a^3$$
$$r = a(1 - e\cos E)$$
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$
$$E_T = -\frac{\mu}{2a}$$

We beginnen deze bespreking met een herhaling van de energiebehoudswet:

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}) - \frac{\mu}{r} = \ E_T$$

Hierbij hebben we al meteen de eerste van de bovenstaande vergelijkingen toegepast.

We zullen nu term per term deze vergelijking uitwerken:

$$\frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{p}(1 + e\cos v)$$

$$\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} = \frac{\mu}{2p}(1 + e\cos v)^2$$

Als je de eerste vergelijking van de tweede aftrekt en dan uitwerkt:

$$\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2p}(e^2\cos^2 v - 1)$$

Nu nog de resterende twee termen:

$$E_T = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{a^2e^2}{2}sin^2(E)\dot{E}^2$$

De afgeleide van r haal je gemakkelijk uit de derde vergelijking die vernoemd is aan het begin van dit gedeelte.

Alles bij elkaar optellen geeft de volgende vergelijking:

$$\frac{\mu}{2p}(e^2\cos^2 v - 1) + \frac{a^2e^2}{2}sin^2(E)\dot{E}^2 = -\frac{\mu}{2a}$$

Als we nu µ substitueren via de tweede gegeven vergelijking alsook $p=a(1-e^2)$ en alle onnodige factoren schrappen:

$$\frac{n^2e^2}{1-e^2}\cos^2 v - \frac{n^2}{1-e^2} + e^2\sin^2 E\,\dot{E}^2 = -n^2$$

We kunnen de middenste term van het LL en het RL vereenvoudigen:

$$-n^2 + \frac{n^2}{1-e^2} = \frac{e^2n^2}{1-e^2}$$

Vervolgens alle overbodige e^2 factoren schrappen:

$$\frac{n^2}{1-e^2}\cos^2 v + \sin^2 E\,\dot{E}^2 = \frac{n^2}{1-e^2}$$

Ook dit vereenvoudigt gemakkelijk:

$$n\sin v = \sqrt{1-e^2}\sin E\,\dot{E}$$

sin v, herinneren we ons, is y/r. Maar uit de bespreking van de anomalieën vonden we ook dat y' = y = b sin E.

Dit samen met r = a (1 - e cos E) reduceert de vergelijking tot het volgende:

$$nb = \sqrt{1-e^2}\dot{E}a(1-e\cos E)$$

Dit herschikken en integreren levert ons ten slotte:

$$n(t-\tau) = E - e\sin E$$

τ is een integratieconstante die als betekenis heeft het tijdstip waarop de planeet door het perihelium gaat. Het linkerlid is feite een denkbeeldige hoek die de planeet zou hebben afgelegd over een tijdspanne t - τ op haar baan, als haar hoeksnelheid constant gelijk was aan n. Deze denkbeeldige hoek noemen we **M, de middelbare anomalie**.

Waaruit eindelijk de vergelijking van Kepler:

$$M = E - e\sin E$$

Ten slotte nog opmerken dat deze vergelijking transcendent is in E. Deze kunnen we iteratief oplossen:

$$\begin{aligned}
&E_0 = M \\
&E_1 = M + e\sin M \\
&E_2 = M + e\sin E_1 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Einde Samenvatting
