Krommen en oppervlakken voor analyse 2

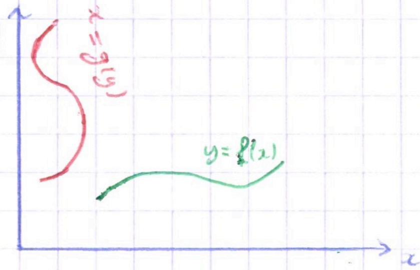
Hier zijn enkele veel voorkomende krommen en oppervlakken en wat tips hoe je die kan herkennen / voorstellen.

Krommen in het vlak

- rechten: lineaire vergelijking $ax + by = c$

  parametervoorstelling: $\varphi(t) = \vec{s} + t\,\vec{r}$ $\quad$ $\vec{s}$ "steunvector" $\quad$ $\vec{r}$ "richtingsvector"

- grafieken van functies: vb. $y = f(x)$, $x = g(y)$



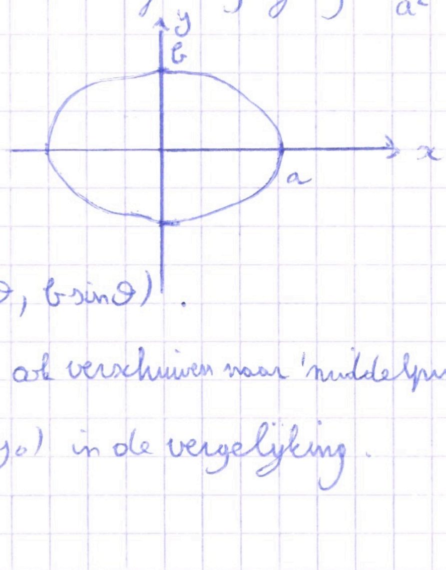
- Cirkels: met straal R

middelpunt oorsprong	middelpunt (a,b)
$x^2 + y^2 = R^2$	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
$\varphi(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$	$\varphi(\theta) = (a + R\cos\theta, b + R\sin\theta)$

Soms staat de vgl. in een andere vorm, die je naar de standaardvorm kan brengen via "vervolledigen van het kwadraat": vb.

$x^2 + y^2 = 4x + 2y \iff (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ (middelpunt $(2,1)$, straal $\sqrt{5}$).

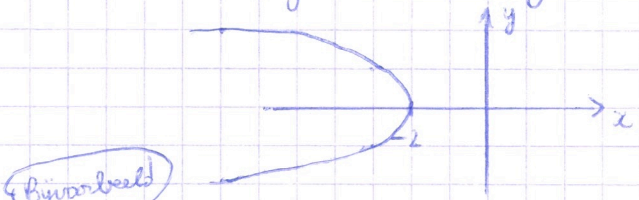
- Ellipsen: een ellips met middelpunt $(0,0)$, halve horizontale as a, en halve verticale as b heeft vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



parametervoorstelling: $\varphi(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$.

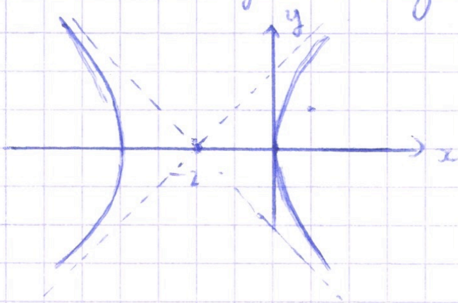
Net als cirkels kan je ellipsen ook verschuiven naar 'middelpunt' (x_0, y_0) via $x \to (x - x_0)$, $y \to (y - y_0)$ in de vergelijking.

- **parabolen**: kwadratische vergelijkingen met slechts één van beide variabelen in het kwadraat. Bijvoorbeeld $x+y^2+2=0 \Leftrightarrow x=-2-y^2$

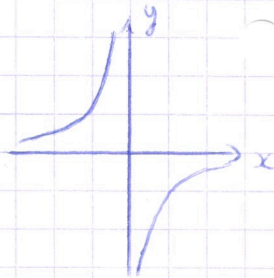


- **hyperbolen**: kwadratische vergelijkingen waarbij x^2 en y^2 tegengesteld teken hebben.

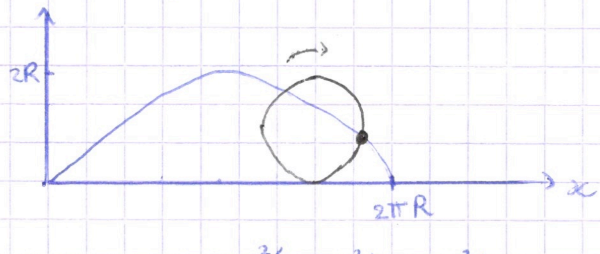
Bijvoorbeeld $x^2+4x-y^2=0 \Leftrightarrow y^2=(x+2)^2-4$



Ander type hyperbolen: $xy = c$, vb. $xy=-1$



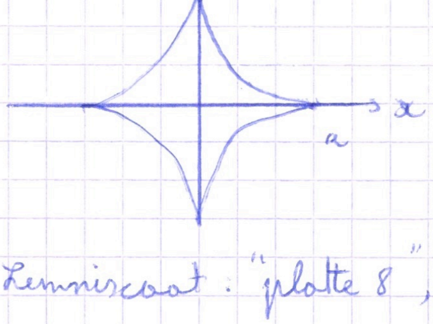
- Enkele speciale krommen:
  - Cycloïde: kromme die beschreven wordt door een vast punt op een cirkel, als deze cirkel over de x-as rolt:



parametervoorstelling
$\varphi(t) = (R(t-\sin t), R(1-\cos t))$

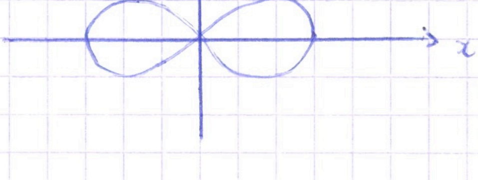
  - astroïde: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, parametervoorstelling

$\varphi(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$



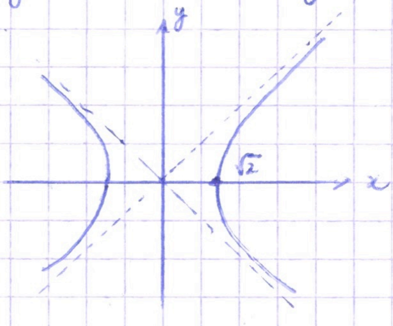
  - Lemniscaat: "platte 8", ∞-symbool.

Vergelijking $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$. In poolcoördinaten $r=\sqrt{\cos 2\theta}$



- enkele tips: - probeer de vergelijking op te lossen naar één van de variabelen. Dan kan je de kromme gemakkelijker herkennen als grafiek(en) van een functie(s).

vb. $-x^2+y^2+2=0 \iff x = \pm\sqrt{y^2+2}$ hyperbool



- Soms kan overgaan op poolcoördinaten helpen, bijvoorbeeld om het te schrijven als $r = r(\theta)$. Bijvoorbeeld bij ~~de~~ het lemniscaat geeft $r=\sqrt{\cos 2\theta}$ sneller een idee dan $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$.
- Punten proberen invullen. Je kan door wat trial and error enkele punten zoeken die aan de vgl. voldoen en dus op de kromme liggen. Dit kan je een ruw idee geven van de vorm.
- Als de vergelijking $f(x,y)=0$ een gesloten kromme is, dan stelt de ongelijkheid $f(x,y)>0$ ofwel het gebied binnen, ofwel het gebied buiten de kromme voor. Om te weten welk gebied, vul je een punt in en zie je of je ">" of "<" krijgt.

Oppervlakken

- vlakken: lineaire vergelijking $ax+by+cz=d$.

parametervoorstelling $\varphi(u,v) = \vec{s} + u\vec{r}_1 + v\vec{r}_2$, $\vec{s}$ steunvector, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ lin. onafh. richtingsvectoren.

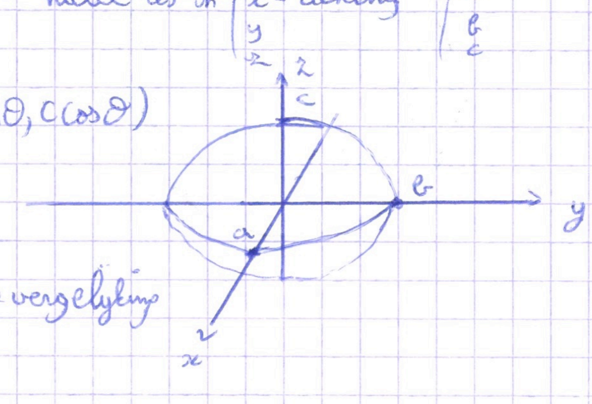
- sfeer / ellipsoïde:

sfeer: $x^2+y^2+z^2=R^2$ ellipsoïde $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$

halve as in x-richting, y, z: a, b, c

parametrisatie vb.
$\varphi(\theta,\varphi) = (a\cos\varphi\sin\theta,\ b\sin\varphi\sin\theta,\ c\cos\theta)$

men kan deze ook verplaatsen via substitutie $x \mapsto x-x_0$, $y \mapsto y-y_0$, $z \mapsto z-z_0$ in de vergelijking

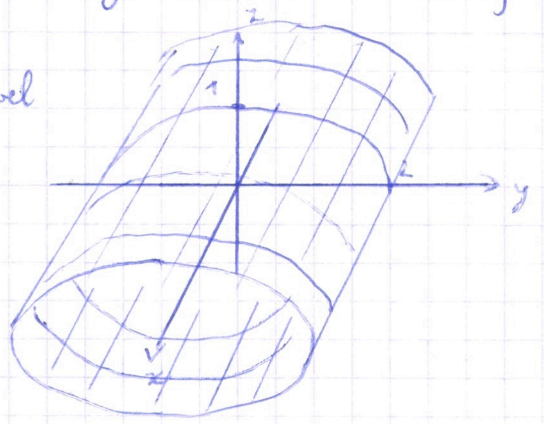


• Vergelijking onafhankelijk van een coördinaat.

Beschouw vb. het oppervlak $z^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Dit is onafhankelijk van x.

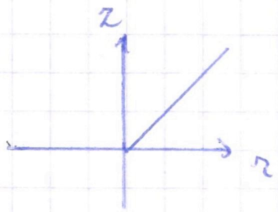
Dit oppervlak verkrijg je door de ellips in het yz-vlak via de x-richting verder te zetten:

Zulke oppervlakken noemt men ook wel veralgemeende cilinders (een klassieke cilinder is als je vertrekt van een cirkel).



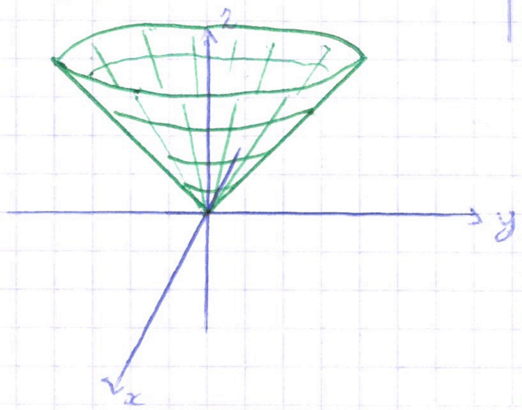
• Vergelijkingen te schrijven als functie van de voerstraal in één van de coördinaatvlakken.

Bijvoorbeeld het oppervlak $z = \sqrt{x^2+y^2}$.



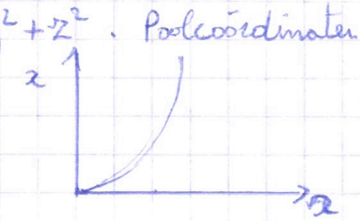
Poolcoördinaten in het xy-vlak geeft: $z = r$.

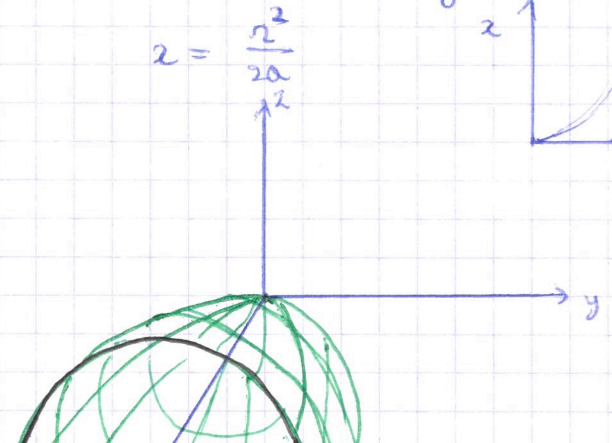
Dit is dus een kegel:



Ander voorbeeld. $2ax = y^2 + z^2$. Poolcoördinaten in yz-vlak geeft

$$x = \frac{r^2}{2a}$$





Dit is een omwentelingsparaboloïde.

Deze zijn gemakkelijk te beschrijven in een soort cilindercoördinaten (poolcoördinaten in het corresponderende vlak)

vb $\varphi(r,\theta) = \left(\frac{r^2}{2a}, r\cos\theta, r\sin\theta\right)$

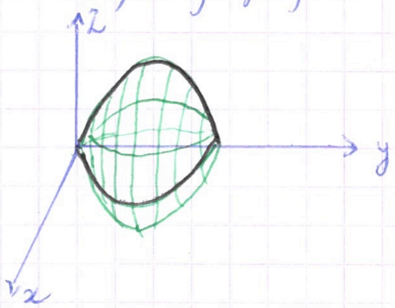
- Omwentelingsoppervlakken. Dit zijn oppervlakken bekomen door de grafiek van een functie te wentelen om een as. (Vorig puntje waren ook omwentelingsoppervlakken)

Bijvoorbeeld:

Wentelen we de grafiek van de functie $x = f(y)$ om de y-as, dan krijgen we een oppervlak met parametervoorstelling

$$\varphi(y,\theta) = (f(y)\cos\theta,\ y,\ f(y)\sin\theta), \text{ vergelijking } x^2+z^2 = f(y)^2.$$

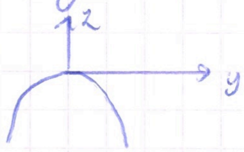
Stel vb $f(y) = \sin y,\ y \in [0,\pi]$



- Nog een tip: soms kan het ook helpen om de snijkrommen van het oppervlak met de coördinaatvlakken te beschouwen, door achtereenvolgens x, y, en z gelijk aan 0 te stellen.

Bijvoorbeeld $z = x^2 - y^2$.

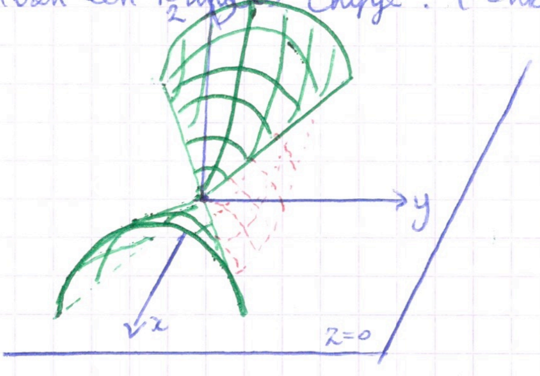
* $x=0$ $\quad z = -y^2$



* $y=0$ $\quad z = x^2$

* $z=0$: $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$

Dit is een zadeloppervlak (hyperbolische paraboloïde), de vorm van een Pringles chipje. (Enkel stuk met $z > 0$ getekend).



- Gebieden binnen of buiten gesloten oppervlakken kunnen met ongelijkheden beschreven worden, zoals bij de krommen.