EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA EN ANALYTISCHE MEETKUNDE I

(MOGELIJKE) OPLOSSINGEN VAN DE EXAMENVRAGEN

Puntenverdeling

De puntenverdeling is als volgt:

Opgave 1: 5 punten.

Opgave 2: 5 punten.

Opgave 3: 4 punten.

Opgave 4: 6 punten.

Theorie

Opgave 1. In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen uit de cursusnota's in detail te verklaren.

Deeltjes (a)–(d) peilen naar het inzicht in het bewijs van Stelling 2.2.6 op p. 44.

(a) Halverwege het bewijs staat "…volgt hieruit dat $S \subseteq \text{span}(T) \subseteq \text{span}(S)$." Leg uit hoe we aan beide inclusies ($\subseteq$) komen.

(b) Verder staat "Dit impliceert dat $\text{span}(T) = \text{span}(S) = V$." Verklaar.

(c) Op het einde van het bewijs staat "We herhalen nu deze procedure." Waarom kunnen we deze procedure herhalen?

(d) Verklaar de zin "Dit proces eindigt zeker, omdat wegens Lemma 2.2.5 een lineair onafhankelijke verzameling een begrensd aantal elementen bevat."

Deeltjes (e)–(g) peilen naar het inzicht in het bewijs van Stelling 4.2.4 op p. 95–96.

(e) Halverwege het bewijs staat "Merk op dat deze lineaire vorm surjectief is vermits $\langle w, w\rangle \neq 0$." Verklaar.

(f) Verder staat "De kern van deze lineaire vorm is precies het orthogonaal complement $(W')^\perp$ van W' in W." Bewijs dit.

(g) Het bewijs eindigt met de zin "Men verifieert nu eenvoudig dat deze basis voldoet aan de gezochte eigenschappen." Wat zijn die "gezochte eigenschappen" precies? Verfieer nu deze eigenschappen expliciet.

Oplossing 1. (a) **Eerste inclusie:** We hebben bewezen dat $v \in \text{span}(T)$. Aangezien v willekeurig gekozen is in S, geldt voor alle v in S dat $v \in \text{span}(T)$. Dit wil precies zeggen dat $S \subseteq \text{span}(T)$.
Tweede inclusie: Omdat T een deelverzameling is van S, volgt uit Lemma 2.1.13 dat $\text{span}(T)$ een deelruimte is van $\text{span}(S)$, $\text{span}(T)$ is dus ook een deelverzameling van $\text{span}(S)$.

(b) – $\operatorname{span}(S) = V$ omdat S een voortbrengende verzameling is (Definitie 2.1.16).
   – Omdat $S \subseteq \operatorname{span}(T)$ volgt opnieuw uit Lemma 2.1.13 dat $\operatorname{span}(S) \subseteq \operatorname{span}(\operatorname{span}(T)) = \operatorname{span}(T)$, waarbij de laatste gelijkheid geldt omdat $\operatorname{span}(T)$ een deelruimte is. Samen met $\operatorname{span}(T) \subseteq \operatorname{span}(S)$ uit puntje (a) volgt dus dat $\operatorname{span}(S) = \operatorname{span}(T)$.

(c) We kunnen deze procedure herhalen met $T' := T \cup \{v\}$ omdat T' een lineair onafhankelijke verzameling is die bevat is in S.

(d) De vectorruimte V is eindigdimensionaal. Dit wil zeggen dat, volgens definitie 2.2.4, V een eindige voortbrengende verzameling, zeg S', bevat. In Lemma 2.2.5. wordt bewezen dat een lineair onafhankelijke verzameling van V, hoogstens $|S'|$, een eindig aantal, elementen bevat. Aangezien in het proces telkens 1 vector toegevoegd wordt aan de lineair onafhankelijke verzameling, zodat de nieuwe verzameling nog steeds lineair onafhankelijk is (en dus een eindig aantal elementen bevat), moet dit proces stoppen.

   Opmerking. *Een veel voorkomend fout antwoord was te beweren dat de verzameling S uit Stelling 2.2.6 eindig is. Dit is niet per se zo. Het is dus ook niet correct om te beweren dat uit Lemma 2.2.5 volgt dat het proces eindigt als de verzameling T aangevuld is tot een verzameling van $|S|$ elementen.*

(e) We weten dat $\operatorname{im}(\langle ., w\rangle)$ een deelruimte van K definieert. Aangezien K 1-dimensionaal is, en er een niet-nul element, namelijk $\langle w, w\rangle$ is dat bevat is in $\operatorname{im}(\langle ., w\rangle)$, is $\operatorname{im}(\langle ., w\rangle) = K$. M.a.w., $\langle ., w\rangle$ is surjectief. Meer expliciet kunnen we ook inzien dat voor elke $\lambda \in K$ het element $\frac{\lambda w}{\langle w,w\rangle}$ afgebeeld wordt op λ.

(f) Per definitie geldt dat $\ker(\langle ., w\rangle) = \{v \in W | \langle v, w\rangle = 0\}$ en $(W')^\perp = \{v \in W | \langle v, w'\rangle = 0 \ \forall w' \in W'\}$. Nu is $\bar{\lambda}\langle v, w\rangle = \langle v, \lambda w\rangle$ en $W' = \{\lambda w | \lambda \in K\}$. Er geldt dus voor een element $v \in W$ dat $\langle v, w\rangle = 0$ als en slechts dan als $\langle v, w'\rangle$ voor alle $w' \in W'$, en dus is $\ker(\langle ., w\rangle) = (W')^\perp$.

(g) De gezochte eigenschappen zijn de eigenschappen die zeggen dat de basis $\{b_1, \ldots, b_d\}$ een orthonormale basis is voor W: $\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq d$. Om deze eigenschappen expliciet te controleren merken we op dat reeds geldt dat $\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{i,j}$, $2 \leq i, j \leq d$ omdat de basis $\{b_2, \ldots, b_d\}$ (als gevolg van de inductiehypothese) orthonormaal is. We moeten dus enkel controleren dat $\langle b_1, b_i\rangle = 0$, met $2 \leq i \leq d$ en dat $\langle b_1, b_1\rangle = 1$. Omdat $b_1 \in W'$ en b_i, $2 \leq i \leq d$ in $(W')^\perp$ bevat is, volgt dat $\langle b_1, b_i\rangle = 0$. Verder geldt dat $\langle b_1, b_1\rangle = \langle \frac{w}{||w||}, \frac{w}{||w||}\rangle = \frac{1}{||w||^2}\langle w, w\rangle = \frac{\langle w,w\rangle}{\langle w,w\rangle} = 1$ (waarbij we gebruik maken van de eigenschappen van het inproduct).

Opgave 2. Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een argument; indien fout, geef een tegenvoorbeeld.

(a) Zij K een veld, en V en W twee K-vectorruimten. Zij $f \in \hom(V, W)$ en $g \in \hom(W, V)$. Veronderstel dat $g(f(v)) = v$ voor alle $v \in V$. Dan is $f(g(w)) = w$ voor alle $w \in W$.

(b) Zij K een veld, en V een 2-dimensionale K-vectorruimte. Veronderstel dat W_1, W_2 en W_3 drie *verschillende* deelruimten zijn van V, zodat $V = W_1 \oplus W_2$ en $V = W_1 \oplus W_3$. Dan is ook $V = W_2 \oplus W_3$.

(c) Zij V een inproductruimte over $\mathbb{C}$, en zij $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ een orthonormale basis. Veronderstel dat ook $\mathcal{B}'$ een basis is voor V, en zij Q de transitiematrix van $\mathcal{B}$ naar $\mathcal{B}'$. Als Q een orthogonale matrix is, dan is $\mathcal{B}'$ een orthonormale basis.

(d) Zij V een eindig-dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte, en $f, g \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Veronderstel dat zowel f als g juist één eigenwaarde hebben, namelijk $\lambda = 1$. Dan heeft ook fg juist één eigenwaarde $\lambda = 1$.

(e) Zij L en M twee niet-parallelle rechten in de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^3$, met respectieve richtingsvectoren r en s. Beschouw een willekeurig punt p in $\mathbb{R}^3$. Dan is het vlak α evenwijdig aan L en M door het punt p gegeven door

$$\alpha = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (r \times s)v = (r \times s)p\}.$$

Oplossing 2. (a) $\boxed{\textbf{Fout.}}$ We geven een tegenvoorbeeld. Zij $V = K$ en $W = K^2$, en zij $f\colon V \to W$ gegeven door $f(a) = (a, 0)^t$ en $g\colon W \to V$ gegeven door $g\big((b, c)^t\big) = b$, voor alle $a, b, c \in K$. Dan is inderdaad $g(f(a)) = a$ voor alle $a \in V$, terwijl $f(g((1,1)^t)) = f(1) = (1, 0)^t \neq (1, 1)^t$.

Opmerking. *De uitspraak zou wel waar geweest zijn onder de bijkomende voorwaarde* $\dim V = \dim W < \infty$.

Opmerking. *Nogal wat studenten proberen aan te tonen dat f en g bijectief zouden moeten zijn. Het klopt weliswaar dat we uit $g(f(v)) = v$ voor alle $v \in V$ kunnen besluiten dat f injectief is en dat g surjectief is, maar niet dat f surjectief zou zijn of g injectief zou zijn.*

(b) $\boxed{\textbf{Juist.}}$ We tonen eerst aan dat $\dim W_1 = \dim W_2 = \dim W_3 = 1$. Inderdaad, als $\dim W_1 = 0$ zou zijn, dan is $W_2 = V$ en $W_3 = V$, maar dan zijn W_2 en W_3 niet verschillend; en als $\dim W_1 = 2$ zou zijn, dan is $W_2 = 0$ en $W_3 = 0$, maar ook dan zijn W_2 en W_3 niet verschillend. Dus moet $\dim W_1 = 1$, en dan ook $\dim W_2 = \dim V - \dim W_1 = 1$ en analoog $\dim W_3 = 1$.

Echter, als W_2 en W_3 twee verschillende 1-dimensionale deelruimten zijn, dan spannen ze samen de hele ruimte V op, dus $V = W_2 + W_3$, en omdat $W_2 \cap W_3 = 0$ besluiten we dat $V = W_2 \oplus W_3$.

(c) $\boxed{\textbf{Fout.}}$ Als we voor Q een matrix kiezen die orthogonaal is, maar niet reëel, dan zal $\mathcal{B}'$ niet orthonormaal zijn. Inderdaad: veronderstel dat $\mathcal{B}'$ wel orthonormaal zou zijn; dan volgt uit Stelling 5.2.8 dat de transitiematrix Q voldoet aan $Q^t\overline{Q} = I_n$, zodat Q unitair zou zijn. Maar omdat Q orthogonaal is, is $Q^tQ = I_n$, en omdat Q^t

inverteerbaar is besluiten we dat $Q = \overline{Q}$, of nog, Q is een reële matrix, in strijd met onze keuze.

Een expliciet tegenvoorbeeld wordt gegeven door de matrix

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 4i \\ -4i & 5 \end{pmatrix},$$

waarbij we voor $\mathcal{B}$ een willekeurige orthnormale basis kiezen van $\mathbb{C}^2$ (bijvoorbeeld de standaardbasis).

Belangrijke opmerking. *Deze vraag heeft een hoog strikvraag-gehalte, en dat was eigenlijk niet de bedoeling: er had "inproductruimte over $\mathbb{R}$" moeten staan in plaats van "inproductruimte over $\mathbb{C}$". Bijgevolg werden ook alle volgende antwoorden juist gerekend:*

- *Wie het gegeven dat Q orthogonaal is interpreteert als $Q^t\overline{Q} = I$, en verder correct redeneert om te besluiten dat de uitspraak juist is, heeft de vraag juist.*
- *Wie doet alsof V een vectorruimte is over $\mathbb{R}$ i.p.v. over $\mathbb{C}$ (zoals dus in feite de bedoeling was van de vraag), en verder correct redeneert om te besluiten dat de uitspraak juist is, heeft de vraag juist.*

Opmerking. *Wie onder één van de twee bovenstaande assumpties enkel verwijst naar Stelling 5.2.8 om te concluderen dat de uitspraak juist is, heeft de vraag* niet *correct beantwoord, omdat de logische implicatie hierbij fout is: Stelling 5.2.8 zegt dat,* **als** *$\mathcal{B}'$ orthonormaal is,* **dan** *Q orthogonaal/unitair is; de stelling zegt niks over de omgekeerde implicatie.*

(d) $\boxed{\textbf{Fout.}}$ We geven een tegenvoorbeeld. Zij $V = \mathbb{C}^2$, en beschouw de lineaire operatoren f, g gegeven door de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beide matrices hebben als enige eigenwaarde $\lambda = 1$, maar hun product

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

heeft karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, waarvan $\lambda = 1$ geen oplossing is.

(e) $\boxed{\textbf{Juist.}}$ Aangezien L en M niet-parallel zijn, zijn r en s lineair onafhankelijk, en heeft elk vlak evenwijdig aan L en M noodzakelijk een normaalvector die orthogonaal staat op zowel r als s, en dus een scalair veelvoud is van $r \times s$. Het resultaat volgt nu onmiddellijk uit Lemma 7.4.2, en meer bepaald uit de vectoriële beschrijving voor H op het einde van het bewijs, nl. $H = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (r \times s) \cdot (v - p) = 0\}$, wat equivalent is met de opgegeven beschrijving voor het vlak α.

Opgave 3. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ ,$$

met parameters $a, b, c \in \mathbb{R}$. Voor welke waarden van de parameters is A diagonaliseerbaar? Bepaal voor deze waarden ook de matrix P zodanig dat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is. Motiveer je antwoord.

Oplossing 3. We bepalen de karakteristieke veelterm van A. We vinden

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & 0 & -1 \\ -1 & x-1 & -b \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = (x-a)(x-1)(x-c) \ .$$

De drie eigenwaarden van A zijn dus $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = c$. We zoeken nu de eigenruimten bij elk van deze eigenwaarden. De eigenruimte V_1 behorend bij de eigenwaarde λ_1 is de deelruimte van alle vectoren $v \in \mathbb{R}^3$ waarvoor $(I - A)v = 0$. De uitgebreide matrix van dit stelsel is

$$\begin{pmatrix} 1-a & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & 0 \end{pmatrix} \ .$$

We werken dit uit met behulp van het rijreductiealgorimte. We moeten twee gevallen onderscheiden. Als $c \neq 1$ of $b(a-1) \neq 1$, dan vinden we dat $V_1 = \{(0, r, 0)^t \mid r \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, 0)^t \rangle$. Als $c = 1$ en $b(a-1) = 1$, dan vinden we dat $V_1 = \{(bs, r, -s)^t \mid r, s \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, 0)^t, (b, 0, -1)^t \rangle$. De eigenruimte V_2 behorend bij de eigenwaarde λ_2 is de deelruimte van alle vectoren $v \in \mathbb{R}^3$ waarvoor $(aI - A)v = 0$. De uitgebreide matrix van dit stelsel is

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & a-1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & a-c & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Met behulp van het rijreductiealgorimte vinden we dan dat $V_2 = \{((a-1)r, r, 0)^t \mid r \in \mathbb{R}\} = \langle (a-1, 1, 0)^t \rangle$. De eigenruimte V_3 behorend bij de eigenwaarde λ_3 is de deelruimte van alle vectoren $v \in \mathbb{R}^3$ waarvoor $(cI - A)v = 0$. De uitgebreide matrix van dit stelsel is

$$\begin{pmatrix} c-a & 0 & -1 & 0 \\ -1 & c-1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

We werken dit uit met behulp van het rijreductiealgorimte. We moeten twee gevallen onderscheiden. Als $c \neq 1$ of $b(a-1) \neq 1$, dan vinden we dat

$$\begin{aligned} V_3 = \{((c-1)r, r + rb(c-a), r(c-a)(c-1))^t \mid r \in \mathbb{R}\} \\ = \langle (c-1, 1 + b(c-a), (c-a)(c-1))^t \rangle \ . \end{aligned}$$

Als $c = 1$ en $b(a-1) = 1$, dan vinden we dat

$$V_3 = \{(bs, r, -s)^t \mid r, s \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, 0)^t, (b, 0, -1)^t \rangle \ .$$

We merken op dat de eigenruimte behorend bij λ_2 altijd ééndimensionaal is. We onderscheiden nu vier gevallen.

Als $c \neq 1$ en $a \notin \{1, c\}$, met andere woorden als de eigenwaarden a, c, en 1 drie verschillende getallen zijn, dan heeft A drie verschillende eigenwaarden, en is A diagonaliseerbaar. Uit het voorgaande volgt dan onmiddellijk dat $D = P^{-1}AP$, met

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & a-1 & c-1 \\ 1 & 1 & 1+b(c-a) \\ 0 & 0 & (c-a)(c-1) \end{pmatrix}.$$

Als $c \neq 1$ en $a \in \{1, c\}$, met andere woorden als $a = 1$ of $a = c$, dan heeft de eigenwaarde a algebraïsche multipliciteit gelijk aan 2. De meetkundige multipliciteit van a is echter steeds 1; merk hierbij op dat $V_2 = V_j$ als $\lambda_2 = \lambda_j$, $j = 1, 3$. De matrix A is dus niet diagonaliseerbaar.

Als $c = 1$ en $(a-1)b \neq 1$, dan is algebraïsche multipliciteit van de eigenwaarde 1 gelijk aan 2. De meetkundige multipliciteit van deze eigenwaarde is dan echter 1; merk op dat $V_1 = V_3$. De matrix A is dus niet diagonaliseerbaar.

Als $c = 1$ en $(a-1)b = 1$, dan is algebraïsche multipliciteit van de eigenwaarde 1 gelijk aan 2. De meetkundige multipliciteit van deze eigenwaarde is dan ook 2. De bijhorende eigenruimte is immers $V_1 = V_3 = \left\langle (0,1,0)^t, (b,0,-1)^t \right\rangle$. De matrix A is dan diagonaliseerbaar. Uit het voorgaande volgt onmiddellijk dat $D = P^{-1}AP$, met

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & b & a-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4. Beschouw de vectorruimte $V = M_n(\mathbb{Q})$. Voor een inverteerbare $A \in V$ definiëren we de afbeelding

$$f_A \colon V \to V \colon B \mapsto AB + B^t A^t .$$

(i) Ga na dat f_A een lineaire afbeelding is.

(ii) Toon aan: als n oneven is, dan kan een inverteerbare matrix niet bevat zijn in de kern van f_A.

(iii) Noteer de deelverzameling van V die bestaat uit de symmetrische matrices als U. Ga na dat U een deelruimte van V is. Toon aan dat $\mathrm{im}(f_A) = U$. Bereken nu $\dim(\mathrm{im}(f))$.

(iv) Kies nu (enkel in dit gedeelte)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden van f_A.

(v) Kies nu (enkel in dit gedeelte) $A = \mu I$, met $\mu \in \mathbb{Q}$. We herinneren aan de spoorafbeelding tr, die als volgt gedefinieerd is:

$$\mathrm{tr} \colon V \to \mathbb{Q} \colon C \mapsto \sum_{i=1}^{n} (C)_{i,i} .$$

Toon aan dat tr een lineaire afbeelding is. Bereken nu $f_A^*(\mathrm{tr})$.

Oplossing 4. (i) Aangezien $(\lambda B)^t = \lambda B^t$ voor iedere $\lambda \in \mathbb{Q}$ en voor iedere $B \in V$, geldt er dat

$$\begin{aligned} f_A(\lambda B + \lambda' B') &= A(\lambda B + \lambda' B') + (\lambda B + \lambda' B')^t A^t \\ &= \lambda AB + \lambda' AB' + \lambda B^t A^t + \lambda' B'^t A^t \\ &= \lambda(AB + B^t A^t) + \lambda'(AB' + B'^t A^t) \\ &= \lambda f_A(B) + \lambda' f_A(B') , \end{aligned}$$

voor alle $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Q}$ en voor alle $B, B' \in V$. Dus is f_A een lineaire afbeelding.

(ii) We tonen aan dat $\ker(f_A)$ enkel inverteerbare matrices bevat. Veronderstel dat $B \in \ker(f_A)$. Dan geldt er dat $AB + B^t A^t = 0$. We weten dat $\det(C) = \det(C^t)$ voor alle $C \in V$, dat $\det(kC) = k^n \det(C)$ voor alle $k \in \mathbb{Q}$ en $C \in V$, en dat $\det(CD) = \det(C)\det(D)$ voor alle $C, D \in V$. Hiervan gebruik makend, volgt uit $AB = -B^t A^t$ dat

$$\det(A)\det(B) = (-1)^n \det(A)\det(B) = -\det(A)\det(B) .$$

De laatste overgang geldt omdat n oneven is. Aangezien A inverteerbaar is, is $\det(A) \neq 0$. Bijgevolg is $\det(B) = -\det(B)$. Dus moet $\det(B) = 0$, en bijgevolg is B niet inverteerbaar.

(iii) We gaan na dat U een deelruimte is, en gebruiken daarvoor het criterium voor deelruimten. Kies $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ en $A, B \in U$. Dan geldt er dat $A^t = A$ en $B^t = B$. Dan vinden we dat

$$(\lambda A + \mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t = \lambda A + \mu B .$$

Dus is $\lambda A + \mu B$ ook symmetrisch. Aangezien een willekeurige lineaire combinatie van twee elementen van U ook bevat is in U, is U een deelruimte.

We gaan nu na dat $\operatorname{im}(f_A) = U$. Beschouw een willekeurige $B \in V$. We merken op dat

$$(f_A(B))^t = (AB + B^t A^t)^t = B^t A^t + AB = f_A(B) .$$

Bijgevolg zijn alle beelden van f_A symmetrische matrices. Dus volgt er dat $\operatorname{im}(f_A) \leq U$. Kies nu een willekeurige symmetrische matrix $C = (c_{i,j})_{i=1\ldots n}^{j=1\ldots n}$ en definieer $C' = \frac{1}{2}C$. Dan is $C'^t = C'$ omdat $C^t = C$.Aangezien A inverteerbaar is, bestaat de matrix A^{-1}. We berekenen nu $f_A(A^{-1}C')$:

$$\begin{aligned} f_A(A^{-1}C') = A(A^{-1}C') + (A^{-1}C')^t A^t &= (AA^{-1})C' + C'^t (A^{-1})^t A^t \\ &= C' + C'(AA^{-1})^t = 2C' = C . \end{aligned}$$

Dus is $C \in U$. Aangezien C willekeurig gekozen was, volgt hieruit dat $U \leq \operatorname{im}(f_A)$. Omdat zowel $\operatorname{im}(f_A) \leq U$ als $U \leq \operatorname{im}(f_A)$ geldt, moet $U = \operatorname{im}(f_A)$.

We bekijken de deelruimte U. We definiëren de matrices E_j, $j = 1, \ldots, n$ en $E_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$ als volgt:

$$\begin{aligned} (E_j)_{kl} &= \delta_{jk}\delta_{jl} , \\ (E_{ij})_{kl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il} . \end{aligned}$$

Met andere woorden, E_j is de matrix met een 1 op positie (j, j) en een 0 op alle andere posities, $j = 1, \ldots, n$; E_{ij} is de matrix met een 1 op de posities (i, j) en (j, i) en een 0 op alle andere posities, $1 \leq i < j \leq n$. Nu is het duidelijk dat $\mathcal{B} = \{E_j \mid j = 1, \ldots, n\} \cup \{E_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$

een basis is voor U. Deze basis telt $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ elementen en dus is $\dim(U) = \frac{n(n+1)}{2}$. Aangezien $\mathrm{im}(f_A) = U$ moet $\dim(\mathrm{im}(f_A)) = \dim(U) = \frac{n(n+1)}{2}$.

(iv) Om de eigenwaarden van f_A te berekenen, willen we de karakteristieke veelterm van f_A opstellen. Daarom zoeken we eerst de matrixvoorstelling van f_A. Merk op dat V isomorf is met $\mathbb{R}^4$, bijvoorbeeld via het isomorfisme

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to V : (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})^t \mapsto \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} .$$

Er geldt dat

$$\begin{aligned} f_A\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} 2(b_{11} - b_{21}) & b_{12} + b_{21} - b_{22} \\ b_{12} + b_{21} - b_{22} & 2b_{22} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Dus is

$$\begin{aligned} f_A(\varphi((1,0,0,0)^t)) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \varphi((2,0,0,0)^t) \\ f_A(\varphi((0,1,0,0)^t)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \varphi((0,1,1,0)^t) \\ f_A(\varphi((0,0,1,0)^t)) &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \varphi((-2,1,1,0)^t) \\ f_A(\varphi((0,0,0,1)^t)) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \varphi((0,-1,-1,2)^t) \end{aligned}$$

De matrixvoorstelling van $f_A \circ \varphi$ is dus

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

We vinden de karakteristieke veelterm van $f_A \circ \varphi$ dan als volgt:

$$\chi_{f_A \circ \varphi}(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & x-1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2 \left((x-1)^2 - 1\right) = (x-2)^3 x .$$

De eigenwaarden van $f_A \circ \varphi$ zijn dan $\lambda_1 = 0$ (met algebraïsche multipliciteit 1) en $\lambda_2 = 2$ (met algebraïsche multipliciteit 3).

(v) We gaan eerst na dat de spoorafbeelding een lineaire afbeelding van V naar $\mathbb{Q}$ is. Kies $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Q}$ en $D, D' \in V$. Dan geldt er dat

$$\mathrm{tr}(\lambda D + \lambda' D') = \sum_{i=1}^{n} (\lambda D + \lambda' D')_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} (D)_{i,i} + \lambda' \sum_{i=1}^{n} (D')_{i,i} = \lambda\, \mathrm{tr}(D) + \lambda'\, \mathrm{tr}(D') .$$

We concluderen dat tr een lineaire afbeelding is.

Aangezien f_A een afbeelding $V \to V$ is, is f_A^* een afbeelding $V^* \to V^*$. Bijgevolg is $f_A^*(\mathrm{tr}) \in V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{Q})$, en dus een afbeelding van

V naar $\mathbb{Q}$. Kies een willekeurige $B \in V$. Dan geldt er

$$
\begin{aligned}
(f_A^*(\mathrm{tr}))(B) = \mathrm{tr}(f_A(B)) &= \mathrm{tr}(AB + B^t A^t) = \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}((AB)^t) \\
&= 2\,\mathrm{tr}(AB) = 2\,\mathrm{tr}(\mu I B) = 2\,\mathrm{tr}(\mu B) = 2\mu\,\mathrm{tr}(B)\ .
\end{aligned}
$$

Bijgevolg is $f_A^*(\mathrm{tr}) = 2\mu\,\mathrm{tr}$.