Examen Lineaire algebra en meetkunde II

Oefeningen

vrijdag 6 september 2024, 13:00

- Uiterlijk om **16:30** dien je het examen in.
- Schrijf **je naam** op elk blad, leg je **studentenkaart** klaar.
- Maak elke oefening op een **apart blad** en dien voor elke oefening een blad in (eventueel leeg).
- De cursus, andere cursussen, de oefeningen en hun oplossingen behoren tot het toegelaten materiaal. Maak je gebruik van een resultaat dat hierin te vinden is, **verwijs** er dan ook naar.
- Gsm's zijn **uitgeschakeld**, evenals ander elektronisch materiaal. Deze blijven in de boekentas onder de stoel naast je. Overleg met medestudenten en buitenstaanders is strikt **verboden**.
- De puntjes waaruit een opgave bestaat kunnen soms **onafhankelijk** van elkaar opgelost worden (het is niet omdat je (i) niet kan dat je (ii) niet kan, enz.). Indien gewenst mag je wel steunen op de opgaven van eerdere puntjes, mits verwijzing.
- Zorg voor een duidelijke opbouw in je antwoord; tussenstappen en berekeningen worden steeds **gemotiveerd**.
- Het is geen wedstrijd schoonschrift, maar schrijf **leesbaar**.
- **Denk goed na**, start niet halsoverkop.
- Veel succes!

Opgave 1. **[2 punten]** Zij $\mathcal{A}$ een affiene ruimte. Bewijs dat een deelruimte D affien is als en slechts als voor elke drie niet collineaire punten in D het vlak waarin ze bevat zijn volledig in D bevat is.

Opgave 2. **[4 punten]** Zij $\mathcal{A}$ een affiene ruimte van dimensie ten minste 3 met minstens 3 punten per rechte. Beschouw de drie parallelle driehoeken $\triangle abc$, $\triangle a'b'c'$ en $\triangle a''b''c''$ die twee aan twee eigenlijk centraal zijn met verschillende centra en waarbij geen van de zijden samenvallen. Bewijs in elk van de volgende gevallen dat de centra collineair zijn.

(i) De driehoeken liggen in 3 verschillende vlakken.

(ii) Twee van de driehoeken liggen in eenzelfde vlak π en de derde driehoek ligt niet in dit vlak π.

(iii) De drie driehoeken liggen in eenzelfde vlak π en er zijn minstens 5 punten per rechte.

Opgave 3. **[4 punten]** Zij V een n-dimensionale $\mathbb{K}$-vectorruimte, met $\mathbb{K}$ een veld. Definieer dan V^* als de ruimte van bilineaire vormen over V, waarbij de optelling en scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd zijn zoals in Definitie 3.2.12.

(i) Bepaal de dimensie van V^* over $\mathbb{K}$.

(ii) Vormen de alternerende vormen in V^* een deelruimte? Zo ja, geef een bewijs en bepaal de dimensie hiervan. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

(iii) Vormen de reflexieve vormen in V^* een deelruimte? Zo ja, geef een bewijs en bepaal de dimensie hiervan. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.