EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA

MAANDAG 10 JANUARI 2022

EERSTE BACHELOR FYSICA EN STERRENKUNDE

- **Vermeld je naam op elk blad.**
- Schrijf je antwoorden op het geruite papier.
  - **Noteer je antwoorden op theorievragen op de dubbelgevouwen bladen.**
  - **Noteer je antwoorden op oefeningen op *aparte*, enkele bladen.**
  - **Dien voor iedere vraag een antwoord in, ook al heb je deze niet opgelost.**
- Leg je studentenkaart (of een ander identificatiebewijs) zichtbaar klaar tijdens het opnemen van de aanwezigheden.
- Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM, smartphone, tablet, computer of andere elektronische toestellen. Deze moeten **volledig uitgeschakeld** zijn.
- Elke **poging** tot spieken kan leiden tot (ernstige) sancties, zoals bijvoorbeeld het nietig verklaren van al je examens uit de eerste zittijd.
- Je beschikt over vier uur om dit examen op te lossen.
- Alle nota's mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit examen. *Let er echter op niet te veel tijd te verliezen door te veel op te zoeken.*
- Resultaten uit de cursus (definities, stellingen, lemma's, enz.) die je gebruikt in je argumentatie moet je niet expliciet opschrijven, een verwijzing volstaat. Wel moet je zeer duidelijk aangeven hoe je een dergelijk resultaat gebruikt.
- Bij de oefeningen mag je tijdens het oplossen van een deeltje (x) gebruik maken van alle voorgaande deeltjes, ook als je die niet hebt kunnen oplossen.
- Veel succes!

THEORIE

Begin een nieuw dubbelgevouwen, geruit blad.

Opgave 1. (4 punten) (i) Welke samenhang bestaat er tussen de algebraïsche en de meetkundige multipliciteit (van een eigenwaarde) en hoe hangen deze begrippen met diagonaliseerbaarheid samen?

(ii) Op pagina 118 staat in opmerking 6.2.9 "Analoge berekeningen als in stap 2 tonen dat de vectoren b_1, b_2, b_3 twee aan twee orthogonaal zijn." Schrijf het bewijs voor de orthogonaliteit van b_2 en b_3 uit.

(iii) Stel $\{b_1, \ldots, b_n\}$ is een basis van een vectorruimte V en stel $w = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$ en $\lambda_1 \neq 0$. Toon aan dat $\{w, b_2, \ldots, b_n\}$ een basis is.

(iv) Op pagina 60 regel 4 staat dat $K^n \oplus K^m \cong K^{n+m}$. Waarom is dat zo?

Oplossing.

(i) We nemen aan dat de karakteristieke veelterm van een endomorfisme f kan worden geschreven als een product van lineaire factoren. De algebraïsche multipliciteit van een eigenwaarde λ is altijd groter of gelijk aan de meetkundige multipliciteit van λ. Verder is f diagonaliseerbaar als en slechts als voor alle eigenwaarden λ van f geldt dat de algebraïsche multipliciteit van λ gelijk is aan de meetkundige multipliciteit van λ.

(ii) We hebben $\langle b_3, b_2 \rangle = \frac{1}{\|\tilde{b}_3\| \cdot \|\tilde{b}_2\|} \langle \tilde{b}_3, \tilde{b}_2 \rangle$. Het volstaat dus om aan te tonen dat $\langle \tilde{b}_3, \tilde{b}_2 \rangle = 0$. We vinden

$\langle \tilde{b}_3, \tilde{b}_2 \rangle = \langle b_3' - \langle b_3', b_2 \rangle b_2 - \langle b_3', b_1 \rangle b_1, \tilde{b}_2 \rangle = \langle b_3', \tilde{b}_2 \rangle - \langle b_3', b_2 \rangle \langle b_2, \tilde{b}_2 \rangle - \langle b_3', b_1 \rangle \langle b_1, \tilde{b}_2 \rangle$.

Deze term is nul omdat we vermits $\langle b_1, b_1 \rangle = 1$ en $\langle b_1, \tilde{b}_2 \rangle = \langle b_1, b_2' \rangle - \langle b_2', b_1 \rangle \langle b_1, b_1 \rangle = 0$ eenerzijds vinden dat $\langle b_3', b_1 \rangle \langle b_1, \tilde{b}_2 \rangle = 0$

en omdat we aanderzijds vinden dat

$\langle b_3', \tilde{b}_2 \rangle - \langle b_3', b_2 \rangle \langle b_2, \tilde{b}_2 \rangle = \langle b_3', b_2 \|\tilde{b}_2\| \rangle - \langle b_3', b_2 \rangle \langle b_2, b_2 \|\tilde{b}_2\| \rangle = \|\tilde{b}_2\| \langle b_3', b_2 \rangle - \|\tilde{b}_2\| \langle b_3', b_2 \rangle \langle b_2, b_2 \rangle = 0$ vanwege $\langle b_2, b_2 \rangle = 1$.

(iii) Stel dat $\{b_1, \ldots, b_n\}$ een basis is. Omdat $\{w, b_2, \ldots, b_n\}$ niet meer dan n elementen heeft volstaat het om aan te tonen dat $\{w, b_2, \ldots, b_n\}$ lineair onafhankelijk is. Stel dus $\mu_1 w + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_n b_n = 0$ voor zekere scalairen $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Dan geldt met $w = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$ dat $\mu_1 \lambda_1 b_1 + (\mu_1 \lambda_2 + \mu_2) b_2 + \cdots + (\mu_1 \lambda_n + \mu_n) b_n = 0$. Omdat $\{b_1, \ldots, b_n\}$ lineair onafhankelijk is volgt $\mu_1 \lambda_1 = 0$ en $\mu_1 \lambda_i + \mu_i = 0$ voor $2 \leq i \leq n$. Met $\lambda_1 \neq 0$ volgt $\mu_1 = 0$ en dan $\mu_i = 0$ voor $2 \leq i \leq n$. Omdat alle $\mu_i = 0$ volgt de lineaire onafhankelijkheid van $\{w, b_2, \ldots, b_n\}$.

(iv) Beide vectorruimten hebben dezelfde dimensie en zijn dus met Stelling 2.4.18 isomorf.

Opgave 2. (2 punten) (i) Zij $V = \mathbb{R}^n$ en $f : V \to V$ lineair. Zij $\{b_1, \dots, b_n\}$ een willekeurige (geordende) basis van V. Zij B de matrix met kolomvectoren $b_1, \dots, b_n$ en A de matrix met kolomvectoren $f(b_1), \dots, f(b_n)$ Dan geldt $\det f = \frac{\det A}{\det B}$. (Hint: Schrijf de $f(b_j)$ op in termen van de b_i.)

Oplossing.

(i) Zij $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ en $M := M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$. We hebben

$$\det(A) = \det(Mb_1, \dots, Mb_n) = \det(MB) = \det(M) \cdot \det B.$$

en $\det M = \det f$. Hieruit volgt de bewering met $\det B \neq 0$ omdat B een basis is.

Opgave 3. (4 punten) Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een argument; indien fout, geef een tegenvoorbeeld. (Enkel "juist" of "fout" antwoorden, zonder verklaring, levert geen punten op.)

(i) Zij $f : R^{2022} \to R^{2022}$ niet surjectief. Dan is 0 geen eigenwaarde van f.

(ii) Zij $A, B \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ en $AA^t = BB^t$. Dan geldt voor $C = B^t(A^t)^{-1}$ dat $C^t \cdot C = I_n$.

(iii) Zij $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ en $m > n$. Dan is $\det(A \cdot B^t) = 0$.

(iv) Zij A in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ zo dat voor het standaard inproduct en voor alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ geldt $\langle Av, w\rangle = -\langle v, Aw\rangle$. Zij verder λ een eigenwaarde voor A. Dan is $\lambda = 0$.

Oplossing.

(i) Fout. Als f niet surjectief is dan is f niet injectief. Dus is de kern van f niet ledig en 0 is een eigenwaarde.

(ii) Juist. We rekenen met de voorwaarde uit:

$$\begin{aligned} & (B^t((A^t)^{-1})^t t B^t(A^t)^{-1}) = ((A^t)^{-1})^t(B^t)^t B^t(A^t)^{-1} \\ = \; & A^{-1}BB^t(A^t)^{-1} = A^{-1}AA^t(A^t)^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

(iii) Juist. We weten $\mathrm{rk}(A \cdot B^t) \leq n < m$ Dus is $\mathrm{rk}(A \cdot B^t)$ niet maximaal en dus $\det(A \cdot B^t) = 0$..

(iv) Stel $\lambda v = Av$ met $v \neq 0$.. Dan geldt $\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = -\langle v, Av\rangle = -\langle v, \lambda v\rangle = -\lambda\langle v, v\rangle$. Omdat $v \neq 0$ volgt $\lambda = 0$.

Begin een nieuw enkel geruit blad.

Opgave 4. (4 punten) Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 248 \\ -1 & 1 & 27 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) ,$$

(i) Bepaal of A diagonaliseerbaar is. Zo ja, bepaal een matrix P waarvoor $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is.

(ii) Bepaal of A inverteerbaar is, en zo ja, bereken A^{-1}.

Oplossing.

(i) De karakteristieke veelterm van A is $\chi_A(x) = (x-2)^2(x-1)$. Om te bepalen of A diagonaliseerbaar is, moeten we nagaan wat de meetkundige multipliciteit is van de eigenwaarde 2. Daartoe beschouwen we de matrix

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 248 \\ -1 & -1 & 27 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Merk op dat de eigenruimte behorende bij de eigenwaarde 2 juist gelijk is aan $\ker(B_2)$. De meetkundige multipliciteit van 2 is dus gelijk aan $\dim(\ker(B_2))$, wat gelijk is aan $3 - \mathrm{rk}(B_2)$. Door de kolommen van B_2 te bekijken zien we dat $\mathrm{rk}(B_2) = 2$, of dus dat de eigenwaarde 2 meetkundige multipliciteit 1 heeft. Dit is strikt minder dan de algebraïsche multipliciteit, en dus is A niet diagonaliseerbaar.

(ii) A is inverteerbaar als en slechts als de nulruimte van A triviaal is. Aangezien nul geen eigenwaarde is van A, is A dus inverteerbaar. Er zijn meerdere manieren om de inverse te berekenen, wij volgen de methode uitgelegd in Oefening 4.16.

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 248 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 27 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 27 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 248 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -27 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -248 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -27 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 3 & -329 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -27 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{329}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 27 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{329}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{221}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{329}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

We bekomen dus dat

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{221}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{329}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Begin een nieuw enkel geruit blad.

Opgave 5. (6 punten) Zij $m, n, k > 0$. Kies $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$ vast. Beschouw de afbeelding

$$
\phi\colon \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \operatorname{Mat}_{n,k}(\mathbb{R})\colon f \mapsto (f(v_1) \,|\, \ldots \,|\, f(v_k))\,.
$$

Met andere woorden, $\phi(f)$ is de matrix met als kolommen juist de beelden $f(v_1), \ldots, f(v_k)$.

(i) Toon aan dat ϕ een lineaire afbeelding is.

(ii) Toon aan dat ϕ injectief is als $v_1, \ldots, v_k$ voortbrengend is voor $\mathbb{R}^m$.

(iii) Toon ook de omgekeerde richting aan, i.e. als ϕ injectief is, dat dan $v_1, \ldots, v_k$ voortbrengend moet zijn.
Hint: Maak gebruik van Oefening 2.34 om nieuwe afbeeldingen te construeren.

(iv) Toon aan dat ϕ surjectief is als en slechts als $v_1, \ldots, v_k$ lineair onafhankelijk is.
Hint: Maak gebruik van Oefening 2.34 om nieuwe afbeeldingen te construeren.

Oplossing.

(i) Gegeven twee lineaire afbeeldingen $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ en twee scalairen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ kunnen we berekenen dat

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\phi(f_1) + \lambda_2\phi(f_2) \\
&= \lambda_1 \left(f_1(v_1) \,|\, \ldots \,|\, f_1(v_k)\right) + \lambda_2 \left(f_2(v_1) \,|\, \ldots \,|\, f_2(v_k)\right) \\
&= \left(\lambda_1 f_1(v_1) \,|\, \ldots \,|\, \lambda_1 f_1(v_k)\right) + \left(\lambda_2 f_2(v_1) \,|\, \ldots \,|\, \lambda_2 f_2(v_k)\right) \\
&= \left(\lambda_1 f_1(v_1) + \lambda_2 f_2(v_1) \,|\, \ldots \,|\, \lambda_1 f_1(v_k) + \lambda_2 f_2(v_k)\right) \\
&= \left((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v_1) \,|\, \ldots \,|\, (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v_k)\right) \\
&= \phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2).
\end{aligned}$$

Gezien $f_1, f_2, \lambda_1, \lambda_2$ willekeurig zijn, volgt dat ϕ lineair is.

(ii) We bewijzen dat $\ker(\phi) = 0$ als en slechts als $v_1, \ldots, v_k$ voortbrengend is. Als $\phi(f) = 0$, dan geldt dat $f(v_1) = \cdots = f(v_k) = 0$. Indien $v_1, \ldots, v_k$ voortbrengend is, dan is elke vector $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ een lineaire combinatie van de $v_1, \ldots, v_k$. De afbeelding f hierop laten inwerken geeft dat $f(v) = 0$, en omdat v willekeurig is, geldt dus $f = 0$. Dus geldt $\ker(\phi) = 0$, ofwel is ϕ injectief.

(iii) Als $v_1, \ldots, v_k$ niet voortbrengend is, bestaat v lineair onafhankelijk van $v_1, \ldots, v_k$. We kunnen v uitbreiden tot een basis $\{v_1 = v, \ldots, v_m\}$ van $\mathbb{R}^m$. Kies $w \in \mathbb{R}^n$ een niet-nul vector.

Dan kunnen we een afbeelding f_v definiëren aan de hand van Oefening 2.34 zodat

$$f_v(v_i) = \begin{cases} w \text{ als } i = 1, \\ 0 \text{ anders.} \end{cases}$$

Dan geldt $f \in \ker\phi$, dus is deze laatste niet gelijk aan de nulruimte.

(iv) Stel dat de $v_1, \ldots, v_k$ lineair onafhankelijk zijn. Merk eerst op dat we $v_1, \ldots, v_k$ kunnen uitbreiden tot een basis $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_m$. Zij $A \in \mathrm{Mat}_{n,k}(\mathbb{R})$ willekeurig, met kolommen $c_1, \ldots, c_k$. Merk op dat $c_1, \ldots, c_k \in R^n$.

We zoeken een lineaire afbeelding f_A zodat $\phi(f_A) = A$. Omdat $v_1, \ldots, v_m$ een basis is van $\mathbb{R}^m$ hoeven we een lineaire afbeelding slechts te definiëren op de vectoren $v_1, \ldots, v_m$ (zie Oefening 2.34). Definieer dus f_A aan de hand van:

$$f_A(v_i) = \begin{cases} c_i \text{ als } 1 \leq i \leq k, \\ 0 \text{ als } k < i, \end{cases}$$

en deze formules lineair uitbreiden. Dan zien we meteen dat $\phi(f_A) = A$.

Omgekeerd, stel dat de $v_1, \dots, v_k$ wel lineair afhankelijk zijn, i.e. $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$ voor zekere $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. We mogen zonder verlies van algemeenheid stellen dat $\lambda_1 \neq 0$.

Maar dan geldt ook $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_k f(v_k) = 0$, voor elke lineaire afbeelding $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Beschouw nu de matrix

$$A = (a_{ij})_{i \leq n, j \leq k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ofwel, A is de matrix met een 1 op de positie $(1,1)$ en 0 overal anders. Als $A = \phi(f)$ voor een $f \in \mathrm{Hom}(R^m, R^n)$, dan zou $\lambda_1(1, 0, \dots, 0) = 0$, een strijdigheid.