Lineaire Algebra en Meetkunde I
Oefeningen

1^e bachelor wiskunde

Heb je vragen? Stuur gerust een mail of kom langs!

Lins Denaux
lins.denaux@ugent.be
De Sterre, gebouw S8, bureau 130.015 (routebeschrijving)

Deze bundel bevat alle oefeningen voor het vak Lineaire Algebra en Meetkunde I voor studenten 1^e bachelor wiskunde. Zorg dat je ze elke oefeningenles meebrengt! De oefeningen worden gemarkeerd met een letter, naargelang het aantal en het type stappen dat nodig zijn om tot een oplossing te komen. Ruwweg betekenen deze het volgende.

(D) **D**efinitie: een oefening die je kan oplossen door definities toe te passen.

(B) **B**asis: deze oefening kan je doorgaans in één stap oplossen, gebruik makend van een definitie, rekentechniek, eigenschap (die eerder aan bod gekomen kan zijn),...

(T) **T**ussenstappen: bij deze oefening moet je via één of enkele tussenstappen of tussenresultaten tot de oplossing komen. Je combineert dus definities, rekentechnieken, eigenschappen,...

(U) **U**itdaging: een uitdagende oefening waarbij je wat creativiteit nodig hebt om tot een oplossing te komen, van een niveau dat niet verwacht wordt op het examen.

Oefeningen op hoofdstuk 1

Inleidende begrippen

1.1 Stelsels van lineaire vergelijkingen

Oefening 1.1. (B) Los de volgende stelsels vergelijkingen op over $\mathbb{Q}$ met behulp van het rijreductiealgoritme.

(a) $\begin{cases} x + 4y + 7z = -1 \\ y + 2z = 0 \\ -3x - 2y = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 7x + 3y + 4z = 7 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y + 2z = 5 \\ 3x + y + 11z = 20 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + 3y + z + u = 3 \\ 2x - 2y + z + 2u = 8 \\ x - 5y + u = 5 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 26 \\ 2x - 3y + 5z - 2u = -3 \\ 4x - y + 6z - 3u = 4 \\ 3x + 4y - 2z - u = 11 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_5 = 1 \\ x_3 + x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$

Oplossing 1.1. Voor twee opgaves werken we het rijreductiealgoritme volledig uit. Voor de andere opgaves wordt enkel het antwoord gegeven.

(a) We passen het rijreductiealgoritme toe op de uitgebreide matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

We vinden

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 21 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{R_1 \leftarrow R_1 - 4R_2, R_3 \leftarrow R_3 - 10R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{R_1 \leftarrow R_1 + R_3, R_2 \leftarrow R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

De oplossingsverzameling wordt dus gegeven door $\{(-3, 4, -2)^t\}$.

(b) De oplossingsverzameling is ledig.

(c) $\{(5 - 3r, 5 - 2r, r)^t | r \in \mathbb{Q}\}$

(d) $\{(5+5r-s, r, -2-8r, s)^t | r, s \in \mathbb{Q})\}$, dit komt op hetzelfde neer als $\{(-\frac{5}{8}s - r + \frac{15}{4}, -\frac{1}{8}s - \frac{1}{4}, s, r)^t | s, r \in \mathbb{Q})\}$.

(e) $\{(3, 2, 1, 4)^t\}$

(f) $\{(4 - s, s, -6 - r, r, 3)^t | r, s \in \mathbb{Q}\}$

(g) De uitgebreide matrix van het stelsel is

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) .$$

We passen het rijreductiealgoritme hierop toe.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1, R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{R_2 \leftarrow -\frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{R_1 \leftarrow R_3 - 2R_2, R_3 \leftarrow R_3 + 5R_2, R_4 \leftarrow R_4 + 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De oplossingsverzameling wordt dus gegeven door $\{(1 - \frac{3}{5}r, -\frac{1}{5}r, r)^t | r \in \mathbb{Q}\}$, hetgeen door de substitutie $r = -5s$ overgaat in $\{(1 + 3s, s, s, -5s)^t | s \in \mathbb{Q}\}$.

(h) De oplossingsverzameling is ledig.

(i) $\{(0, 0)^t\}$

Oefening 1.2. (B) Los de volgende stelsels vergelijkingen op over $\mathbb{R}$ met behulp van het rijreductiealgoritme.

(a) $\begin{cases} x_1 + \sqrt{5}x_3 = 2 \\ 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \sqrt{2}x + z = 1 \\ x + \sqrt{2}y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

Oplossing 1.2. We werken één opgave volledig uit. Van de andere opgave wordt het resultaat gegeven.

(a) De uitgebreide matrix van het stelsel is

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \sqrt{5} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

We passen het rijreductiealgoritme hierop toe.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{5} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\overset{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{5} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3\sqrt{5} & -4 \end{pmatrix} \\
&\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{5} & 2 \\ 0 & 1 & -3\sqrt{5} & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&\overset{R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{5} & 2 \\ 0 & 1 & -3\sqrt{5} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{R_1 \leftarrow R_1 - \sqrt{5}R_3, R_2 \leftarrow R_2 + 3\sqrt{5}R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2-\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 & 3\sqrt{5}-4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De oplossingsverzameling wordt dus gegeven door $\{(2-\sqrt{5}, 3\sqrt{5}-4, 1)^t\}$.

(b) $\{(\frac{1+2\sqrt{2}}{7}, \frac{-3+\sqrt{2}}{7}, \frac{3-\sqrt{2}}{7})^t\}$

Oefening 1.3. (B) Los de volgende stelsels vergelijkingen op over $\mathbb{C}$ met behulp van het rijreductiealgoritme.

(a) $\begin{cases} 2x + y + iz = 5 \\ (4+2i)x + 5y + 8z = i \\ 4x + 2y + 2iz = 10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + y + iz = 5 \\ (1+i)x + y + z = 5i \\ (1+i)x + (1+i)y + 2iz = 0 \end{cases}$

Oplossing 1.3. We werken één opgave volledig uit. Van de andere opgave wordt het resultaat gegeven.

(a) $\{((-\frac{7}{20}i + \frac{29}{20})\, r + \frac{11}{10}i + \frac{19}{5}, -(\frac{3}{10}i + \frac{29}{10})\, r - \frac{11}{5}i - \frac{13}{5}, r)^t \mid r \in \mathbb{C}\}$

(b) De uitgebreide matrix van het stelsel is

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & i & 5 \\ 1+i & 1 & 1 & 5i \\ 1+i & 1+i & 2i & 0 \end{array}\right).$$

We passen het rijreductiealgoritme hierop toe.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & i & 5 \\ 1+i & 1 & 1 & 5i \\ 1+i & 1+i & 2i & 0 \end{pmatrix} &\overset{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{5}{2} \\ 1+i & 1 & 1 & 5i \\ 1+i & 1+i & 2i & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{R_2 \leftarrow R_2 - (1+i)R_1, R_3 \leftarrow R_3 - (1+i)R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1-i}{2} & \frac{3-i}{2} & \frac{5i-5}{2} \\ 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1+3i}{2} & -\frac{5+5i}{2} \end{pmatrix} \\
&\overset{R_2 \leftarrow (1+i)R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 2+i & -5 \\ 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1+3i}{2} & -\frac{5+5i}{2} \end{pmatrix} \\
&\overset{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_2, R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1+i}{2}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2+i & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De oplossingsverzameling wordt dus gegeven door $\{(5+r, -5-(2+i)r, r)^t \mid r \in \mathbb{C}\}$.

Oefening 1.4. (B) Bepaal voor elk van volgende uitgebreide matrices of ze in rij-echelonvorm staan. Indien dit het geval is, bepaal de oplossingsverzameling van het corresponderende stelsel over $\mathbb{R}$.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

(d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

(e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(f) $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(g) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

(h) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(i) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(j) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Oplossing 1.4.

(a) Deze uitgebreide matrix staat in rij-echelonvorm. Wanneer we de matrix terug vertalen naar een stelsel, vinden we
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases},$$
dus dit stelsel is strijdig. De oplossingsverzameling is de ledig: $V = \emptyset$.

(b) Deze uitgebreide matrix staat niet in rij-echelonvorm: er is niet voldaan aan de tweede voorwaarde van Definitie 1.4.8.

(c) Deze uitgebreide matrix staat in rij-echelonvorm. Wanneer we de matrix terug vertalen naar een stelsel, vinden we
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$
dus dit stelsel heeft één oplossing: $V = \{(0,0,0)^t\}$.

(d) Deze uitgebreide matrix staat niet in rij-echelonvorm: er is niet voldaan aan de eerste voorwaarde van Definitie 1.4.8.

(e) Deze uitgebreide matrix staat niet in rij-echelonvorm: er is niet voldaan aan de eerste voorwaarde van Definitie 1.4.8.

(f) Deze uitgebreide matrix staat in rij-echelonvorm. Wanneer we de matrix terug vertalen naar een stelsel, vinden we
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases},$$
dus we kunnen x en y vrij kiezen: $V = \{(r,s)^t \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.

(g) Deze uitgebreide matrix staat niet in rij-echelonvorm: er is niet voldaan aan de derde voorwaarde van Definitie 1.4.8.

(h) Deze uitgebreide matrix staat in rij-echelonvorm. Wanneer we de matrix terug vertalen naar een stelsel, vinden we
$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = -1 \\ u = 2 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

dus we kunnen z vrij kiezen: $V = \{(-2r, -1-r, r, 2)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$.

(i) Deze uitgebreide matrix staat in rij-echelonvorm. Wanneer we de matrix terug vertalen naar een stelsel, vinden we

$$\begin{cases} x - y + u = 2 \\ z + u = -1 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

dus we kunnen y en u vrij kiezen: $V = \{(2+r-s, r, -1-s, s)^t \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.

(j) Deze uitgebreide matrix staat in rij-echelonvorm. Wanneer we de matrix terug vertalen naar een stelsel, vinden we

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = -1 \\ u = 3 \end{cases},$$

dus we kunnen y vrij kiezen: $V = \{(2, r, -1, 3)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Oefening 1.5. (B) Los het volgende stelsel op over $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Is het hier nodig om met de uitgebreide matrix te werken?

Oplossing 1.5. De uitgebreide matrix van dit stelsel is

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Reduceren in rij-echelonvorm geeft

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

De oplossing is dus $\{(0,0,0)^t\}$. Merk op dat de laatste kolom nooit iets anders dan nullen kon bevatten. We konden deze dus weglaten (en onszelf dus wat papier besparen).

Oefening 1.6. (T) Los telkens de verschillende stelsels tegelijk op over $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{cases} -x_1 + 2y_1 = -1 \\ 3x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 1 \\ 4x_1 + 4z_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_2 + 2y_2 = 1 \\ 3x_2 - 2y_2 + 2z_2 = 3 \\ 4x_2 + 4z_2 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_3 + 2y_3 = 0 \\ 3x_3 - 2y_3 + 2z_3 = 0 \\ 4x_3 + 4z_3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -x_1 + 3y_1 + 5z_1 = 2 \\ x_1 + 4z_1 = -1 \\ -2y_1 + z_1 = -1 \\ x_1 - y_1 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_2 + 3y_2 + 5z_2 = 0 \\ x_2 + 4z_2 = 3 \\ -2y_2 + z_2 = 5 \\ x_2 - y_2 = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 + 2z_1 = 1 \\ y_1 + 2z_1 = 0 \\ 4x_1 + y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_2 + 2z_2 = 0 \\ y_2 + 2z_2 = 1 \\ 4x_2 + y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_3 + 2z_3 = 0 \\ y_3 + 2z_3 = 0 \\ 4x_3 + y_3 + 2z_3 = 1 \end{cases}$

Oplossing 1.6.

(a) Gezien de coëfficiënten bij de variabelen hier telkens dezelfde zijn, beschouwen we de uitgebreide matrices van deze stelsels tegelijk. Deze omzetten in rij-echelonvorm geeft

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hieruit halen we dat de stelsels equivalent zijn aan

$$\begin{cases} x_1 + z_1 = 0 \\ y_1 + \frac{1}{2}z_1 = -\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + z_2 = 0 \\ y_2 + \frac{1}{2}z_2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 + z_3 = 0 \\ y_3 + \frac{1}{2}z_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Bijgevolg is de oplossingsverzameling voor het eerste stelsel $V_1 = \{(-r, -(1+r)/2, r)^t \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \mathbb{R}\}$, heeft het tweede stelsel geen oplossingen, en is de oplossingsverzameling voor het derde stelsel $V_3 = \{(-r, -r/2, r)^t \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \mathbb{R}\}$. Merk op dat de derde kolom bij het toepassen van rijreductie steeds de nulkolom blijft. We kunnen onszelf dus wat schrijfwerk sparen, en deze kolom weglaten (maar wel in het achterhoofd houden wat het stelsel dan is).

(b) We zetten de uitgebreide matrix van de twee stelsels om in rij-echelonvorm

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hieruit halen we dat de stelsels equivalent zijn aan

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -2 \\ z_1 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Bijgevolg is de oplossingsverzameling voor het eerste stelsel ledig, en die van het tweede stelsel $V_2 = \{(-1, -2, 1)^t\}$.

(c) We vinden als oplossingsverzamelingen $V_1 = \{(0, -1, \frac{1}{2})^t\}$, $V_2 = \{(\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})^t\}$ en $V_3 = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{4})^t\}$.

Oefening 1.7. (B) Bepaal van elk van de volgende uitspraken of ze waar of vals is. Indien waar, bewijs, en indien vals, geef een tegenvoorbeeld.

(a) Een homogeen stelsel heeft altijd een unieke oplossing.
(b) Als we alle vergelijkingen van een niet-strijdig stelsel vermenigvuldigen met 2, dan vinden we de oplossingen van het nieuwe stelsel door de oplossingen van het oude stelsel te vermenigvuldigen met 2.

Oplossing 1.7.

(a) Vals: neem bijvoorbeeld $x + y = 0$, dit heeft oplossing $\{(0,0)^t\}$, maar heeft één vrijheidsgraad (de volledige oplossingsverzameling is $\{(r, -r)^t \mid r \in K\}$).

(b) Vals: neem $\{x+y=1, x-y=1$, met als oplossingsverzameling $\{(1,0)^t\}$, dan geeft het vermenigvuldigen van dit stelsel met 2 het stelsel $\{2x+2y=2, 2x-2y=2$, nog steeds met oplossingsverzameling $\{(1,0)^t\}$.

Oefening 1.8. (B) In deze oefening is a een parameter in $\mathbb{R}$. Bespreek in functie van de parameter a of het stelsel oplossingen over $\mathbb{R}$ heeft. Als het stelsel oplossingen heeft, geef dan de oplossingsverzameling.

(a) $\begin{cases} x+ay=-1 \\ ax+y=1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=a+2 \\ -x_1+ax_2-2x_3=-3a \\ -ax_1+2x_2-ax_3=-4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1-2x_2=2 \\ -x_1+ax_2=1 \\ (a+1)x_1-2ax_2=a-1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -ax+5ay+z=4a+4 \\ 2x-10y+2z=4a+4 \end{cases}$

Oplossing 1.8. We werken de oplossing voor de eerste en derde opgave volledig uit. De oplossing voor de twee andere opgaves kan analoog gevonden worden; we geven hier enkel het resultaat.

(a) Op de uitgebreide matrix van het stelsel passen we onmiddellijk het rijreductiealgoritme toe:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_2 \leftarrow R_2 - aR_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1-a^2 & 1+a \end{pmatrix}.$$

We zouden nu van het element $1-a^2$ een spil willen maken (merk op dat we geen andere keuze hebben). Dat kan enkel als $1-a^2 \neq 0$. We onderscheiden nu drie mogelijkheden: $1-a^2 \neq 0$, $a=1$ en $a=-1$. In het eerste geval kunnen we het rijreductiealgoritme verderzetten.:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1-a^2 & 1+a \end{pmatrix} \overset{R_2 \leftarrow \frac{1}{1-a^2} R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1-a} \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftarrow R_1 - aR_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1-a} \end{pmatrix}.$$

Als $a=-1$, vinden we de uitgebreide matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Onderaan vinden we een nulrij. De oplossingsverzameling wordt beschreven door $\{(-1+r, r)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$. Als $a=1$, vinden we de uitgebreide matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Aangezien de tweede rij enkel in de laatste kolom een niet-nul element heeft, is dit stelsel strijdig. Er zijn geen oplossingen.
We vatten de resultaten samen

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}: & \{(\frac{-1}{1-a}, \frac{1}{1-a})^t\} \\ a=1: & \text{Geen oplossingen} \\ a=-1: & \{(-1+r, r)^t \mid r \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

(b) De oplossing is

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}: & \{(-a,-2,a)^t\} \\ a=0: & \{(-2r,-2,r)^t \mid r \in \mathbb{R}\} \\ a=1: & \{(2-3r,-1-r,r)^t \mid r \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

(c) De uitgebreide matrix van het stelsel is

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ -1 & a & 1 \\ a+1 & -2a & a-1 \end{array}\right).$$

We passen hierop het rijreductiealgoritme toe.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & a & 1 \\ a+1 & -2a & a-1 \end{pmatrix} \overset{R_2 \leftarrow R_2 + R_1, R_3 \leftarrow R_3 - (a+1)R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & a-2 & 3 \\ 0 & 2 & -a-3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -a-3 \\ 0 & a-2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_2 \leftarrow \frac{1}{2} R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{a+3}{2} \\ 0 & a-2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2, R_3 \leftarrow R_3 - (a-2)R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-1 \\ 0 & 1 & -\frac{a+3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a^2+a}{2} \end{pmatrix}$$

Als het element in de laatste kolom van de laatste rij een nul is, dan is de laatste rij een nulrij en heeft dit stelsel oplossingen. Anders heeft het geen oplossingen. Merk op dat $\frac{a^2+a}{2} = 0$ als en slechts als $a = -1$ of $a = 0$.
Als $a = -1$, vinden we als oplossing $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Als $a = 0$, vinden we als oplossing $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$. We vatten de resultaten samen.

$$\begin{cases} a = 0 : & \{(-1, -3/2)^t\} \\ a = -1 : & \{(0, -1)^t\} \\ a \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1\} : & \text{Geen oplossingen} \end{cases}$$

(d) De oplossing is

$$\begin{cases} a = -1 : & \{(5r - s, r, s)^t \mid r, s \in \mathbb{R}\} \\ a \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} : & \{(5r - 2, r, 2a + 4)^t \mid r \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

Oefening 1.9. (T) Los de volgende stelsels over $\mathbb{Q}$ op; hierbij zijn a en b parameters in $\mathbb{Q}$.

(a) $\begin{cases} x_1 + bx_2 = 1 \\ bx_1 + ax_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - ax_3 = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + bx_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 = -2 \\ ax_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

Oplossing 1.9.

(a) De uitgebreide matrix van het stelsel is

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 1 \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{array}\right).$$

We passen het rijreductiealgoritme toe.

$$\begin{pmatrix}1 & b & 0 & 1\\ b & 0 & a & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 1\end{pmatrix} \underset{R_2\leftarrow R_2-bR_1}{\sim} \begin{pmatrix}1 & b & 0 & 1\\ 0 & -b^2 & a & -b\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{pmatrix}1 & b & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -b^2 & a & -b\\ 0 & 1 & -a & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{R_1\leftarrow R_1-bR_2,R_3\leftarrow R_3+b^2R_2,R_4\leftarrow R_4-R_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & b & 1-b\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & a-b^2 & b^2-b\\ 0 & 0 & 1-a & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3\leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & b & 1-b\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & a-b^2 & b^2-b\end{pmatrix}$$

We willen nu $1-a$ als spil gebruiken, maar dit kan enkel als $1-a$ verschillend is van nul. We onderscheiden dus twee mogelijkheden. Eerst, als $a=1$, dan vinden we de volgende matrix waarop we het rijreductiealgoritme kunnen verderzetten.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & b & 1-b\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-b^2 & b^2-b\end{pmatrix} \underset{R_3\leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & b & 1-b\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1-b^2 & b^2-b\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Om $1-b^2$ als spil te gebruiken, moet $1-b^2\neq 0$. Merk op dat $1-b^2=0$ als en slechts als $b=-1$ of $b=1$. We bekijken eerst deze speciale gevallen. Als $b=-1$, vinden we de matrix

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

In dit geval zijn er geen oplossingen omdat op de derde enkel een niet-nul element staat in de laatste kolom. Als $b=1$, vinden we de matrix

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

In dit geval, wordt de oplossingsverzameling gegeven door $\{(-r,1+r,r)^t \mid r\in\mathbb{Q}\}$. Nu bekijken we het geval waarin $1-b^2$ verschillend is van nul, en dus als spil kan dienen.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & b & 1-b\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1-b^2 & b^2-b\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{R_3\leftarrow \frac{1}{1-b^2}R_3}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & b & 1-b\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{b}{1+b}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{R_1\leftarrow R_1-bR_3,R_2\leftarrow R_2+R_3}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+b}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1+b}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{b}{1+b}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

We vinden dus $x_1 = \frac{1}{1+b}$, $x_2 = \frac{1}{1+b}$, $x_3 = -\frac{b}{1+b}$ als oplossing. Hiermee is het geval $a = 1$ volledig behandeld. We bekijken nu het geval waarin $a \neq 1$, en waarin $1 - a$ dus een spil kan zijn. We zetten het rijreductiealgoritme verder.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1-b \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-b^2 & b^2-b \end{pmatrix} \overset{R_3 \leftarrow \frac{1}{1-a} R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1-b \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-b^2 & b^2-b \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_1 \leftarrow R_1 - bR_3, R_2 \leftarrow R_2 + R_3, R_4 \leftarrow R_4 + (b^2-a)R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2-b \end{pmatrix}$$

Als $b^2 - b$ verschillend is van nul, dan heeft dit stelsel geen oplossingen. Als $b \in \{0, 1\}$, dan is $b^2 - b = 0$, en heeft dit stelsel als oplossing $x_1 = 1 - b$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. We vatten de resultaten samen.

$$\begin{cases} a = 1, b = 1: & \{(-r, 1+r, r)^t \mid r \in \mathbb{Q}\} \\ a = 1, b = -1: & \text{Geen oplossingen} \\ a = 1, b \in \mathbb{Q}\backslash\{1, -1\}: & \{(\frac{1}{1+b}, \frac{1}{1+b}, \frac{-b}{1+b})^t\} \\ a \neq 1, b = 1: & \{(0, 1, 0)^t\} \\ a \neq 1, b = 0: & \{(1, 1, 0)^t\} \\ a \neq 1, b \in \mathbb{Q}\backslash\{1, 0\}: & \text{Geen oplossingen} \end{cases}$$

(b) We passen het rijreductiealgoritme toe.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1 \\ 1 & a & 0 & -2 \\ a & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{R_2 \leftarrow R_2 - R_1, R_3 \leftarrow R_3 - aR_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & a & -b & -3 \\ 0 & 1 & -ab & 2-a \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & -ab & 2-a \\ 0 & a & -b & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_3 \leftarrow R_3 - aR_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & -ab & 2-a \\ 0 & 0 & b(a^2-1) & (a-3)(a+1) \end{pmatrix}$$

Opdat we $b(a^2 - 1)$ als spilelement kunnen gebruiken, moet $b(a^2 - 1) \neq 0$ zijn. Onderstel eerst dat $b(a^2 - 1) = 0$, dus $a = \pm 1$ of $b = 0$. Merk op dat het stelsel dan enkel niet-strijdig is wanneer $(a - 3)(a + 1) = 0$, dus wanneer $a = 3$ of $a = -1$. We overlopen nu de mogelijkheden waarbij $b(a^2 - 1) = 0$. Wanneer $a = -1$, dan krijgen we het stelsel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & b & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dat $\{(1 - br, 3 - br, r)^t | r \in \mathbb{Q}\}$ als oplossing heeft. Als $a = 1$ krijgen we zoals opgemerkt een strijdig stelsel. In het geval $b = 0$ is het stelsel eveneens strijdig als $a \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 3\}$, het geval $a = -1$ hebben we al behandeld en het geval $a = 3$ levert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en dat heeft als oplossing $\{(1, -1, r)^t | r \in \mathbb{Q}\}$. Onderstel nu dat $b(a^2 - 1) \neq 0$, dan kunnen we dit element als spil gebruiken. Dit geeft ons

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & b & 1\\ 0 & 1 & -ab & 2-a\\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-3}{b(a-1)}\end{pmatrix} \overset{R_2\leftarrow R_2-bR_3, R_1\leftarrow R_1+abR_3}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{2}{a-1}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{a-1}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-3}{b(a-1)}\end{pmatrix}.$$

Dit stelsel heeft $\left(\frac{2}{1-a}, \frac{2}{1-a}, \frac{a-3}{b(a-1)}\right)^t$ als oplossing.
Samengevat hebben we de volgende oplossing.

$$\begin{cases} a=-1: & \{(1-br, 3-br, r)^t \mid r\in\mathbb{Q}\}\\ a=1: & \text{Geen oplossingen}\\ a=3, b=0: & \{(1,-1,r)^t \mid r\in\mathbb{Q}\}\\ a\in\mathbb{Q}\backslash\{-1,3\}, b=0: & \text{Geen oplossingen}\\ a\in\mathbb{Q}\backslash\{-1,1\}, b\neq 0: & \left\{\left(\frac{2}{a-1}, \frac{-2}{a-1}, \frac{a-3}{b(a-1)^t}\right)\right\}\end{cases}$$

Oefening 1.10. (T) Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 3\\ 2x_1 + 6x_2 = -1\end{cases}$$

(a) Interpreteer dit stelsel over de eindige velden $\mathbb{F}_5$ en $\mathbb{F}_{11}$ en bepaal de oplossingen.
(b) Interpreteer dit stelsel over de eindige velden $\mathbb{F}_3$ en $\mathbb{F}_7$ en bepaal de oplossingen. Hoeveel oplossingen zijn er?

Oplossing 1.10.

(a) We bekijken het stelsel over $\mathbb{F}_5$ en laten $\mathbb{F}_{11}$ voor de lezer. Gebruik makend van Voorbeeld 1.1.7(2) in de cursus en Oefening 1.18, weten we dat we dit stelsel over $\mathbb{F}_5$ als volgt kunnen herschrijven.

$$\begin{cases} \overline{3}x_1 + \overline{3}x_2 = \overline{3}\\ \overline{2}x_1 + \overline{1}x_2 = \overline{4}\end{cases}$$

De uitgebreide matrix wordt gegeven door

$$\left(\begin{array}{cc|c} \overline{3} & \overline{3} & \overline{3}\\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{4}\end{array}\right).$$

Het passen nu het rijreductiealgoritme toe.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\overline{3} & \overline{3} & \overline{3}\\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{4}\end{pmatrix} &\overset{R_1\leftarrow\overline{2}R_1}{\sim} \begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{1} & \overline{1}\\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{4}\end{pmatrix}\\ &\overset{R_2\leftarrow R_2-\overline{2}R_1}{\sim} \begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{1} & \overline{1}\\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{2}\end{pmatrix}\\ &\overset{R_2\leftarrow\overline{4}R_2}{\sim} \begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{1} & \overline{1}\\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{3}\end{pmatrix}\\ &\overset{R_1\leftarrow R_1-R_2}{\sim} \begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{0} & \overline{3}\\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

De oplossingsverzameling is dus $\{(\overline{3}, \overline{3})\}$.

(b) We bekijken het stelsel over $\mathbb{F}_7$ en laten $\mathbb{F}_3$ voor de lezer. Gebruik makend van Voorbeeld 1.1.7(2) in de cursus en Oefening 1.18, weten we dat we dit stelsel over $\mathbb{F}_5$ als volgt kunnen herschrijven.

$$\begin{cases} \overline{1}x_1 + \overline{3}x_2 = \overline{3}\\ \overline{2}x_1 + \overline{6}x_2 = \overline{6}\end{cases}$$

Op de uitgebreide matrix passen we onmiddellijk het rijreductiealgoritme toe.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \overline{1} & \overline{3} & \overline{3}\\ \overline{2} & \overline{6} & \overline{6}\end{array}\right) \overset{R_2\leftarrow R_2-\overline{2}R_1}{\sim} \begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{3} & \overline{3}\\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0}\end{pmatrix}$$

We vinden een nulrij. De oplossingsverzameling wordt dus gegeven door $\{(\overline{3}-\overline{3}t, t) \mid t\in\mathbb{F}_7\}$. Er zijn dus precies zeven oplossingen.

Oefening 1.11. (T) Zij A een $m \times n$-matrix en B een $m \times 1$-matrix over het eindig veld $\mathbb{F}_p$, p een priemgetal. Zij V de oplossingsverzameling van het stelsel $AX = B$ over $\mathbb{F}_p$. Wat kan je zeggen over het aantal elementen van V?

Oplossing 1.11. Als het stelsel niet strijdig is wordt het aantal oplossingen bepaald door het aantal vrijheidsgraden (het aantal kolommen zonder spil). Elke vrij te kiezen variabele kan p waarden aannemen. Dus als er r vrij te kiezen variabelen zijn dan heeft het stelsel p^r oplossingen, met $0 \leqslant r \leqslant n$. Het aantal oplossingen is dus 0 (strijdig stelsel) of een macht van p.

1.2 Velden

Oefening 1.12. (D) Beschouw $S = \{0, I, \alpha\}$, een verzameling met 3 elementen. We definiëren een optelling en vermenigvuldiging aan de hand van bewerkingstabellen.

(a) Toon aan dat (K1) en (K4) voldaan zijn. Ook de andere axioma's van een veld zijn voldaan, dus deze structuur is een veld.

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & I & \alpha \\ \hline 0 & 0 & I & \alpha \\ I & I & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & I \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & I & \alpha \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha & I \end{array}$$

(b) Ga na of (K2) en (K5) geldig zijn.

$$\begin{array}{c|ccc} +' & 0 & I & \alpha \\ \hline 0 & 0 & I & \alpha \\ I & \alpha & 0 & I \\ \alpha & I & \alpha & 0 \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & I & \alpha \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha & I \end{array}$$

(c) Toon aan dat (K3) geldig is. Controleer of in deze structuur (K6) voldaan is.

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & I & \alpha \\ \hline 0 & 0 & I & \alpha \\ I & I & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & I \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot' & 0 & I & \alpha \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \\ I & I & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha & I \end{array}$$

Oplossing 1.12.

(a) Voor de commutativiteit van de optelling merken we op dat de bewerkingstabel van $+$ dezelfde is bij spiegelen om de hoofddiagonaal. Dit wil zeggen dat $x + y = y + x$ voor alle x en y. Wegens $x + 0 = 0 + x = x$ voor alle x, is $(x + 0) + y = x + y = x + (0 + y)$ voor alle x en y, alsook $(0 + x) + y = x + y = 0 + (x + y)$ en $(x + y) + 0 = x + y = x + (y + 0)$. Verder is wegens de commutativiteit $(x + x) + x = x + (x + x)$ en $(x + y) + x = x + (x + y) = x + (y + x)$ voor alle x en y. We moeten nog maar vier identiteiten nagaan:

$$\begin{aligned} (\alpha + I) + I = 0 + I = I = \alpha + \alpha = \alpha + (I + I) \\ (I + I) + \alpha = \alpha + \alpha = I = I + 0 = I + (I + \alpha) \\ (I + \alpha) + \alpha = 0 + \alpha = \alpha = I + I = I + (\alpha + \alpha) \\ (\alpha + \alpha) + I = I + I = \alpha = \alpha + 0 = \alpha + (\alpha + I) \,. \end{aligned}$$

(b) Voor (K2): aangezien $I +' 0 = \alpha$, zijn zowel 0 als I geen neutraal element voor $+'$. Verder kan α geen neutraal element zijn, want $\alpha +' 0 = I$.
De associativiteit van de vermenigvuldiging geldt: Van zodra één van de elementen 0 is, is $(x \cdot y) \cdot z = 0 = x \cdot (y \cdot z)$. Verder is I duidelijk neutraal element voor $\cdot$, dus vanaf er een I aanwezig is, geldt de identiteit ook. We gaan enkel nog na dat

$$(\alpha \cdot \alpha) \cdot \alpha = I \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot I = \alpha \cdot (\alpha \cdot \alpha) \,.$$

(c) Er geldt $0+0=0$, dus $-0=0$. Verder is $I+\alpha=\alpha+I=0$, dus $-I=\alpha$ en $-\alpha=I$. We concluderen dat (K3) geldig is. Voor (K6) merken we dat $\alpha\cdot'\alpha=I$, dus α is geen neutraal element, $0\cdot'\alpha=0$, dus 0 is geen neutraal element, en $I\cdot' I=\alpha$, dus I is geen neutraal element. Bijgevolg is (K6) niet geldig.

Oefening 1.13. (D) Beschouw $S=\{0,I,\alpha,\beta\}$, een verzameling met 4 elementen. We definiëren een optelling en vermenigvuldiging aan de hand van bewerkingstabellen.

(a) Deze structuur voldoet aan axioma's (K1) tot (K6), alsook (K9). Ga na of we hier een veld hebben, m.a.w. controleer (K7) en (K8)

$+$	0	I	α	β
0	0	I	α	β
I	I	0	β	α
α	α	β	0	I
β	β	α	I	0

en

$\cdot$	0	I	α	β
0	0	0	0	0
I	0	I	α	β
α	0	α	β	I
β	0	β	I	α

(b) In deze structuur gelden (K1) tot (K5), alsook (K8) en (K9). Ga na of (K6) en (K7) hier geldig zijn, en dus of deze structuur een veld is.

$+'$	0	I	α	β
0	0	I	α	β
I	I	α	β	0
α	α	β	0	I
β	β	0	I	α

en

$\cdot'$	0	I	α	β
0	0	0	0	0
I	0	I	α	β
α	0	α	0	α
β	0	β	α	I

(c) Hier geldt (K1) tot (K4). Toon aan dat (K5) en (K9) niet geldig zijn, dus dat deze structuur geen veld is.

$+$	0	I	α	β
0	0	I	α	β
I	I	0	β	α
α	α	β	0	I
β	β	α	I	0

en

$*$	0	I	α	β
0	0	0	0	0
I	I	0	β	α
α	α	0	I	β
β	β	0	α	I

Oplossing 1.13.

(a) Met deze optelling en vermenigvuldiging krijgen we een veld. Voor de wiskundestudenten: dit is $\mathbb{F}_4$, het (unieke) veld met 4 elementen.

(b) In dit geval vinden we geen veld. Er is niet voldaan aan (K7): voor α bestaat er geen $c\in\{I,\alpha,\beta\}$ waarvoor $\alpha\cdot' c=c\cdot'\alpha=I$. Met andere woorden: α is niet inverteerbaar.

(c) Hier zijn meerdere axioma's vals. De vermenigvuldiging is niet associatief (dus (K5) geldt niet), want $(I*I)*\alpha=0\neq\alpha=I*(I*\alpha)$. Er is geen neutraal element voor de vermenigvuldiging, want stel dat $1\in\{I,\alpha,\beta\}$ een neutraal element is, dan is $1*I=0\neq I$. Wegens het gebrek aan neutraal element voor de vermenigvuldiging, kan aan (K7) niet voldaan zijn. De vermenigvuldiging is niet commutatief (i.e. (K8) geldt niet), want $I*\alpha=\beta\neq 0=\alpha*I$.
Als laatste geldt (K9) niet, want $\alpha*(\alpha+\beta)=\alpha*I=0\neq\alpha=I+\beta=\alpha*\alpha+\alpha*\beta$. Merk op dat de linkse distributiviteit hier niet geldt, maar de rechtse wel! Voor alle $a,b,c\in S$ geldt $(a+b)*c=a*c+b*c$.

Oefening 1.14. (D) Zij $\mathbb{R}[x]$ zoals in Voorbeeld 1.1.7(1). Waarom is $\mathbb{R}[x]$ geen veld?

Oplossing 1.14. De ring $\mathbb{R}[x]$ is geen veld omdat niet-constante polynomen geen inverse elementen voor de vermenigvuldiging hebben. Beschouw $f(x)=a_0+\cdots+a_nx^n$, met $a_n\neq 0$ en $n>0$, en veronderstel dat $g(x)=b_0+\cdots+a_mx^m$ ($b_m\neq 0$) het invers element voor de vermenigvuldiging is. Dan is $f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\cdots+a_nb_mx^{n+m}$, maar $a_nb_m\neq 0$, dus dit product kan onmogelijk 1 zijn. Dit is een strijdigheid met de veronderstelling dat $g(x)$ de multiplicatieve inverse van $f(x)$ was. Dit wil zeggen dat $f(x)$ geen invers element voor de vermenigvuldiging heeft in $\mathbb{R}[x]$.

Oefening 1.15. (B) Zij K een veld. Toon de volgende rekenregels aan. Maak hierbij enkel gebruik van de axioma's (K1)-(K9) en eventueel van rekenregels die je reeds bewezen hebt. Geef bij elke overgang aan welk axioma je gebruikt.

(a) Het neutraal element voor de optelling is uniek.
(b) Het neutraal element van de vermenigvuldiging is uniek.
(c) De inverse van een element in K voor de optelling is uniek. Het unieke inverse element van a voor de optelling noteren we als $-a$. We geven je hier een voorbeeldbewijs waarin je de ontbrekende stappen dient aan te vullen en je bij elke stap verklaart waarom deze geldig is. Maar hiervoor gebruik van axioma's (K1) t.e.m. (K9).

Bewijs. Zij a een willekeurig element van K. Onderstel dat $a + b = b + a = 0$ and $a + c = c + a = 0$ voor zekere $b, c \in K$. Te bewijzen: $b = c$. Er geldt

$$\begin{aligned}
b &= \underline{\hspace{3cm}} && \text{(reden: ______)}\\
&= b + (a + c) && \text{(reden: ______)}\\
&= \underline{\hspace{3cm}} && \text{(reden: (K1))}\\
&= \underline{\hspace{3cm}} && \text{(reden: bij onderstelling)}\\
&= c && \text{(reden: ______)}
\end{aligned}$$

□

(d) De inverse van een element in $K \setminus \{0\}$ voor de vermenigvuldiging is uniek. Het unieke inverse element van a voor de vermenigvuldiging noteren we als a^{-1} of $\frac{1}{a}$.
(e) Voor alle $a \in K$ geldt dat $a0 = 0$. We geven je hier een voorbeeldbewijs waarin je de ontbrekende stappen dient aan te vullen en je bij elke stap verklaart waarom deze geldig is. Maar hiervoor gebruik van axioma's (K1) t.e.m. (K9).

Bewijs. Zij a een willekeurig element van K.

$$\begin{aligned}
0 &= \underline{\hspace{3cm}} && \text{(reden: (K3))}\\
&= a(0 + 0) + (-a0) && \text{(reden: ______)}\\
&= (a0 + a0) + (-a0) && \text{(reden: ______)}\\
&= \underline{\hspace{4cm}} && \text{(reden: (K1))}\\
&= \underline{\hspace{2cm}} && \text{(reden: ______)}\\
&= a0 && \text{(reden: ______)}
\end{aligned}$$

□

(f) Voor alle $a \in K$ geldt dat $-(-a) = a$ en geldt er dat $(a^{-1})^{-1} = a$.
(g) Voor alle $a \in K$ is $-a = (-1)a$. Hierbij is -1 het inverse element van 1 voor de optelling. Gebruik makend hiervan, kunnen de volgend eigenschappen bewezen worden

$$-0 = 0, \qquad \forall a, b : (-a)b = -ab, \quad -(a + b) = -a - b, \quad (-a)(-b) = ab, \quad .$$

(h) Als $a, b \in K \setminus \{0\}$, dan is $ab \neq 0$.
(i) Voor alle $a, b \in K \setminus \{0\}$ is $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Oplossing 1.15.

(a) Veronderstel dat er twee verschillende neutrale elementen voor de optelling zijn, zeg 0 en $0'$. Wegens (K2) geldt er dan

$$\forall a \in K : a + 0 = a = 0 + a \quad \text{ en } \quad \forall a \in K : a + 0' = a = 0' + a$$

We passen de eerste eigenschap toe op $0'$ en de tweede op 0. We vinden dat $0' = 0' + 0$ en dat $0' + 0 = 0$, dus dat $0' = 0$, wat strijdig is met de veronderstelling dat 0 en $0'$ verschillend zijn. Twee verschillende neutrale elementen kunnen dus niet bestaan.
(b) De redenering voor het neutraal element voor de vermenigvuldiging is analoog. Werk dit zelf uit.

(c) *Bewijs.* Zij a een willekeurig element van K. Onderstel dat $a + b = b + a = 0$ en $a + c = c + a = 0$ voor zekere $b, c \in K$. Te bewijzen: $b = c$. Er geldt

$$\begin{aligned} b &= b + 0 && \text{(reden: (K2))} \\ &= b + (a + c) && \text{(reden: bij onderstelling)} \\ &= (b + a) + c && \text{(reden: (K1))} \\ &= 0 + c && \text{(reden: bij onderstelling)} \\ &= c && \text{(reden: (K2))} \end{aligned}$$

□

(d) De redenering is analoog aan deze in (c). Werk dit zelf uit.

(e) *Bewijs.* Zij a een willekeurig element van K.

$$\begin{aligned} 0 &= a0 + (-a0) && \text{(reden: (K3))} \\ &= a(0 + 0) + (-a0) && \text{(reden: (K2))} \\ &= (a0 + a0) + (-a0) && \text{(reden: (K9))} \\ &= a0 + (a0 + (-a0)) && \text{(reden: (K1))} \\ &= a0 + 0 && \text{(reden: (K3))} \\ &= a0 && \text{(reden: (K2))} \end{aligned}$$

□

(f) We moeten aantonen dat de inverse van de inverse van a opnieuw a zelf is. We weten dat $a+(-a) = 0$ via (K3) aangezien $-a$ de inverse is van a. Aangezien $-(-a)$ de inverse is van $-a$ geldt daarvoor dat $-(-a) + (-a) = 0$. De uniciteit van de inverse, bewezen in (c), leert ons dan onmiddellijk dat $-(-a) = a$.
Het tweede deel van de oefening is analoog. werk dit zelf uit.

(g) We tonen aan dat $a+(-1)a = 0$. Wegens de uniciteit van de inverse, bewezen in (c), mogen we hieruit besluiten dat $-a = (-1)a$. Deze gelijkheid volgt uit.

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0 \ .$$

De eerste overgang geldt dankzij (K6), de tweede dankzij (K9), de laatste dankzij (K3).

(h) We bewijzen dit via contrapositie, m.a.w. we tonen aan dat voor elementen $a, b \in K$ het volgende geldt: als $ab = 0$, dan $a = 0$ of $b = 0$. We nemen dus aan dat $ab = 0$. Als $a = 0$, volgt het gestelde onmiddellijk. Als $a \neq 0$, dan bestaat er een element a^{-1} via (K7). Er volgt dan dat $a^{-1}(ab) = a^{-1}0$. Via (K7) en (e) volgt hieruit dat $1b = 0$. Het gestelde volgt dan dankzij (K6).

(i) Oefening voor de lezer.

Oefening 1.16. (B) Ga na dat de volgende deelverzamelingen van de complexe getallen een veld vormen voor de optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen. We noemen deze velden *deelvelden* van $\mathbb{C}$.

(a) $K_1 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
(b) $K_2 = \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b, \in \mathbb{Q}\}$.
(c) $K_3 = \{\alpha + \beta\sqrt{-2} \mid \alpha, \beta \in K_1\}$.
(d) $K_4 = \{a + bi + c\sqrt{2} + d\sqrt{-2} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.
(e) $K_5 = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, met $\alpha \in \mathbb{C}$ een wortel van de vergelijking $x^2 + x + 1 = 0$.

Hint: bij (a) kun je (K7) bewijzen door gebruik te maken van het feit dat $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$ en het feit dat $a^2 - 2b^2$ gelijk is aan 0 als en slechts als $a = b = 0$, gezien 2 geen kwadraat is (dit geldt voor eender welk priemgetal p in plaats van 2).

Oplossing 1.16. We geven een algemene oplossing voor de 5 deelvelden.

Eerst en vooral moeten we de inwendigheid van beide bewerkingen in K_i controleren, m.a.w. dat $\forall a, b \in K_i$ geldt dat $a + b \in K_i$ en dat $ab \in K_i$. Daarna moeten we de 9 axioma's controleren. Echter, (K1), (K4), (K5), (K8) en (K9) zijn onmiddellijk voldaan omdat ze ook voldaan zijn in $\mathbb{C}$. Voor (K2) en (K6) volstaat het na te gaan dat 0 en 1 beide in K_i bevat zijn. Om (K3) en (K7) te controleren moeten we nagaan dat voor ieder element van K_i zijn inverse, die het sowieso heeft in $\mathbb{C}$, bevat is in K_i.

Zij $K \subset \mathbb{C}$, K een deelveld. Zij δ een element van K dat geen kwadraat is van een element in K. Zij $\sqrt{\delta}$ een wortel (in $\mathbb{C}$) van de veelterm $x^2 - \delta = 0$. We willen aantonen dat $L := \{a + b\sqrt{\delta} | a, b \in K\}$ een deelveld van $\mathbb{C}$ is. We controleren de vier hierboven vermelde eigenschappen voor de willekeurige elementen $a + b\sqrt{\delta}, c + d\sqrt{\delta} \in L$.

- $(a + b\sqrt{\delta}) + (c + d\sqrt{\delta}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{\delta} \in L$,
- $-(a + b\sqrt{\delta}) = -a + (-b)\sqrt{\delta} \in L$
- $(a + b\sqrt{\delta})(c + d\sqrt{\delta}) = (ac + bd\delta) + (ad + bc)\sqrt{d} \in L$,
- Als $a + b\sqrt{\delta} \neq 0$, dan is $a \neq 0$ of $b \neq 0$. In ieder geval is $a^2 - \delta b^2 \neq 0$, want het is gegeven dat δ geen kwadraat is van een element in K. We vinden dat $(a + b\sqrt{\delta})^{-1} = \frac{a - b\sqrt{\delta}}{a^2 - b^2\delta} \in L$.

Het is duidelijk dat oefeningen (a), (b) en (c) hieruit onmiddellijk volgen, met respectievelijk $\delta = 2$, $\delta = -2$ en $\delta = -2$. Ook (d) volgt hieruit, want $K_3 = K_4$:

$$\alpha + \beta\sqrt{-2} = a + b\sqrt{2} + (c + d\sqrt{2})\sqrt{-2} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{-2} + d\sqrt{-4} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{-2} + 2di \ ,$$

dus als α en β K_1 doorlopen, doorlopen a, b, c en $2d$ $\mathbb{Q}$. Tenslotte, voor (e) merken we op dat $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, dus

$$a + b\alpha = a + b\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = (a - \frac{b}{2}) + \frac{b}{2}\sqrt{-3} \ .$$

Dus is K_5 is gelijk aan $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$, en volgt het gestelde uit het bovenstaande.

Oefening 1.17. Toon aan dat de volgende deelverzamelingen geen deelvelden zijn.

(a) **(B)** $L_1 = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1\}$, geen deelveld van $\mathbb{C}$.
(b) **(T)** $L_2 = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, geen deelveld van $\mathbb{R}$.

Oplossing 1.17.

(a) L_1 is geen deelveld omdat $0 \notin L_1$, en dus is axioma (K2) niet voldaan. (Er zijn ook andere axioma's niet voldaan.)
(b) Eerst en vooral merken we op dat $\sqrt[3]{2}$ geen element is van $\mathbb{Q}$. Dit is niet triviaal; het volgt uit het feit dat natuurlijke getallen verschillend van 0 op een unieke manier te schrijven zijn als een product van priemgetallen. Het bewijs is analoog aan dat van de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ (in de cursus Analyse *I*). L_2 is geen deelveld van $\mathbb{C}$ omdat $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4} \notin L$. We tonen dit aan. Daartoe veronderstellen we dat $\sqrt[3]{4} \in L$ en leiden we hieruit een tegenstrijdigheid af. Als $\sqrt[3]{4} \in L$, dan $\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2}$ voor een bepaalde $a, b \in \mathbb{Q}$. Daaruit volgt

$$2 = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2}(a + b\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} = a\sqrt[3]{2} + b(a + b\sqrt[3]{2}) = ab + (a + b^2)\sqrt[3]{2} \ ,$$

dus $(ab - 2) + (a + b^2)\sqrt[3]{2} = 0$. Aangezien $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$, maar $ab - 2, a + b^2 \in \mathbb{Q}$, moet $2 = ab$ en $a + b^2 = 0$. Door de tweede vergelijking in de eerste te subsitueren, vinden we $2 = -b^3$. Dus moet $b = \sqrt[3]{-2}$, strijdig met de aanname dat $b \in \mathbb{Q}$ (net zoals $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ kunnen we ook aantonen dat $\sqrt[3]{-2} \notin \mathbb{Q}$).

Oefening 1.18. (T) In deze oefening werken we Voorbeeld 1.1.7(2) uit.

(a) Uit het delingsalgoritme volgt dat voor iedere $n \in \mathbb{Z}$ unieke getallen $q, r \in \mathbb{Z}$ met $0 \leqslant r \leqslant 4$ bestaan zodat $n = 5q + r$. We definieren $\mathrm{rest}(n) := r$, m.a.w de rest van n na deling door 5. Ga na dat voor alle $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathrm{rest}(n + m) &= \mathrm{rest}(\mathrm{rest}(n) + \mathrm{rest}(m)) \\ \mathrm{rest}(nm) &= \mathrm{rest}(\mathrm{rest}(n)\,\mathrm{rest}(m)) \ . \end{aligned}$$

Definieer, zoals in de cursus, de verzameling $\mathbb{F}_5$ als alle mogelijke resten van gehele getallen bij deling door 5. We noteren $\mathbb{F}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Definieer de optelling en vermenigvuldiging als volgt, voor alle $0 \leqslant n, m \leqslant 4$:

$$\overline{n} + \overline{m} := \overline{\text{rest}(n+m)}$$
$$\overline{n}\,\overline{m} := \overline{\text{rest}(nm)}\ .$$

Ga na dat $\mathbb{F}_5$ een veld is. Om axioma (K7) aan te tonen, stel je de vermenigvuldigingstabel van $\mathbb{F}_5$ op: je bepaalt het product ab voor alle $a, b \in \mathbb{F}_5$, en je zoekt voor ieder element verschillend van $\overline{0}$ het inverse. Ga na dat de karakteristiek[1] van $\mathbb{F}_5$ gelijk is aan 5.

(b) Doe het zelfde voor $\mathbb{F}_2$ met karakteristiek 2 en $\mathbb{F}_3$ met karakteristiek 3.

(c) Beschouw de verzameling van resten van gehele getallen na deling door 4, $\mathcal{A} := \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. Zoek elementen $a, b \in \mathcal{A} \setminus \{\overline{0}\}$ waarvoor $ab = \overline{0}$. Toon aan dat $\mathcal{A}$ geen veld is.

(d) Stel dat $n \in \mathbb{N}$ geen priemgetal is. Toon aan dat de verzameling van resten van gehele getallen na deling door n geen veld is.
Opmerking: Omgekeerd is voor ieder priemgetal p de verzameling $\mathbb{F}_p$ wel een veld. Dit bewijs valt buiten het raam van deze cursus. Het kan gevonden worden in de cursus van het vak 'Discrete Wiskunde I'.

Oplossing 1.18.

(a) Beschouw $n, m \in \mathbb{Z}$. Wegens het delingsalgoritme bestaan er $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r, r' \leqslant 4$ zodat $n = 5q + r$ en $m = 5q' + r'$. Dan volgt er dat

$$\begin{aligned}\text{rest}(n+m) &= \text{rest}(5q + r + 5q' + r') = \text{rest}(r + r') \\ &= \text{rest}(\text{rest}(5q+r) + \text{rest}(5q'+r')) = \text{rest}(\text{rest}(n) + \text{rest}(m))\ ,\end{aligned}$$

en dat

$$\begin{aligned}\text{rest}(nm) &= \text{rest}((5q+r)(5q'+r')) = \text{rest}(25qq' + 5'(qr' + q'r) + rr') = \text{rest}(rr') \\ &= \text{rest}(\text{rest}(5q+r)\,\text{rest}(5q'+r')) = \text{rest}(\text{rest}(n)\,\text{rest}(m))\ .\end{aligned}$$

We gaan nu na dat $\mathbb{F}_5$ een veld is. Eerst en vooral merken we op dat we daankzij het voorgaande weten dat de optelling en vermenigvuldiging binnen $\mathbb{F}_5$ goed gedefinieerd zijn. We moeten nu de negen axioma's nagaan. We bekijken er enkele en laten de rest over aan de lezer. Hierbij zijn $\overline{k}$, $\overline{m}$ en $\overline{n}$ elementen van $\mathbb{F}_5$.

(K1) Door toepassing van de definitie vinden we dat

$$(\overline{k} + \overline{m}) + \overline{n} = \overline{\text{rest}(k+m)} + \overline{n} = \overline{\text{rest}(\text{rest}(k+m) + n} = \overline{\text{rest}((k+m) + n}\ .$$

Analoog vinden we dat $\overline{k} + (\overline{m} + \overline{n}) = \overline{\text{rest}(k + (m+n)}$. Wegens de associativiteit in $\mathbb{Z}$ geldt er echter dat $(k+m)+n = k+(m+n)$, waardoor axioma (K1) volgt.

(K3) Het element $\overline{0}$ heeft zichzelf als inverse. We tonen aan dat de inverse van $\overline{n}$ gelijk is aan $\overline{5-n}$:

$$\overline{n} + \overline{5-n} = \overline{\text{rest}(n + (5-n))} = \overline{\text{rest}(5)} = \overline{0}\ .$$

(K7) De vermenigvuldigingstabel van $\mathbb{F}_5$ wordt gegeven door

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

[1] De karakteristiek van een veld K, genoteerd als char(K), is het kleinste positieve getal n waarvoor $n \cdot 1 = 1 + \cdots + 1 = 0$. Indien zo'n n niet bestaan, stellen we char$(K) = 0$.

De inverses voor de vermenigvuldiging zijn dus $\overline{1}^{-1} = \overline{1}$, $\overline{2}^{-1} = \overline{3}$, $\overline{3}^{-1} = \overline{2}$ en $\overline{4}^{-1} = \overline{4}$.

(K8) Er geldt dat $\overline{mn} = \overline{\text{rest}(mn)} = \overline{\text{rest}(nm)} = \overline{nm}$ door toepassing van de definitie en van de commutativiteit in $\mathbb{Z}$.

Het is duidelijk dat $\text{rest}(5) = 0$, zodat $5 \cdot \overline{1} = \overline{0}$. Voor alle $0 < k < 5$ daarentegen is $\text{rest}(k) \neq 0$, zodat $k \cdot \overline{1} \neq \overline{0}$. Dus is $\text{char}(\mathbb{F}_5) = 5$.

(b) Analoog aan (a), oefening voor de lezer.

(c) Het is duidelijk dat $\overline{2}.\overline{2} = \overline{0}$. Uit Oefening 1.15(h) volgt dan onmiddellijk dat $\mathcal{A}$ geen veld is.

(d) Aangezien n geen priemgetal is, bestaan er $p, q \in \mathbb{N}$, met $1 < p, q < n$, zodat $n = pq$. De verzameling van resten $\mathcal{A} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ bevat dan $\overline{p}$ en $\overline{q}$. Er geldt duidelijk dat $\overline{pq} = \overline{0}$. Uit Oefening 1.15(h) volgt dan onmiddellijk dat $\mathcal{A}$ geen veld is.

1.3 Matrices

Oefening 1.19. (D) Zij $A \in M_n(K)$. Toon dan aan dat A symmetrisch is als en slechts als $A^t = A$.

Oplossing 1.19. Per definitie is $A = (a_{ij})$ symmetrisch als en slechts als $a_{ij} = a_{ji}$ voor alle i en j. Verder is $A^t = (b_{k\ell})$, met $b_{ji} = a_{ij}$ voor alle i en j.
Als A symmetrisch is, is $A^t = (b_{k\ell}) = (a_{\ell k}) = (a_{k\ell}) = A$, waarbij we in de voorlaatste gelijkheid gebruik gemaakt hebben van de veronderstelling dat A symmetrisch is.
Omgekeerd, als $A^t = A$, is dus $(b_{k\ell}) = (a_{k\ell})$, dus $b_{k\ell} = a_{k\ell}$ voor alle k en ℓ. Maar per definitie van de getransponeerde is $b_{k\ell} = a_{\ell k}$, dus $a_{k\ell} = a_{\ell k}$ voor alle k en ℓ.

Oefening 1.20. Toon de volgende rekenregels voor matrices aan.

(a) **(B)** Zij $A, B \in M_{r,s}$, dan is $(A + B)^t = A^t + B^t$.

(b) **(T)** Zij $A \in M_{r,s}$ en $B \in M_{s,t}$, dan is $(AB)^t = B^t A^t$.

Oplossing 1.20.

(a) Werk dit zelf uit.

(b) Stel $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s}$ en $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant t}$. Noteer verder

$$A^t = (a'_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant r} \qquad B^t = (b'_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant t, 1 \leqslant j \leqslant s} \qquad \text{met dus } a'_{ji} = a_{ij} \text{ en } b'_{ji} = b_{ij}.$$

Als we $B^t A^t = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant t, 1 \leqslant j \leqslant r}$ noteren, dan is, per definitie van matrixvermenigvuldiging,

$$c_{ij} = \sum_{n=1}^{s} b'_{in} a'_{nj} = \sum_{n=1}^{s} b_{ni} a_{jn} \qquad \text{voor } 1 \leqslant i \leqslant t \text{ en } 1 \leqslant j \leqslant r.$$

Noteer nu $AB = (d_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant t}$ en $(AB)^t = (d'_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant t, 1 \leqslant j \leqslant r}$, dus met $d'_{ij} = d_{ji}$. Dan is

$$d'_{ij} = d_{ji} = \sum_{n=1}^{s} a_{jn} b_{ni} = \sum_{n=1}^{s} b_{ni} a_{jn} \qquad \text{voor } 1 \leqslant i \leqslant t \text{ en } 1 \leqslant j \leqslant r.$$

We vinden dus dat

$$c_{ij} = \sum_{n=1}^{s} b_{ni} a_{jn} = \sum_{n=1}^{s} a_{jn} b_{ni} = d'_{ij} \ ,$$

dus $(AB)^t = (d'_{ij}) = (c_{ij}) = B^t A^t$.

Oefening 1.21. (B) Zij $A \in M_{n,m}(K)$. Toon dan aan, gebruik makend van voorgaande oefeningen, dat $A^t A$ symmetrisch is.

Oplossing 1.21. Uit Oefening 1.20(b) halen we dat $(A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A$, dus $A^t A$ is symmetrisch.

Oefening 1.22. Toon de volgende rekenregels voor matrices aan.

(a) **(B)** Zij $A, B \in \mathsf{GL}_n(K)$, dan is $(A^{-1})^{-1} = A$ en $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(b) **(T)** Voor alle $A \in \mathsf{GL}_n(K)$ is $A^t \in \mathsf{GL}_n(K)$ met $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Oplossing 1.22.

(a) Er geldt $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$, dus per definitie is $(A^{-1})^{-1} = A$. Gelijkaardig is $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$, dus $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, waarbij we gebruik maken van de associativiteit van de vermenigvuldiging van matrices.
(b) Gebruik makend van een vorige oefening is $I_n = (AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t$ en $I_n = (A^{-1}A)^t = A^t(A^{-1})^t$, dus inderdaad, $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Oefening 1.23. (T) Beschouw een inverteerbare matrix $A \in M_n(K)$, en veronderstel dat er matrices $B, C \in M_n(K)$ bestaan waarvoor $BA = AB = I_n$ en $AC = CA = I_n$. Toon aan dat $B = C$. Hieruit volgt dat de inverse van een matrix uniek is.

Oplossing 1.23. We maken gebruik van de associativiteit van de matrixvermenigvuldiging (zie Lemma 1.3.6) en vinden

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C\ .$$

Merk op dat we eigenlijk enkel gebruikt hebben dat $BA = I_n = AC$, dus dat B een *linkse inverse* is voor A, en C een *rechtse inverse* voor A.

Oefening 1.24. (B) Zij $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Bepaal van elk van de volgende uitspraken of ze waar of vals is. Indien waar, bewijs, en indien vals, geef een tegenvoorbeeld.

(a) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.
(b) $(AB)^2 = A^2B^2$.
(c) Als A en B symmetrisch zijn, dan is AB symmetrisch.
(d) Als A en B symmetrisch zijn, dan is ABA symmetrisch.

Oplossing 1.24.

(a) We hebben $(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2$, dus de gelijkheid is vals. We krijgen een tegenvoorbeeld voor elke A en B waarvoor $AB \neq BA$.
(b) Analoog aan de voorgaande opgave.
(c) De veronderstelling is dat $A^t = A$ en $B^t = B$. Met Oefening 1.20 vinden we dat $(AB)^t = B^tA^t = BA$, dus AB is symmetrisch als en slechts als $AB = (AB)^t = BA$. De uitspraak is opnieuw vals, met een tegenvoorbeeld zodra $AB \neq BA$.
(d) Deze uitspraak is waar. M.b.v. Oefening 1.20 vinden we $(ABA)^t = A^t(AB)^t = A^tB^tA^t = ABA$.