Kwantumvelden namiddag

27 January 2022

1 1. Geladen Klein-Gordonveld

(i) Gegeven de Lagrangiaanse dichtheid voor een complex scalair veld ϕ:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$$

en de mode-expansie van een reëel scalair veld

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left(a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} + a^{(}\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \right)$$

Bepaal de canonische kwantisatie van het geladen Klein-Gordon veld, en bewijs expliciet dat $[\phi(\vec{x}, t), \pi_\phi(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y})$

(ii) Bewijs dat $\mathcal{L}$ een symmetrie heeft, en gebruik het Noethertheorema om de behouden stroom op te schrijven. Bereken ook een uitdrukking voor de lading en interpreteer de deeltjes van het geladen Klein-Gordon veld.

2 Padintegraal

(i) Leid de Feynman-padintegraal af voor de propagatie-amplitude $\langle x, t | x', t' \rangle = \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')} | x' \rangle$ van een niet-relativistisch puntdeeljte met Hamiltoniaan

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Maak een figuur.
Gegeven:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-ay^2 + by} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

(ii) Bespreek kort de semi-klassieke limiet van deze uitdrukking.

(iii) In het geval van de harmonische oscillator met $V = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ is de amplitude (waar we de bron $J(t) = 0$ hebben gezet) om van x=0 naar x=0 te propageren in een tijdspanne τ:

$$\langle 0, \tau/2 | 0, -\tau/2 \rangle \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega\tau}}$$

Deze uitdrukking divergeert als $\omega\tau = n\pi, n \in Z$. Analyseer de klassieke bewegingsvergelijking van de harmonische oscillator om een intuitieve verklaring te geven via de padintegraal voor dit fenomeen.

3 Inzichtsvragen

(i)

(ii) Gegeven de lagrangiaan

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m_1)\psi + \bar{\psi}(i\partial - m_2)\psi + \bar{\psi}(i\partial - m_3)\psi$$

Wat is de symmetriegroep van dit systeem als $m_1 = m_2 = m3$? En als $m_1 = m_2 \neq m3$? En als $m_1 \neq m_2 \neq m3$? Als men van de eerste symmetriegroep overgaat naar de tweede en derde symmetriegroep, worden er dan Goldstone bosonen gevormd?

4 Oefening 1

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \to \gamma(k_1) + \gamma(k_2)$$

(i) Teken de twee mogelijke feynmandiagrammen voor deze reactie. Bepaal het relatief teken en leg uit. Gebruik dit om een uitdrukking voor het totale matrixelement te bepalen

(ii) Reken M verder uit tot een gegeven uitdrukking, en bepaal ook M.

(iii) Gebruik de compleetheidsrelaties om een uitdrukking voor $\frac{1}{4}\sum_{spins/pols}$ te bepalen (de uitdrukking die bekomen moest worden werd gegeven)

(iv) Relateer comptonverstrooiing aan fotonproductie, bepaal de substitutie voor de mandelstam variabelen en bepaal hiermee een uitdrukking van de werkzame doorsnede voor fotonproductie, op basis van een gegeven uitdrukking voor comptonverstrooiing

(v) Schrijf de werkzame doorsnede voor de fotonproductie op op basis van kinematica en werk uit tot een gegeven uitdrukking

5 oefening 2

Gegeven een lagrangiaan bepaal de massa van de velden en teken per interactieterm een feynmandiagram, bepaal de koppelingconstante en de pijlen en labels.