Lineaire Algebra en Meetkunde I
Oefeningen

1$^{\text{e}}$ bachelor wiskunde

Heb je vragen? Stuur gerust een mail of kom langs!

Lins Denaux
lins.denaux@ugent.be
De Sterre, gebouw S8, bureau 130.015 (routebeschrijving)

Deze bundel bevat alle oefeningen voor het vak Lineaire Algebra en Meetkunde I voor studenten 1$^{\text{e}}$ bachelor wiskunde. Zorg dat je ze elke oefeningenles meebrengt! De oefeningen worden gemarkeerd met een letter, naargelang het aantal en het type stappen dat nodig zijn om tot een oplossing te komen. Ruwweg betekenen deze het volgende.

(D) **D**efinitie: een oefening die je kan oplossen door definities toe te passen.

(B) **B**asis: deze oefening kan je doorgaans in één stap oplossen, gebruik makend van een definitie, rekentechniek, eigenschap (die eerder aan bod gekomen kan zijn),...

(T) **T**ussenstappen: bij deze oefening moet je via één of enkele tussenstappen of tussenresultaten tot de oplossing komen. Je combineert dus definities, rekentechnieken, eigenschappen,...

(U) **U**itdaging: een uitdagende oefening waarbij je wat creativiteit nodig hebt om tot een oplossing te komen, van een niveau dat niet verwacht wordt op het examen.

Oefeningen op hoofdstuk 2

Vectorruimten

2.1 (Deel)vectorruimten

Oefening 2.1. (D) Toon aan dat $V = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ een vectorruimte is over $\mathbb{Q}$ (waarbij de optelling in V de optelling in $\mathbb{R}$ is, en de scalaire vermenigvuldiging van elementen van $\mathbb{Q}$ en V de vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$ is).

Oplossing 2.1. We gaan de axioma's van een vectorruimte na.

Eerst controleren we dat V een abelse groep is voor de optelling (axioma's (V1)-(V4)). Aangezien $V \subset \mathbb{R}$, moeten we enkel nagaan dat het neutraal element in V is bevat, dat voor ieder element in V, zijn inverse ook in V is bevat en dat voor twee elementen in V hun som ook in V is bevat. Het eerste is onmiddellijk duidelijk ($a = 0 = b$). Aangezien voor een willekeurig element $a+b\sqrt[3]{2} \in V$, $a, b \in \mathbb{Q}$, ook $-a-b\sqrt[3]{2} \in V$, is de tweede eis ook voldaan. Als $a+b\sqrt[3]{2}, c+d\sqrt[3]{2} \in V$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, dan is ook $(a+b\sqrt[3]{2})+(c+d\sqrt[3]{2}) = (a+c)+(b+d)\sqrt[3]{2}$ een element van V. De derde eis is dus ook voldaan.

Het axioma (V5) is onmiddellijk voldaan dankzij de associativiteit van de vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$. Het axioma (V6) is onmiddellijk voldaan omdat 1 het neutraal element is voor de vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$. Het axioma (V7) volgt uit de distributiviteit in $\mathbb{R}$.

Oefening 2.2. (B) We noteren het neutraal element van de optelling in K met 0_K en het neutraal element van de optelling in V met 0_V. Toon aan dat in een K-vectorruimte V de volgende rekenregels gelden.
Hint: veel van deze regels bewijs je analoog aan die van Oefening 1.15

(a) Het neutraal element voor de optelling in V is uniek.
(b) Het tegengestelde van een element in V voor de optelling in V is uniek.
(c) Voor alle $\lambda \in K$ is $\lambda 0_V = 0_V$.
(d) Voor alle $v \in V$ is $0_K v = 0_V$. Deze regel maakt het mogelijk het nulelement 0_K in K op dezelfde manier te noteren als het nulelement 0_V in V.
(e) Voor alle $v \in V$ is $-(-v) = v$.
(f) Voor alle $v \in V$ is $(-1)v = -v$, hieruit volgt dat voor alle $v \in V$ en $\lambda \in K$ geldt dat

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v), \lambda v = (-\lambda)(-v), -(v + w) = -v - w, \lambda(v - w) = \lambda v - \lambda w\ .$$

(g) Voor alle $v \in V$ en $\lambda \in K$ volgt uit $\lambda v = 0$ dat $\lambda = 0$ of dat $v = 0$.

Oplossing 2.2. Al deze oplossingen zijn analoog aan de oplossingen voor de analoge problemen over velden (zie Oefening 1.15). We geven daarom slechts van één opgave een uitgewerkte oplossing.

(d) Aangezien K een veld is 0_K het neutrale element voor de optelling in K is, geldt er dat $(0_K + 0_K)v = 0_K v$, voor alle $v \in V$. Dankzij het zevende axioma van de vectorruimten weten we dat $(0_K + 0_K)v = 0_K v + 0_K v$. Er volgt dat $0_K v = 0_K v + 0_K v$. Voor $0_K v \in V$ bestaat er een invers element voor de optelling in V, $-0_K v$. Bijgevolg is $0_V = 0_K v - 0_K v = 0_K v + 0_K v - 0_K v = 0_K v$.

Oefening 2.3. (B) Ga na of volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ al dan niet een deelvectorruimte van $\mathbb{R}^2$ vormen:

(a) $U_1 = \{(x, y)^t \mid x = y,\ x, y \in \mathbb{R}\}$,
(b) $U_2 = \{(x, y)^t \mid x = 3y,\ x, y \in \mathbb{R}\}$,
(c) $U_3 = \{(x, y)^t \mid xy = 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$,
(d) $U_4 = \{(x, y)^t \mid xy = 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$,
(e) $U_5 = \{(x, y)^t \mid x + y = 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$,
(f) $U_6 = \{(x, y)^t \mid x + y = 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

Oplossing 2.3. We werken slechts twee van de opgaves uit. Voor de andere opgaves kan de oplossing analoog gevonden worden. We geven hier enkel het resultaat.

(a) Deelvectorruimte.
(b) We passen het criterium voor deelruimtes (Lemma 2.1.7) toe. Beschouw twee willekeurige elementen $(3x_1, x_1)^t$ en $(3x_2, x_2)^t$ in U_2, en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Er geldt dat

$$\lambda \begin{pmatrix} 3x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda x_1 + 3\mu x_2 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ \lambda x_1 + \mu x_2 \end{pmatrix}$$

Een willekeurige lineaire combinatie van twee elementen in U_2 is dus opnieuw bevat in U_2. Bijgevolg is U_2 een deelvectorruimte.
(c) We tonen aan dat U_3 geen deelvectorruimte is, gebruik makend van het criterium voor deelruimtes. Het is duidelijk dat $(0, 1)^t, (1, 0)^t \in U_3$. Het is echter ook duidelijk dat $(0, 1)^t + (1, 0)^t = (1, 1)^t \notin U_3$. Dus kan U_3 geen deelruimte zijn.
(d) Geen deelvectorruimte.
(e) Geen deelvectorruimte.
(f) Deelvectorruimte.

Oefening 2.4. (B) Beschouw $\mathbb{R}_{>0} = \{r \in \mathbb{R} | r > 0\}$. Toon aan dat de vermenigvuldiging van reële getallen op $\mathbb{R}_{>0}$ de structuur van een abelse groep definieert.

Definieer op $\mathbb{R}_{>0}$ de volgende 'vermenigvuldiging' met scalairen uit het veld van de rationale getallen $\mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}, q \in \mathbb{Q}$: $q \star r := r^q$. Toon aan dat de abelse groep $\mathbb{R}_{>0}$ met deze scalaire vermenigvuldiging een $\mathbb{Q}$-vectorruimte vormt.

Oplossing 2.4. We tonen eerst aan dat $\mathbb{R}_{>0}$ voor de vermenigvuldiging van de reële getallen een abelse groep definieert (axioma's (V1)-(V4)). We merken op dat $1 \in \mathbb{R}_{>0}$, dat voor alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat $ab \in \mathbb{R}_{>0}$ (m.a.w. dat het product van twee positieve reële getallen weer positief is) en dat voor alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat $a^{-1} \in \mathbb{R}_{>0}$ (m.a.w. dat de inverse voor de vermenigvuldiging van een positief getal ook een positief getal is). Aangezien $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ een abelse groep is voor de vermenigvuldiging, volstaan deze opmerkingen om te concluderen dat $\mathbb{R}_{>0}$ een abelse groep is voor de vermenigvuldiging van de reële getallen.

We gaan nu de drie andere axioma's voor een vectorruimte na. Hierbij zijn a en b willekeurige elementen in $\mathbb{R}_{>0}$, en zijn λ en μ willekeurige elementen in $\mathbb{Q}$. Uit

$$\lambda \star (\mu \star a) = \lambda \star a^\mu = (a^\mu)^\lambda = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \star a$$

volgt axioma (V5). Uit $1 \star a = a^1 = a$ volgt axioma (V6). Axioma (V7) volgt uit

$$(\lambda + \mu) \star a = a^{\lambda+\mu} = a^\lambda a^\mu = (\lambda \star a)(\mu \star a)$$
$$\lambda \star (ab) = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda = (\lambda \star a)(\lambda \star b)\ .$$

Oefening 2.5. (T) We definiëren op $\mathbb{R}$ een optelling $+'$ en een scalaire vermenigvuldiging $\cdot'$ als volgt:

$$x +' y = \max\{x, y\} \qquad \text{voor alle } x, y \in \mathbb{R}.$$
$$\alpha \cdot' x = \alpha x \qquad \text{voor alle } \alpha \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \text{ en } x \in \mathbb{R}.$$

Ga na of $(\mathbb{R}, +', \cdot')$ een $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$-vectorruimte is. Indien niet, bepaal de axioma's die niet gelden.

Oplossing 2.5. De scalaire vermenigvuldiging is de gewone vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$, dus de geldigheid van de axioma's die enkel betrekking hebben op $\cdot'$ is eenvoudig in te zien. We beschouwen nu de overige axioma's. Voor axioma (V1) moeten we nagaan dat voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt dat $(x+'y)+'z = x+'(y+'z)$. Dit is equivalent met

$$\max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, \max\{y, z\}\}.$$

Dat deze gelijkheid geldt is in te zien door de mogelijkheden na te gaan die het linkerlid kan aannemen. Opdat er een neutraal element voor $+'$ zou bestaan zou er een element $N \in \mathbb{R}$ moeten zijn zodat $\max\{x, N\} = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. De verzameling $\mathbb{R}$ heeft echter geen kleinste element. Dit betekent dat (V2) niet geldt, waardoor eveneens (V3) niet kan gelden. Door de symmetrie van x en y in de definitie van $+'$ is het duidelijk dat (V4) wel geldt. Rest ons nog (V7) te controleren. Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ (deze doen dienst als scalairen, dus de optelling is de gewone optelling) en $x, y \in \mathbb{R}$ (als vectoren), dan is $(\alpha + \beta) \cdot' x = (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, terwijl $\alpha \cdot' x +' \beta' x = \max\{\alpha x, \beta x\}$. Dit laatste is $\alpha \cdot' x$ *of* $\beta \cdot' x$, waaruit volgt dat de rechtse distributiviteit niet geldig is, de linkse echter wel:

$$\alpha \cdot' (x +' y) = \alpha \max\{x, y\} = \max\{\alpha x, \alpha y\} = \alpha \cdot' x +' \alpha \cdot' y.$$

Oefening 2.6. (B) Zij $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(K)$ een vierkante matrix over een veld K. Het spoor van A, genoteerd als $\mathrm{tr}(A)$ (Engels: trace), is de som van de diagonaalelementen van A:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Toon aan dat de verzameling van $(n \times n)$-matrices over K met spoor nul een deelruimte vormen van de vectorruimte $M_n(K)$. Deze deelruimte noteert men met $sl_n(K)$.

Oplossing 2.6. Beschouw twee willekeurige $(n \times n)$-matrices over K met spoor nul: $A, B \in M_n(K)$ met $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = 0$. Noteer $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$. Voor $\lambda, \mu \in K$ geldt er dan dat $\lambda A + \mu B \in M_n(K)$, met $(\lambda A + \mu B)_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$. Bijgevolg,

$$\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A + \mu B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii} + \mu b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda\, \mathrm{tr}(A) + \mu\, \mathrm{tr}(B) = 0\ .$$

Het spoor van een willekeurige lineare combinatie van A en B is dus gelijk aan 0. De deelverzameling van $M_n(K)$ bestaande uit matrices met spoor nul, is dan een deelruimte wegens het criterium van deelruimtes.

Oefening 2.7. (B) Ga na of volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}[x]$ al dan niet een deelvectorruimte van $\mathbb{R}[x]$ vormen:

(a) $W_1 = \{ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$,
(b) $W_2 = \{a + x^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$,
(c) $W_3 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p(x) = 3\}$,
(d) $W_4 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 0\}$,
(e) $W_5 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 1\}$,
(f) $W_6 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \forall a \in \mathbb{R} : p(a) \geqslant 0\}$.

Oplossing 2.7. We passen wederom het criterium voor deelruimten toe om na te gaan of de gegeven deelverzamelingen deelruimten vormen. Merk op dat het een nodige voorwaarde is dat het neutraal element tot de deelverzameling behoort. Het neutraal element in de vectorruimte van de reële polynomen (waarvan alle W_i deelverzamelingen zijn), is de polynoom waarvoor alle coëfficiënten 0 zijn. We werken niet alle puntjes uit.

(a) Deelruimte: $\forall a, b \in \mathbb{R} : ax^2, bx^2 \in W_1$ en $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda ax^2 + \mu bx^2 = (\lambda a + \mu b)x^2 \in W_1$.
(b) Geen deelruimte: $0 \notin W_2$, want de coëfficiënt bij x^2 is steeds 1.
(c) Geen deelruimte : $0 \notin W_3$, want $\deg 0 = 0$.
(d) Deelruimte.
(e) Geen deelruimte.

(f) Geen deelruimte. Neem bijvoorbeeld $x^2 \in W_6$, dan is $(-1)x^2 = -x^2 \notin W_6$.

Oefening 2.8. (B) Zij V een K-vectorruimte, K een veld.

(a) Beschouw de deelruimten U en W van V. Is $U \cup W$ een deelruimte van V? Is $U \cap W$ een deelruimte van V?
(b) Beschouw n deelruimten $U_1, \ldots, U_n$ van V. Is $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ een deelruimte van V?
(c) Beschouw $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{U_1, U_2, U_3, \ldots\}$ een oneindige familie deelruimten van V. Is $\cap_{i\in\mathbb{N}} U_i = U_1 \cap U_2 \cap \ldots$, de doorsnede van al deze deelruimten, een deelruimte van V?

Oplossing 2.8.

(a) We tonen eerst aan de doorsnede $U \cap W$ een deelruimte is. Beschouw $u, v \in U \cap W$. Aangezien U een deelruimte is, en $u, v \in U$, geldt er dat $\lambda u + \mu v \in U$ voor alle $\lambda, \mu \in V$. Analoog geldt er dat $\lambda u + \mu v \in U$. Bijgevolg is $\lambda u + \mu v \in U \cap V$. Hieruit volgt onmiddellijk dat $U \cap V$ een deelruimte is. Nu tonen we aan dat de unie van twee deelruimten niet noodzakelijk een deelruimte is. Beschouw de deelruimten U_1 en U_2 uit Oefening 2.3 en de vectoren $(1,1) \in U_1$ en $(3,1) \in U_2$. Dan is $(1,1)+(3,1) = (4,2)$ noch in U_1, noch in U_2 bevat, en dus ook niet in $U_1 \cup U_2$. Dit tegenvoorbeeld toont aan dat $U \cup V$ niet in het algemeen een deelruimte kan zijn als U en V dat zijn.
(b) Pas de redenering uit het eerste puntje toe. (Werk dit zelf verder uit.)
(c) Pas de redenering uit het eerste puntje toe. (Werk dit zelf verder uit.)

Oefening 2.9. (T) De volgende drie verzamelingen zijn deelruimten van $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ r \\ s \end{pmatrix} \middle| r, s \in \mathbb{R} \right\},\ U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} r+s \\ r-s \\ r \end{pmatrix} \middle| r, s \in \mathbb{R} \right\},\ U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ r+s \end{pmatrix} \middle| r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bepaal voor elk paar van deze deelruimten de doorsnede.

Oplossing 2.9.

$\boxed{U_1 \cap U_2}$ Een vector $(x,y,z)^t$ zit in $U_1 \cap U_2$ als en slechts als er zowel $r, s \in \mathbb{R}$ bestaan met $x = y = r, z = s$, en r', s' waarvoor $x = r' + s', y = r' - s', z = r'$. We zoeken dus een oplossing voor het stelsel

$$\begin{cases} r = r' + s' \\ r = r' - s' \\ s = r' \end{cases} \iff \begin{cases} r - r' - s' = 0 \\ r - r' + s' = 0 \\ s - r' = 0 \end{cases}$$

De oplossingen van dit stelsel zijn $\{(p,p,p,0)^t \mid p \in \mathbb{R}\}$. De vectoren in de doorsnede zijn dus van de vorm $(r,r,s)^t$ voor $r = s = p \in \mathbb{R}$, of equivalent $(r'+s', r'-s', r')^t$ voor $r' = p, s' = 0$ met $p \in \mathbb{R}$. We vinden in beide gevallen dus

$$U_1 \cap U_2 = \{(p,p,p)^t \mid p \in \mathbb{R}\}.$$

$\boxed{U_1 \cap U_3}$ Analoog is $(x,y,z)^t = (r,r,s)^t = (r', s', r'+s')^t$ voor $r, s, r', s' \in \mathbb{R}$. Oplossen van het stelsel in r, s, r', s' geeft $(r, s, r', s')^t = (p, 2p, p, p)^t$ voor $p \in \mathbb{R}$. We vinden dus

$$U_1 \cap U_3 = \{(p,p,2p)^t \mid p \in \mathbb{R}\}.$$

$\boxed{U_2 \cap U_3}$ Analoog is $(x,y,z)^t = (r+s, r-s, r)^t = (r', s', r'+s')^t$ voor $r, s, r', s' \in \mathbb{R}$. Oplossen van het stelsel in r, s, r', s' geeft $(r, s, r', s')^t = (0, -p, -p, p)^t$ voor $p \in \mathbb{R}$. We vinden dus

$$U_2 \cap U_3 = \{(-p,p,0)^t \mid p \in \mathbb{R}\}.$$

Oefening 2.10. (T) Beschouw een veld K.

(a) Beschouw $a_1, \ldots, a_n \in K$. Is $\{(x_1, \ldots, x_n)^t \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = 1\}$ een deelruimte van K^n?
(b) Veronderstel $K = \mathbb{C}$. Is $\{(x_1, \ldots, x_n)^t \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0\}$ een deelruimte van K^n? Beantwoord dezelfde vraag ook voor $K = \mathbb{R}$ en voor $K = \mathbb{F}_2$ (*).

Oplossing 2.10.

(a) We moeten nagaan of $U = \{(x_1, \ldots, x_n)^t \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = 1\}$ een deelruimte van K^n is. Veronderstel dat $(x_1, \ldots, x_n)^t, (y_1, \ldots, y_n)^t \in U$, m.a.w. dat $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 1$ en dat $\sum_{i=1}^n a_i y_i = 1$. We gaan nu na of $\lambda(x_1, \ldots, x_n)^t + \mu(y_1, \ldots, y_n)^t = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)$ ook bevat is in U, voor willekeurige $\lambda, \mu \in K$. We stellen vast dat

$$\sum_{i=1}^n a_i(\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i x_i + \mu \sum_{i=1}^n a_i y_i = \lambda.1 + \mu.1 = \lambda + \mu\ .$$

Wanneer we μ verschillend van $1 - \lambda$ kiezen, vinden we dus een tegenvoorbeeld. U is dan geen deelruimte.

(b) We bekijken eerst het geval $K = \mathbb{C}$. We moeten nagaan of $U = \{(x_1, \ldots, x_n)^t \mid x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0\}$ een deelruimte van $\mathbb{C}^n$ is. Als $n = 1$, bevat U enkel de nulvector (0). Dit is de triviale deelruimte, en dus een deelruimte. Als $n \geqslant 2$, bevat U de vectoren $(1, i, 0, \ldots, 0)$ en $(1, -i, 0, \ldots, 0)$. Hun som is $(2, 0, 0, \ldots, 0)$, maar deze vector is niet bevat in U. U kan dus geen deelruimte zijn. Conclusie: de voorwaarde $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ bepaalt enkel een deelruimte als $n = 1$.
Nu bekijken we het geval $K = \mathbb{R}$. Aangezien alle kwadraten in $\mathbb{R}$ positieve getallen zijn en het enige getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 0, het getal 0 zelf is, is de enige vector $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ die aan $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ voldoet de vector $(0, \ldots, 0)$. De verzameling $\{(x_1, \ldots, x_n)^t \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0\}$ is dus de triviale deelruimte, en dus een deelruimte.
Tot slot bekijken we het geval $K = \mathbb{F}_2$. Merk op dat $\overline{0}^2 = \overline{0}$, $\overline{1}^2 = \overline{1}$ en $\mathbb{F}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Dus is voor alle $x \in \mathbb{F}_2$ de uitdrukking $x^2 = x$ waar. De voorwaarde reduceert zich in dit geval dus tot $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Ga zelf na dat we in dit geval wel een deelruimte vinden.
(*) Voor $K = \mathbb{F}_2$ kunnen we ook gewoon gebruik maken van het criterium voor deelruimten. Noteer $U = \{(x_1, \ldots, x_n)^t \mid x_i \in \mathbb{F}_2, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0\}$ en veronderstel dat $(x_1, \ldots, x_n)^t, (y_1, \ldots, y_n)^t \in U$. Beschouw willekeurige $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_2$. Bekijk de lineaire combinatie $\lambda(x_1, \ldots, x_n)^t + \mu(y_1, \ldots, y_n)^t = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)$. Er geldt dat

$$\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\lambda\mu \sum_{i=1}^n x_i y_i + \mu^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 = 2\lambda\mu \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0\ .$$

In de laatste stap hebben we gebruik gemaakt van de eigenschappen van de constructie van $\mathbb{F}_2$: het getal 2 is vervangen door zijn rest bij deling door 2.

2.2 Lineaire (on)afhankelijkeid

Oefening 2.11. (D) Zij u, v, w drie elementen van $\mathbb{R}^3$. Is het stel $\{u, v, w\}$ lineair onafhankelijk? Indien nee: hoeveel van deze vectoren moet je weglaten voor je wel een lineair onafhankelijke verzameling krijgt?

(a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(e) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(f) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$

Oplossing 2.11.

(a) Onderstel dat $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ voor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Dat wil zeggen dat $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^t = (0, 0, 0)^t$, dus $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Bijgevolg is het stel $\{u, v, w\}$ lineair onafhankelijk.

(b) We zien dat $u = -2v$, dus $u + 2v + 0w = 0$, een niet-triviale lineaire combinatie. Bijgevolg is $\{u, v, w\}$ hier lineair afhankelijk. We kunnen u of v weglaten om een lineair onafhankelijke verzameling te krijgen

(c) Beschouw een lineaire combinatie $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Er geldt dat

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Bijgevolg zijn u, v en w lineair onafhankelijk.

(d) Het is duidelijk dat $u = -v$ en dat $2u = w$. De vectoren u, v en w zijn dus duidelijk lineair afhankelijk. Elke lineaire combinatie van u, v en w is ook een veelvoud van u. We moeten dus twee vectoren weglaten om een lineaur onafhankelijk stel te bekomen.

(e) We zien dat $u = v + w$, dus $u - v - w = 0$, een niet-triviale lineaire combinatie. Bijgevolg is $\{u, v, w\}$ hier lineair afhankelijk. Elke verzameling met twee van deze vectoren is lineair onafhankelijk.

(f) Beschouw een lineaire combinatie $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Er geldt dat

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 10\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

We vinden dus een stelsel in de variabelen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. De uitgebreide matrix is

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 \end{array} \right) .$$

Na toepassing van het rijreductiealgoritme vinden we dat de enige oplossing $(0, 0, 0)$ is. Daaruit volgt dan dat u, v en w lineair onafhankelijk zijn.

Oefening 2.12. (B) Voor welke waarden van $a \in \mathbb{Q}$ zijn de volgende 3 vectoren in $\mathbb{Q}^3$ lineair afhankelijk:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ?$$

Oplossing 2.12. Deze drie vectoren zijn lineair afhankelijk als er $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, niet allemaal 0, bestaan zodat

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + a\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 \\ a\lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

met andere woorden als het stelsel

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ a\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

een oplossing verschillend van $(0, 0, 0)$ heeft. Door toepassing van het rijreductiealgoritme vinden we dat dit enkel het geval is als $a = 0$.

Oefening 2.13. (B) Zij $\lambda \in \mathbb{R}$, beschouw de volgende elementen van $\mathbb{R}^5$

$$a = (\lambda, 0, 0, 1, 1)^t, b = (1, \lambda, 0, 1, 1)^t, c = (1, 1, \lambda, 1, 1 + \lambda)^t, d = (1, 1, -1, 1, 0)^t .$$

(a) Voor welke waarden van λ is het stel $\{a, b, c, d\}$ lineair onafhankelijk?

(b) Voor welke waarden van λ is b een lineaire combinatie van het stel $\{a, c, d\}$?

Oplossing 2.13.

(a) Net als in Oefening 2.12, kunnen we het probleem herleiden tot een stelsel, waarop we dan vervolgens het rijreductiealgoritme kunnen toepassen. We kunnen immers het probleem als volgt herformuleren: voor welke waarden van λ heeft het stelsel

$$\mu_1(\lambda,0,0,1,1)^t+\mu_2(1,\lambda,0,1,1)^t+\mu_3(1,1,\lambda,1,1+\lambda)^t+\mu_4(1,1,-1,1,0)^t=(0,0,0,0,0)^t\ ,$$

met $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4\in\mathbb{R}$ onbekenden, enkel de nuloplossing (wat equivalent is met het lineair onafhankelijk) of oplossingen verschillend van de nuloplossing (indien de vectoren lineair afhankelijk zijn). Dit herleidt zich tot de bespreking van het stelsel

$$\begin{cases}\lambda\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=0\\ \lambda\mu_2+\mu_3+\mu_4=0\\ \lambda\mu_3-\mu_4=0\\ \mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=0\\ \mu_1+\mu_2+(1+\lambda)\mu_3=0.\end{cases}$$

met als uitgebreide matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\lambda&1&1&1&0\\0&\lambda&1&1&0\\0&0&\lambda&-1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1+\lambda&0&0\end{array}\right).$$

Met behulp van het rijreductiealgoritme vinden we dat dit stelsel enkel de nuloplossing als oplossing heeft, m.a.w. dat het stel $\{a,b,c,d\}$ lineair onafhankelijk is, als en slechts als $\lambda\notin\{-1,1\}$.

(b) Als $\lambda\notin\{-1,1\}$ is het stel $\{a,b,c,d\}$ lineair onafhankelijk en dus is b ook niet lineair afhankelijk van $\{a,c,d\}$. Als $\lambda=1$, volgt uit het rijreductiealgoritme dat de oplossingsverzameling van het stelsel $\{(0,-2s,s,s)^t\mid s\in\mathbb{Q}\}$ is. Dus is $2b=c+d$; in dit geval is b wel lineair afhankelijk van $\{a,c,d\}$. Als $\lambda=-1$, volgt uit het rijreductiealgoritme dat de oplossingsverzameling van het stelsel $\{(0,0,s,-s)^t\mid s\in\mathbb{Q}\}$ is. In dit geval is b lineair onafhankelijk van $\{a,c,d\}$.

Oefening 2.14. (T) Beschouw een lineair onafhankelijk stel $\{a,b,c\}$ in een vectorruimte V over $\mathbb{C}$. Welke van de volgende stellen zijn lineair onafhankelijk?

(a) $\{a+b+c,a+2b,c-b\}$
(b) $\{a+2b,c+a,c\}$
(c) $\{a+b,c+a+b,b+3c\}$

Oplossing 2.14. We werken de oplossing uit voor de eerste opgave en geven voor de tweede opgave enkel het resultaat. De oplossing kan analoog gevonden worden.

(a) We bekijken de vergelijking

$$\lambda_1(a+b+c)+\lambda_2(a+2b)+\lambda_3(c-b)=0\ ,$$

met $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ variabelen in $\mathbb{C}$. Deze vergelijking kan herschreven worden als

$$(\lambda_1+\lambda_2)a+(\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3)b+(\lambda_1+\lambda_3)c=0\ .$$

Aangezien het stel $\{a,b,c\}$ lineair onafhankelijk is, volgt hieruit dat

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\end{cases}$$

Via het rijreductiealgoritme (of direct uit de vergelijkingen) vinden we dat dit stelsel als oplossingsverzameling $\{(-s,s,s)^t\mid s\in\mathbb{C}\}$ heeft. Er volgt dat het gegeven stel lineair afhankelijk is. Merk op dat we dit in dit specifieke geval ook al hadden kunnen zien voor we begonnen te rekenen, immers $a+b+c=(a+2b)+(c-b)$.

(b) Dit stel is lineair onafhankelijk. Werk dit zelf uit, analoog aan de oplossing van de eerste opgave.
(c) Dit stel is lineair onafhankelijk. Werk dit zelf uit.

Oefening 2.15. (T) Onderstel dat $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ een lineair onafhankelijk stel is in een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Geef voor elk van volgende uitspraken aan of ze waar of vals is, en argumenteer.

(a) $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_1\}$ is een lineair onafhankelijk stel,
(b) $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4 - v_1\}$ is een lineair onafhankelijk stel,
(c) $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 - v_1\}$ is een lineair onafhankelijk stel,
(d) $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 - v_4, v_4 - v_1\}$ is een lineair onafhankelijk stel.

Oplossing 2.15.

(a) Dit stel is lineair afhankelijk, want $(v_1 + v_2) - (v_2 + v_3) + (v_3 + v_4) - (v_4 + v_1) = 0$.
(b) Dit stel is lineair afhankelijk.
(c) Dit stel is lineair onafhankelijk. Onderstel dat

$$\lambda_1(v_1 + v_2) + \lambda_2(v_2 + v_3) + \lambda_3(v_3 + v_4) + \lambda_4(v_4 - v_1) = 0 \ ,$$

dan zou

$$(\lambda_1 - \lambda_4)v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)v_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)v_3 + (\lambda_3 + \lambda_4)v_4 = 0 \ .$$

Maar $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ is lineair onafhankelijk, dus de coëfficiënten van bovenstaande gelijkheid moeten 0 zijn, m.a.w. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ is een oplossing van

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \end{cases}$$

Het reductiealgoritme geeft als oplossingen enkel $\{(0, 0, 0, 0)\}$, dus het gegeven stel is inderdaad lineair onafhankelijk.
(d) Dit stel is lineair afhankelijk.

Oefening 2.16. (T) Beschouw vier vectoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^n$ met $n \geqslant 3$. Onderstel dat $\{v_1, v_2, v_3\}$ een lineair afhankelijk stel is, en dat $\{v_2, v_3, v_4\}$ een lineair onafhankelijk stel is. Toon dan aan dat $v_1 \in \operatorname{span}(v_2, v_3)$, en dat v_4 niet bevat is in $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$.

Oplossing 2.16. Doordat $\{v_1, v_2, v_3\}$ een lineair afhankelijk stel is, is er een lineaire combinatie $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ met minstens één coëfficiënt niet nul. Als $a = 0$, dan zou $bv_2 + cv_3 = 0$ een niet-triviale lineaire combinatie zijn in $\{v_2, v_3, v_4\}$, wat in tegenspraak is met de gegevens. Dus $a \neq 0$, en bijgevolg is $v_1 = -a^{-1}bv_2 - a^{-1}cv_3$, zodat $v_1 \in \operatorname{span}(v_2, v_3)$.

We tonen het tweede deel aan met een bewijs door contradictie. Veronderstel dat $v_4 \in \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$, dus dat $v_4 = \lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3$. Maar we hebben reeds bewezen dat $v_1 = -a^{-1}bv_2 - a^{-1}cv_3$, dus uit deze gelijkheden volgt dat $v_4 + (\lambda a^{-1}b - \mu)v_2 + (\lambda a^{-1}c - \nu)v_3 = 0$, wat in strijd is met het gegeven dat $\{v_2, v_3, v_4\}$ een lineair onafhankelijk stel is. Bijgevolg kan onze veronderstelling niet kloppen, en is $v_4 \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$

Oefening 2.17. (T) Waar of vals? Indien waar, bewijs, indien vals, geef een tegenvoorbeeld.

(a) Als de nulvector 0_V één van de vectoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ is, dan is $\{v_1, \ldots, v_n\}$ een lineair afhankelijk stel.
(b) Wanneer $\{v_1, \ldots, v_n\}$ lineair afhankelijk is, dan is v_i een lineaire combinatie van $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ voor alle $i = 1, \ldots, n$.
(c) Als u een lineaire combinatie is van $v_1, \ldots, v_r$ en elke v_i $(i = 1, \ldots, r)$ is een lineaire combinatie van $w_1, \ldots, w_s$, dan is u een lineaire combinatie van $w_1, \ldots, w_s$.
(d) Als $\{v_1, \ldots, v_n\}$ een lineair onafhankelijk stel is, en $w \notin \operatorname{span}(\{v_1, \ldots, v_n\})$, dan is $\{v_1, \ldots, v_n, w\}$ een lineair onafhankelijk stel.

Oplossing 2.17.

(a) Waar.
(b) Vals. Neem $\{(1,0)^t, (0,1)^t, (0,-1)^t\}$. Dit stel is lineair afhankelijk, want $(0,1)^t + (0,-1)^t = 0$, maar $(1,0)^t$ is geen lineaire combinatie van $\{(0,1)^t, (0,-1)^t\}$.
(c) Waar. Stel dat $u = \sum_{i=1}^r a_i v_i$ en dat $v_i = \sum_{j=1}^s b_{ij} w_j$, dan is

$$u = \sum_{i=1}^r a_i \left(\sum_{j=1}^s b_{ij} w_j \right) = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^r a_i b_{ij} \right) w_j \ ,$$

dus u is een lineaire combinatie van $w_1, \ldots, w_s$.
(d) Waar. Veronderstel dat $\{v_1, \ldots, v_n, w\}$ lineair afhankelijk is. Dan is er een lineaire combinatie

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda w = 0 \ .$$

Nu moet $\lambda \neq 0$, want anders was er een niet-triviale lineaire combinatie van $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Bijgevolg is $w = \sum_{i=1}^n (-\lambda_i/\lambda) v_i \in \text{span}(\{v_1, \ldots, v_n\})$. Dit is in strijd met de gegevens, dus onze veronderstelling was vals.

2.3 Basissen en dimensie

Oefening 2.18. (D) Bepaal van elk van de volgende verzamelingen of ze een basis zijn voor de gegeven vectorruimte:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ voor $\mathbb{R}^2$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ voor $\mathbb{R}^2$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ voor $\mathbb{R}^3$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ voor $\mathbb{R}^3$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$ voor $\mathbb{R}^3$

(f) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ voor $\mathbb{R}^4$

(g) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ voor $\mathbb{R}^4$

Oplossing 2.18.

(a) Om na te gaan of iets een basis is, controleren we in het algemeen twee dingen: de lineaire onafhankelijkheid en het voortbrengend zijn. We illustreren hier beide technieken, maar merken op dat het in dit geval voldoende is om slechts één van deze twee zaken aan te tonen, gezien het aantal vectoren overeenkomt met de dimensie van de vectorruimte. Stel dat $\lambda(1,0)^t + \mu(0,1)^t = (0,0)^t$, dan is $(\lambda, \mu)^t = (0,0)^t$, dus $\lambda = \mu = 0$. Bijgevolg is de verzameling lineair onafhankelijk. Verder is een willekeurige vector $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$ te schrijven als $(x,y)^t = x(1,0)^t + y(0,1)^t$, dus de verzameling is voortbrengend, en bijgevolg een basis.
(b) Dit is geen basis, de verzameling is niet lineair onafhankelijk: $(1,-1)^t + (1,1)^t - 2(1,0)^t = (0,0)^t$. Dit volgt direct uit het feit dat er meer vectoren zijn dan de dimensie van de vectorruimte.
(c) Dit is een basis want de vectoren zijn lineair onafhankelijk en het aantal komt overeen met de dimensie van de vectorruimte.
(d) Dit is geen basis, de verzameling is niet lineair onafhankelijk en niet voortbrengend: $(-1,1,0)^t - (0,1,1)^t + (1,0,1)^t = (0,0,0)^t$, en bijvoorbeeld de vector $(1,0,0)^t$ wordt niet voortgebracht door deze verzameling vectoren.
(e) Dit is een basis.
(f) Dit is geen basis, de verzameling kan niet voortbrengend daar ze maar drie vectoren bevat en de vectorruimte vierdimensionaal is.

(g) Dit is een basis.

Oefening 2.19. (D) Onderstel dat $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ een lineair onafhankelijk stel is in een vectorruimte V. Toon aan dat S een basis is voor span(S).

Oplossing 2.19. De verzameling S blijft lineair onafhankelijk, en is duidelijk voortbrengend voor span(S), per definitie van span.

Oefening 2.20. (D) Bepaal een basis voor de volgende deelruimten:

(a) $U_1 = \left\{(r, r, s)^t \middle| r, s \in \mathbb{R}\right\}$;
(b) $U_2 = \left\{(r+s, r-s, r)^t \middle| r, s \in \mathbb{R}\right\}$;
(c) $U_3 = \left\{(r, r, s+u)^t \middle| r, s, u \in \mathbb{R}\right\}$;
(d) $U_4 = \left\{(r+s, r-u, s+u)^t \middle| r, s, u \in \mathbb{R}\right\}$.

Oplossing 2.20.

(a) Het is duidelijk dat $(1, 1, 0)^t$ en $(0, 0, 1)^t$ deze deelruimte voortbrengen, en deze vectoren zijn lineair onafhankelijk.
(b) Het is duidelijk dat $(1, 1, 1)^t$ en $(1, -1, 0)^t$ deze deelruimte voortbrengen, en deze vectoren zijn lineair onafhankelijk.
(c) Het is duidelijk dat $(1, 1, 0)^t$ en $(0, 0, 1)^t$ deze deelruimte voortbrengen, en deze vectoren zijn lineair onafhankelijk. Merk op dat deze ruimte slechts 2-dimensionaal is, ook al zijn er drie parameters in de definitie.
(d) Het is duidelijk dat $(1, 1, 0)^t$, $(1, 0, 1)^t$ en $(0, -1, 1)^t$ deze deelruimte voortbrengen. De tweede vector is echter de som van de eerste en de derde, dus het is voldoende om $(1, 1, 0)^t$ en $(0, -1, 1)^t$ te nemen om U_4 voort te brengen.

Oefening 2.21. (B)

(a) Bepaal een basis voor de vectorruimte $M_2(K)$.
(b) Wat is de dimensie van de deelruimte

$$T = \{A \in M_2(K) \mid \text{tr}(A) = 0\} \ .$$

Oplossing 2.21.

(a) Deze vectorruimte is voortgebracht door

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} ,$$

en deze verzameling is lineair onafhankelijk.
(b) Deze vectorruimte is een strikte deelvectorruimte van bovenstaande vectorruimte. De dimensie is dus strikt kleiner dan deze van $M_2(K)$, dewelke 4 is. Volgende matrices in T zijn duidelijk lineair onafhankelijk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

waaruit volgt dat $\dim T = 3$ is.

Oefening 2.22. (B) Toon aan dat de volgende stellen elk een basis zijn van de $\mathbb{Q}$-vectorruimte $V = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ uit Oefening 2.1. Maak gebruik van $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

(a) $\{1, \sqrt[3]{2}\}$
(b) $\{1 + \sqrt[3]{2}, 1 - \sqrt[3]{2}\}$
Hint: gebruik (a)

Oplossing 2.22.

(a) We bekijken eerst $\{1, \sqrt[3]{2}\}$. We moeten aantonen dat dit stel lineair onafhankelijk is en dat het V voortbrengt over $\mathbb{Q}$. Het tweede is onmiddellijk duidelijk. We tonen nu aan dit stel lineair onafhankelijk is. Veronderstel dat $\lambda_1 + \lambda_2\sqrt[3]{2} = 0$, met $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$. Als $\lambda_2 = 0$, dan moet $\lambda_1 = 0$. Als $\lambda_2 \neq 0$, dan volgt er dat $\sqrt[3]{2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$, een strijdigheid. Dus moet $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Het stel $\{1, \sqrt[3]{2}\}$ is dus lineair onafhankelijk. Aangezien het ook voortbrengend is, is het dus een basis.

(b) We tonen aan dat het stel $\{1 + \sqrt[3]{2}, 1 - \sqrt[3]{2}\}$ lineair onafhankelijk is. Stel dat

$$\mu_1(1 + \sqrt[3]{2}) + \mu_2(1 - \sqrt[3]{2}) = 0 \ .$$

Dan is

$$(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2)\sqrt[3]{2} = 0 \ .$$

Hieruit volgt dat $\mu_1 + \mu_2 = \mu_1 - \mu_2 = 0$ omdat $\{1, \sqrt[3]{2}\}$ een lineair onafhankelijk stel is. Echter, het stelsel $\mu_1 + \mu_2 = \mu_1 - \mu_2 = 0$ heeft enkel $\mu_1 = \mu_2 = 0$ als oplossing. Dus is het stel $\{1 + \sqrt[3]{2}, 1 - \sqrt[3]{2}\}$ lineair onafhankelijk. Aangezien elke basis van V twee elementen heeft (alle basissen hebben evenveel elementen en we weten dat $\{1, \sqrt[3]{2}\}$ een basis is), en ieder lineair onafhankelijk stel kan uitgebreid worden tot een basis, is ook $\{1 + \sqrt[3]{2}, 1 - \sqrt[3]{2}\}$ een basis.

Oefening 2.23. (T) Beschouw de volgende elementen van $\mathbb{Q}^4$:

$$a = (0, 2, 3, -1)^t,\ b = (0, 2, 7, -2)^t,\ c = (0, -2, 1, 0)^t,\ u = (1, 2, 0, 1)^t,\ v = (2, 2, 1, 2)^t \ .$$

Stel $U = \langle a, b, c\rangle$ en $V = \langle u, v\rangle$.

(a) Bepaal een basis voor U en V.
(b) Bepaal een basis voor $U \cap V$ en breid deze uit tot een basis voor $\mathbb{Q}^4$.

Oplossing 2.23.

(a) Met behulp van het rijreductiealgoritme kunnen we vaststellen dat het stel $\{a, b, c\}$ lineair afhankelijk is en dus geen basis is. Het stel $\{a, b, c\}$ is per definitie voortbrengend voor U. We kunnen dus een deelverzameling van $\{a, b, c\}$ vinden die wel een basis van U is. Eenvoudige berekeningen leren dat alle deelverzamelingen met twee elementen, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ en $\{a, b\}$, lineair onafhankelijke stellen zijn, en dus basissen voor U.
Het stel $\{u, v\}$ is lineair onafhankelijk en dus een basis voor V.

(b) We maken in dit gedeelte gebruik van de basis $\{a, c\}$ voor U, maar een andere keuze is gelijkwaardig. We bepalen eerst een basis voor de deelruimte $U \cap V$. Een vector x is bevat in $U \cap V$ als hij zowel als lineaire combinatie van $\{a, c\}$ als van $\{u, v\}$ is te schrijven, met andere woorden als er $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Q}$ bestaan zodat $x = \lambda_1 a + \lambda_2 c = \mu_1 u + \mu_2 v$. Uit $\lambda_1 a + \lambda_2 c - \mu_1 u - \mu_2 v = 0$ halen we het stelsel

$$\begin{cases} -\mu_1 - 2\mu_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\mu_1 - 2\mu_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 = 0 \\ -\lambda_1 - \mu_1 - 2\mu_2 = 0 \end{cases} ,$$

met onbekenden $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Q}$. Via het rijreductiealgoritme vinden we $\{(0, s, -2s, s)^t \mid s \in \mathbb{Q}\}$ als oplossingsverzameling voor dit stelsel. De elementen van $U \cap V$ worden dus gegeven door $s \cdot c = s \cdot v - 2s \cdot u$. Het is dan duidelijk dat $\{c\}$ een basis is voor $U \cap V$.
We kunnen deze makkelijk uitbreiden tot een basis voor $\mathbb{Q}^4$ door toevoeging van een aantal vectoren uit de standaardbasis, bijvoorbeeld $(1, 0, 0, 0)^t$, $(0, 1, 0, 0)^t$ en $(0, 0, 0, 1)^t$. Er zijn veel andere mogelijke keuzes.

Oefening 2.24. (T) Zij V de vectorruimte van alle veeltermen over $\mathbb{R}$ van graad ten hoogste 4. Toon aan dat

$$W = \{f \in V \mid f(1) = f(-1) = 0\}$$

een deelruimte is van V. Bepaal een basis voor W.

Oplossing 2.24. We gebruiken het criterium voor deelruimten om na te gaan dat W een deelruimte is. Neem $f, g \in W$, dus f, g zijn veeltermen van graad kleiner dan of gelijk aan 4 waarvoor 1 en -1 nulpunten zijn. Neem $a, b \in \mathbb{R}$. We vinden dat $(af + bg)(\pm 1) = af(\pm 1) + bg(\pm 1) = 0$, dus $af + bg \in W$.

We gaan nu na welke elementen in W bevat zijn. Stel dat een veelterm $f(x) = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 \in V$, $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, in de deelruimte W bevat is. Dan moet $f(1) = f(-1) = 0$. Hieruit volgt:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ a-b+c-d+e=0 \end{cases}$$

We lossen dit stelsel op met a, b, c, d, e als onbekenden in $\mathbb{R}$. De oplossingenverzameling is $\{(-u-s, -r, s, r, u)^t \mid r, s, u \in \mathbb{R}\}$. Dit betekent dat $W = \{(-u-s) - rx + sx^2 + rx^3 + ux^4 \mid s, r, u \in \mathbb{R}\}$. We kiezen hiervoor een basis door (s, r, u) achtereenvolgens gelijk te stellen aan $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$. We vinden $\{x^2 - 1, x^3 - x, x^4 - 1\}$ als basis. Ga zelf na dat dit inderdaad een basis is.

Oefening 2.25. (T) Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte, en $W \leqslant V$. Toon het volgende aan:

(a) $\dim W \leqslant \dim V$;
(b) Als $\dim W = \dim V$, dan is $W = V$.

Oplossing 2.25.

(a) Zij $\mathcal{B}'$ een basis voor W en $\mathcal{B}$ een basis voor V. Wanneer we Lemma 2.2.6 toepassen voor $\mathcal{B}$, dan zien we dat een lineair onafhankelijke verzameling in V hoogstens $|\mathcal{B}| = \dim V$ elementen kan bevatten. Nu is $\mathcal{B}'$ een lineair onafhankelijke verzameling in V, dus $\dim W = |\mathcal{B}'| \leqslant \dim V$.
(b) Zij $\mathcal{B}'$ een basis voor W. We passen Stelling 2.2.7 toe met $T = \mathcal{B}'$ en $S = V$, dus we vinden een basis $\mathcal{B}$ voor V met $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Maar uit $\dim W = \dim V$ volgt dat deze twee verzamelingen even groot zijn, dus $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. Bijgevolg is $W = \operatorname{span}(\mathcal{B}') = \operatorname{span}(\mathcal{B}) = V$.

Oefening 2.26. (B) Beschouw $\lambda \in \mathbb{R}$ en beschouw de volgende elementen van $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (\lambda, 0, 0, 0)^t, \quad v_2 = (2, 1, 1, \lambda)^t, \quad v_3 = (2, \lambda, 1, 1)^t, \quad v_4 = (2, 1, \lambda, 1)^t \ .$$

Bepaal voor iedere waarde van λ de dimensie van de ruimte $\langle u, v, w, z \rangle$.

Oplossing 2.26. Stel A de matrix die v_1, v_2, v_3, v_4 als kolommen heeft. De kolomrang, dit is het aantal lineair onafhankelijke kolommen van een matrix, van A is gelijk aan $\dim(\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle)$. Aangezien elementaire rijoperaties de kolomrang van een matrix niet veranderen, volstaat het om de matrix te reduceren tot de echelonvorm, en in deze eenvoudige gedaante het aantal lineair onafhankelijke kolommen te bepalen.

Toepassing van het rijreductiealgoritme met gevalsonderscheiding leert dan dat $\dim(\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle) = 2$ als $\lambda = 1$, dat $\dim(\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle) = 3$ als $\lambda \in \{-2, 0\}$ en dat $\dim(\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle) = 4$ in alle andere gevallen.

Oefening 2.27. (T) Beschouw $a, b, x, y \in K^3$, K een veld, zodat $x \notin \langle a, b \rangle$ en $y \notin \langle a, b, x \rangle$. Is het stel $\{a, b\}$ lineair onafhankelijk?

Oplossing 2.27. We weten dat K^3 driedimensionaal is. De deelruimte $\langle a, b, x \rangle$ in K^3 bevat y niet en is dus niet gelijk aan K^3. Bijgevolg is $\dim(\langle a, b, x \rangle) \leqslant 2$. Aangezien $\langle a, b \rangle$ een deelruimte is van $\langle a, b, x \rangle$, maar er niet aan gelijk is, is $\dim(\langle a, b \rangle) \leqslant \dim(\langle a, b, x \rangle) - 1 \leqslant 1$. In een ééndimensionale ruimte zijn twee verschillende elementen altijd lineair afhankelijk, dus is het stel $\{a, b\}$ niet lineair onafhankelijk.

Oefening 2.28. Zij A een niet lege verzameling, K een veld. Zij V de verzameling van alle afbeeldingen $\sigma : A \to K$.

(a) **(B)** Toon aan dat V met de puntgewijze optelling en puntsgewijze vermenigvuldiging met scalairen een K-vectorruimte is (zie voorbeeld 2.1.2(6)).
(b) **(B)** Kies $a, b, c \in A$. Zijn de volgende deelverzamelingen van V deelruimten van V?
   (i) $U_1 = \{\sigma \in V \mid \sigma(a) = 0\}$,
   (ii) $U_2 = \{\sigma \in V \mid \sigma(a) = 1\}$,

(iii) $U_3 = \{\sigma \in V \mid \sigma(a)\sigma(b) = \sigma(b)\sigma(c)\}$.

(c) **(T)** Toon aan dat V eindigdimensionaal is als en slechts dan als A een eindige verzameling is.

Oplossing 2.28.

(a) Met puntswijze optelling en scalaire vermenigvuldiging wordt bedoeld dat voor alle $\sigma, \sigma' \in V$ en $\lambda \in K$ de volgende eigenschappen gelden:

$$\begin{aligned} \sigma + \sigma' &: A \to K : (\sigma + \sigma')(a) := \sigma(a) + \sigma'(a), && \forall a \in A \\ \lambda\sigma &: A \to K : (\lambda\sigma)(a) := \lambda\sigma(a), && \forall a \in A. \end{aligned}$$

In de rechterleden van de twee identiteiten maken we gebruik van de optelling en vermenigvuldiging in K. Dit definieert in de linkerleden de optelling en scalaire vermenigvuldiging in de ruimte V.
Alle axioma's die men moet nagaan om aan te tonen dat V een vectorruimte is, volgen uit de eigenschappen van het veld K. Ga dit zelf na. Merk op dat voor twee afbeeldingen $\sigma, \tau \in V$ geldt dat

$$\sigma = \tau \in V \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in A : \sigma(a) = \tau(a) \in K \; .$$

(b) Dit kan eenvoudig gecontroleerd worden aan de hand van het criterium voor deelruimten. Ga dit zelf na. We geven enkel de resultaten.
  (i) U_1 is een deelruimte.
  (ii) U_2 is geen deelruimte.
  (iii) U_3 is enkel een deelruimte als $a = c$.

(c) We definiëren de afbeeldingen σ_a, voor $a \in A$:

$$\sigma_a : A \to K : \begin{cases} \sigma_a(b) = 1 & b = a \\ \sigma_a(b) = 0 & b \neq a \end{cases}$$

We beschouwen nu de verzameling $S := \{\sigma_a \mid a \in A\}$. We tonen aan dat S een basis is voor V. Als $\tau \in V$, dan geldt er dat $\tau = \sum_{a \in A} \tau(a)\sigma_a$ want

$$\forall b \in A : \left(\sum_{a \in A} \tau(a)\sigma_a\right)(b) = \sum_{a \in A} \tau(a)\sigma_a(b) = \sum_{a \in A} \tau(a)\delta_{a,b} = \tau(b) \; .$$

Dus is S al zeker voortbrengend. Beschouw nu een lineaire combinatie $\sum_{a \in A} \lambda_a\sigma_a = 0$, $\lambda_a \in K$ voor alle $a \in A$. Voor een willekeurige $b \in A$ geldt er dan dat

$$0 = (\sum_{a \in A} \lambda_a\sigma_a)(b) = \sum_{a \in A} \lambda_a\sigma_a(b) = \lambda_b \; .$$

Alle coëfficiënten zijn dus gelijk aan 0. Hieruit volgt dat S een lineair onafhankelijke verzameling is. We besluiten dus dat S een basis is. Als A eindig is, is ook S eindig en dus is V eindigdimensionaal. Nu bekijken we het geval waarin A oneindig is. Veronderstel dat V toch eindigdimensionaal is, met $\dim(V) = n$. Kies dan $n + 1$ verschillende elementen in A: $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. We weten dat $\{\sigma_{a_1}, \ldots, \sigma_{a_n}\}$ een lineair onafhankelijk stel is (in het bewijs hierboven hebben we de eindigheid niet gebruikt). Dus moet $\{\sigma_{a_1}, \ldots, \sigma_{a_n}\}$ ook een basis zijn. Echter, dan is $\sigma_{a_{n+1}}$ te schrijven als lineaire combinatie van $\{\sigma_{a_1}, \ldots, \sigma_{a_n}\}$, een strijdigheid want ook $\{\sigma_{a_1}, \ldots, \sigma_{a_{n+1}}\}$ is een lineair onafhankelijk stel. We besluiten dat V oneindigdimensionaal moet zijn.

2.4 Som en directe som van deelruimten

Oefening 2.29. (D) Bepaal telkens of $\mathbb{R}^2$ de directe som is van W_1 en W_2. Indien dit het geval is, schrijf dan een willekeurige vector $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ als som van vectoren in W_1 en W_2.

(a) $W_1 = \{(r, 0)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$ en $W_2 = \{(r, r)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$;

(b) $W_1 = \mathbb{R}^2$ en $W_2 = \langle (1,1)^t \rangle$;
(c) $W_1 = \mathbb{R}^2$ en $W_2 = \{(0,0)^t\}$;
(d) $W_1 = \{(1,r)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$ en $W_2 = \{(r,1)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Oplossing 2.29.

(a) Er geldt dat $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$, want $(x,y)^t = (x-y,0)^t + (y,y)^t$ voor willekeurige $x, y \in \mathbb{R}$. Verder is $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, dus deze som is direct.
(b) De doorsnede van W_1 en W_2 is W_2 (want $W_2 \subset W_1$), deze deelruimtes kunnen nooit een directe som vormen.
(c) Er geldt dat $W_2 \subset W_1$, dus $W_1 + W_2 = W_1 = \mathbb{R}^2$, en $W_1 \cap W_2 = W_2 = \{0\}$, dus $W_1 \bigoplus W_2 = \mathbb{R}^2$. Een willekeurige vector uit $\mathbb{R}^2$ splitst als $(x,y)^t = (x,y)^t + (0,0)^t$.
(d) Deze twee verzamelingen zijn geen deelruimtes van $\mathbb{R}^2$, want $(0,0)^t \notin W_i$.

Oefening 2.30. (D) Beschouw de volgende deelruimtes van $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \text{de } x\text{-as} \quad W_2 = \text{de } z\text{-as} \quad W_3 = \text{het } xy\text{-vlak} \quad W_4 = \{(r,r,s)^t \mid r,s \in \mathbb{R}\} .$$

Voor welke i en j is $W_i + W_j = \mathbb{R}^3$? Voor welke i en j is $W_i \bigoplus W_j = \mathbb{R}^3$?

Oplossing 2.30. Er geldt dat $W_1 + W_4 = W_2 + W_3 = W_3 + W_4 = \mathbb{R}^3$. Van deze sommen is de laatste geen directe som, dus $W_1 \bigoplus W_4 = W_2 \bigoplus W_3 = \mathbb{R}^3$.

Oefening 2.31. Beschouw W_1, W_2, W_3, deelruimten van een K-vectorruimte V. Toon de volgende beweringen aan.

(a) **(B)** $(W_1 + W_2) + W_3 = W_1 + (W_2 + W_3)$
(b) **(T)** $W_3 \cap (W_2 + (W_1 \cap W_3)) = (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$
(c) **(T)** $W_1 \subseteq W_3 \Rightarrow W_3 \cap (W_2 + W_1) = W_1 + (W_2 \cap W_3)$
(d) **(T)** $W_3 \cap (W_1 + W_2) \supseteq (W_3 \cap W_1) + (W_3 \cap W_2)$ en $W_3 + (W_1 \cap W_2) \subseteq (W_3 + W_1) \cap (W_3 + W_2)$
(e) **(T)** De inclusies in (d) zijn in het algemeen geen gelijkheden.
(f) **(T)** Als de eerste inclusie in (d) een gelijkheid is, dan is ook de tweede inclusie een gelijkheid.

Oplossing 2.31. We werken slechts enkele opgaves in detail uit.

(a) Dit volgt direct uit de definitie en de associativiteit in V. Ga dit zelf na.
(b) Om een gelijkheid tussen verzameling aan te tonen, bewijst men vaak dat de ene verzameling in de andere bevat is en vice versa. We passen deze techniek ook hier toe. Bekijk eerst een willekeurig element $x \in W_3 \cap (W_2 + (W_1 \cap W_3))$. Dan is $x \in W_3$ en bestaan er $w_2 \in W_2$ en $w_{13} \in W_1 \cap W_3$ zodat $x = w_2 + w_{13}$. Hieruit volgt dat $w_2 = x - w_{13} \in W_3$. Dus is $w_2 \in W_2 \cap W_3$. Daaruit volgt onmiddellijk dat $x = w_{13} + w_2 \in (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$.
Nu bekijken we een willekeurig element $y \in (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$. Dan bestaan er $v_{13} \in W_1 \cap W_3$ en $v_{23} \in W_2 \cap W_3$ zodat $y = v_{13} + v_{23}$. Aangezien $v_{13}, v_{23} \in W_3$ en W_3 een deelruimte is, geldt er dat $y \in W_3$. Aangezien $v_{23} \in W_2$ geldt er ook duidelijk dat $y = v_{23} + v_{13} \in W_2 + (W_1 \cap W_3)$. Dus is y bevat in $W_3 \cap (W_2 + (W_1 \cap W_3))$.
(c) We passen dezelfde techniek toe als in puntje (b). Zij x een willekeurig element van $W_3 \cap (W_2 + W_1)$. Dan weten we $x \in W_3$ en $x = w_2 + w_1$ voor $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$. We bewijzen dat x behoort tot $W_1 + (W_2 \cap W_3)$. Schrijf hiertoe x als $w_1 + (x - w_1)$. Aangezien $w_1 \in W_1$ volstaat het aan te tonen dat $x - w_1 \in W_2 \cap W_3$. Enerzijds hebben we $x - w_1 = w_2 \in W_2$, anderzijds weten we dat x en w_1 beiden tot W_3 behoren, doordat $W_1 \subseteq W_3$, waardoor ook $x - w_1$ ook tot W_3 behoort, daar W_3 een deelruimte is.
Zij nu x een willekeurig element van $W_1 + (W_2 \cap W_3)$. Dan is $x = w_1 + w_{23}$, met $w_1 \in W_1$ en $w_{23} \in W_2 \cap W_3$. We tonen aan dat $x \in W_3 \cap (W_2 + W_1)$. Daartoe moet $x \in W_3$ zitten, wat voldaan is omdat $w_1 \in W_1 \subseteq W_3$ en $w_{23} \in W_3$ en W_3 is een deelruimte. Verder moet ook $x \in W_2 + W_1$ zitten, wat het geval is omdat $w_1 \in W_1$ en $w_{23} \in W_2$.
(d) Werk dit zelf uit.

(e) We geven hier een voorbeeld van het feit dat de omgekeerde inclusie niet geldt, voor zowel de eerste als de tweede formule. In $V = \mathbb{R}^2$ kiezen we de deelruimten $W_1 = \text{span}((1,0)^t)$, $W_2 = \text{span}((0,1)^t)$ en $W_3 = \text{span}((1,1)^t)$. Enerzijds geldt nu dat $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$ en dat dus $W_3 \cap (W_1 + W_2) = W_3$. Anderzijs is $W_3 \cap W_1 = \{0\}$ en $W_3 \cap W_2 = \{0\}$, en dus $(W_3 \cap W_1) + (W_3 \cap W_2) = \{0\}$. De omgekeerde inclusie van de eerste inclusie geldt dus niet. Ga zelf na dat dit tegenvoorbeeld ook een contradictie oplevert bij (b).
Tot slot, het helpt om een tekening te maken bij het opstellen van de voorbeelden.

(f) We bekijken een willekeurig element $x \in (W_3 + W_1) \cap (W_3 + W_2)$. We weten dat er $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ en $w_3, w_3' \in W_3$ zodat $x = w_1 + w_3 = w_2 + w_3'$. Dan geldt er dat $w_1 - w_2 = w_3' - w_3$. Het element $w_1 - w_2$ is dus bevat in $W_3 \cap (W_1 + W_2)$. Aangezien de eerste inclusie een gelijkheid is geldt er dan ook dat $w_1 - w_2 \in (W_3 \cap W_1) + (W_3 \cap W_2)$. Er bestaan dus $v_{13} \in W_3 \cap W_1$ en $v_{23} \in W_3 \cap W_2$ zodat $w_1 - w_2 = v_{13} + v_{23}$. Dan geldt er dat $w_1 - v_{13} = w_2 + v_{23}$. Het element $w_1 - v_{13}$ is bijgevolg bevat in $W_1 \cap W_2$. We vinden dat $x = w_1 + w_3 = (w_1 - v_{13}) + (v_{13} + w_3) \in W_3 + (W_1 \cap W_2)$ want $w_1 - v_{13} \in W_1 \cap W_2$ en $w_3 + v_{13} \in W_3$.

Oefening 2.32. (B)

(a) Stel V_1, V_2 twee deelruimten van $\mathbb{R}^4$ met $\dim(V_1) = \dim(V_2) = 3$. Toon aan dat het onmogelijk is dat $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ of $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$. Geef een voorbeeld van twee driedimensionale deelruimten in $\mathbb{R}^4$ waarvoor $\dim(V_1 \cap V_2) = 3$, respectievelijk waarvoor $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$.
(b) Stel V_1, V_2 twee deelruimten van $\mathbb{R}^7$ met $\dim(V_1) = 5$ en $\dim(V_2) = 4$, bepaal alle mogelijke waarden van $\dim(V_1 \cap V_2)$. Geef een voorbeeld voor elk van de gevallen.

Oplossing 2.32.

(a) Uit de dimensiestelling (Stelling 2.3.6 in de cursus) volgt dat $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 + V_2) = 6 - \dim(V_1 + V_2)$. Er geldt dat $3 \leqslant \dim(V_1 + V_2) \leqslant 4$ want $V_1 \subseteq V_1 + V_2 \subseteq \mathbb{R}^4$. Dus is $\dim(V_1 \cap V_2) \in \{2, 3\}$.
Beschouw de standaardbasis $e_1, \ldots, e_4$ van $\mathbb{R}^4$. Als we $V_1 = V_2$ kiezen, is $\dim(V_1 \cap V_2) = 3$. Als we bijvoorbeeld $V_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ en $V_2 = \langle e_1, e_2, e_4 \rangle$ kiezen, dan is $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$ en is $V_1 \cap V_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$, en dus is $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$.
(b) We geven enkel het resultaat: $\dim(V_1 \cap V_2) \in \{2, 3, 4\}$. Werk dit zelf uit (analoog aan (a)).

Oefening 2.33. (D) Verklaar in elk van de volgende gevallen, zonder berekeningen te maken, waarom $\mathbb{R}^3$ *niet* de directe som is van M en N.

(a) $M = \langle (1,2,3)^t \rangle$, $N = \langle (3,2,1)^t \rangle$.
(b) $M = \langle (2,3,1)^t, (8,0,1)^t \rangle$, $N = \langle (5,-1,2)^t, (2,5,-1)^t \rangle$.

Oplossing 2.33.

(a) De ruimte opgespannen door M en N kan hoogstens 2-dimensionaal zijn, dus $M + N$ kan nooit $\mathbb{R}^3$ zijn.
(b) Je kan nagaan dat M en N beide bestaan uit twee lineair onafhankelijke vectoren, en dus elk een 2-dimensionale ruimte opspannen in $\mathbb{R}^3$. Uit de dimensie-stelling voor twee deelruimten volgt dan dat $\dim(M \cap N) \geqslant 1$ is, waaruit volgt dat $M \cap N \neq \{0\}$ is en de som niet direct is.

Oefening 2.34. (T) De dimensiestelling (Stelling 2.3.6) zegt dat voor $W_1, W_2 \leqslant V$, met V een eindig-dimensionale vectorruimte, geldt dat

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) .$$

Geef een vectorruimte V met deelruimtes $W_1, W_2, W_3 \leqslant V$ waarvoor

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2 + W_3) \neq {} & \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 \\ & - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) . \end{aligned}$$

Oplossing 2.34. Zij $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \langle (1,0)^t \rangle$, $W_2 = \langle (0,1)^t \rangle$ en $W_3 = \langle (1,1)^t \rangle$. Dan is $W_1+W_2+W_3 = V$, maar $W_i \cap W_j = \{(0,0)^t\}$ voor alle $i \neq j$, en dus ook $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{(0,0)^t\}$. Bijgevolg is

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2 + W_3) = 2 \neq 3 = 1+1+1-0-0-0+0 = \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 \\ - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) \ .\end{aligned}$$

Oefening 2.35. (B) Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^3$ en parameters $a, b, c \in \mathbb{R}$. Definieer de deelruimten

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right\rangle , \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \right\rangle \ .$$

Voor welke waarden van a, b, c is $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$?

Oplossing 2.35. Ga zelf na dat $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ als en slechts als $U \cap V = \{0\}$. We bekijken de doorsnede $U \cap V$. Een vector x is bevat in $U \cap V$ als er $\lambda, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ bestaan zodat $x = \lambda(1,1,a)^t = \mu_1(1,0,b)^t + \mu_2(0,1,c)^t$. Uit $\mu_1(1,0,b)^t + \mu_2(0,1,c)^t - \lambda(1,1,a)^t = 0$ halen we een stelsel met drie vergelijkingen in de variabelen λ, μ_1, μ_2. Met behulp van het rijreductiealgoritme vinden we dat dit stelsel enkel de nuloplossing heeft als en slechts als $a \neq b + c$. In dit geval is dus $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Oefening 2.36. (T) Zij $W_1, \ldots, W_m$ deelruimten van de K-vectorruimte V.

(a) Stel dat $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$. Toon aan dat $W_i \cap W_j = \{0\}$ voor alle $1 \leqslant i < j \leqslant m$.
(b) Stel dat $V = W_1 + \ldots + W_m$. Toon aan dat de som direct is, m.a.w. $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$ als en slechts als voor alle $1 \leqslant i \leqslant m-1$ geldt dat

$$(W_1 + \ldots + W_i) \cap W_{i+1} = \{0\} \ .$$

Oplossing 2.36.

(a) Dit kan je bewijzen analoog aan hoe het in de cursus gedaan wordt voor twee deelruimten.
(b) Als $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$, dan is ieder element op unieke wijze te schrijven als som van elementen uit de deelruimten W_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Een niet-nul element kan dan niet in $(W_1 + \ldots + W_i) \cap W_{i+1}$ voor een zekere i bevat zijn, want dan kan het zowel geschreven worden als $w_1 + \ldots + w_i + 0 + \ldots + 0$, $w_j \in W_j$ $(1 \leqslant j \leqslant i)$, als $0 + \ldots + 0 + w_{i+1} + 0 + \ldots + 0$, $w_{i+1} \in W_{i+1}$.
Als de som niet direct is, dan is er een element $x = w_1 + \ldots + w_n = w_1' + \ldots + w_n'$, met $w_j, w_j' \in W_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, zodat voor minstens één $i \in \{1, \ldots, m\}$, $w_i \neq w_i'$. Zij nu $k \in \{2, ..., m\}$ de index[1] waarvoor $w_k \neq w_k'$ terwijl $w_\ell = w_\ell'$ voor alle ℓ met $m \geqslant \ell > k$. Er geldt dat $x - x = \sum_{i=1}^{m}(w_i - w_i') = 0$, en met onze keuze voor k volgt er dat $\sum_{i=1}^{k-1}(w_i - w_i') = w_k' - w_k \neq 0$. Maar hieruit halen we dat $(W_1 + \ldots + W_{k-1}) \cap W_k \neq \{0\}$, wat in strijd is met het gegeven. We besluiten dat x toch op een unieke manier te schrijven is als som van elementen uit de deelruimten W_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Beide richtingen van het bewijs zijn nu aangetoond. Merk op dat we hebben aangetoond dat, wanneer we een directe som $W_1 \oplus \cdots \oplus W_N$ hebben, dat dan ook $W_1 + \cdots + W_{N+1}$ een directe som is als $(W_1 \oplus \cdots \oplus W_N) \cap W_{N+1} = \{0\}$.

Oefening 2.37. (T) Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en zij $W_1, \ldots, W_m$ deelruimten van V. Toon aan dat

$$\dim(W_1 + \cdots + W_m) \leqslant \dim(W_1) + \cdots + \dim(W_m) \ ,$$

en dat gelijkheid geldt als en slechts als de som een directe som is.

Oplossing 2.37. We tonen deze bewering aan gebruik makende van inductie naar m en de dimensiestelling (Stelling 2.3.6). De inductiebasis $(m = 1)$ is triviaal voldaan. Stel nu dat voor $m = N$ het gestelde geldt. We tonen aan dat het dan ook geldig is voor $m = N + 1$. Noteer met V_N de som $W_1 + \cdots + W_N$, en met d_N de som van de dimensies $\dim(W_1) + \cdots + \dim(W_N)$. Uit de dimensiestelling volgt dat

$$\dim(V_N + W_{N+1}) = \dim(V_N) + \dim(W_{N+1}) - \dim(V_N \cap W_{N+1}).$$

[1]Hier gaan we er subtiel vanuit dat $k \geqslant 2$. Waarom weten we dat k niet gelijk kan zijn aan 1?

We hebben dat $\dim(V_N \cap W_{N+1}) \geqslant 0$, waaruit volgt dat $\dim(V_N + W_{N+1}) \leqslant \dim(V_N) + \dim(W_{N+1})$, met gelijkheid als en slechts als $V_N \cap W_{N+1} = \{0\}$, en dit treedt op precies als $W_1 + \cdots W_{N+1}$ een directe som is (wegens puntje (b) in Oefening 2.36). Uit de inductiehypothese halen we dan $\dim(V_N) \leqslant d_N$, met wederom een gelijkheid als en slechts als $W_1 + \cdots + W_N$ een directe som is (merk op dat als $W_1 + \cdots + W_{N+1}$ een directe som is, dan ook $W_1 + \cdots + W_N$), dit volgt ook uit Oefening 2.36). We besluiten dat

$$\dim(W_1 + \cdots + W_{N+1}) \leqslant \dim(W_1) + \cdots + \dim(W_{N+1})$$

met gelijkheid als en slechts als $W_1 + \cdots + W_{N+1}$ een directe som is. Hiermee is de bewering aangetoond.

Oefening 2.38. (T) Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte met deelruimtes W_1 en W_2. Onderstel dat

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + 1 ,$$

toon dan aan dat $W_1 \subset W_2$ of $W_2 \subset W_1$.

Oplossing 2.38. Noteer $W = W_1 \cap W_2$. Dan is $W \leqslant W_i$, en dus $\dim W \leqslant \dim W_i$ $(i = 1, 2)$, wegens Oefening 2.25. Noteer $n_i = \dim W_i - \dim W \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$. Uit het gegeven en de dimensiestelling volgt nu dat

$$n_1 + n_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W - \dim W = \dim(W_1 + W_2) - \dim W = 1 .$$

Maar $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, dus we hebben $(n_1, n_2) = (1, 0)$ of $(n_1, n_2) = (0, 1)$. In het eerste geval is $\dim W = \dim W_2$, dus opnieuw wegens Oefening 2.25 is $W = W_1 \cap W_2 = W_2$, dus $W_2 = W_1 \cap W_2 \subset W_1$. Merk op dat in dit geval $W_1 + W_2 = W_1$. In het tweede geval vinden we analoog dat $W_1 \subset W_2$ (en $W_1 + W_2 = W_2$).

2.5 Lineaire afbeeldingen

Oefening 2.39. (D) Gegeven twee vectorruimten V en W, een basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ voor V en twee lineaire afbeeldingen f en g van V naar W. Toon aan dat als $f(v_i) = g(v_i)$ voor $i = 1, \ldots, n$, dat dan $f = g$.
Hint: twee afbeeldingen van A naar B zijn gelijk als en slechts als de beelden van alle elementen van A dezelfde zijn.

Oplossing 2.39.

Bewijs. We moeten aantonen dat $f(v) = g(v)$ voor elke $v \in V$. Neem dus $v \in V$ willekeurig. Aangezien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ een basis is, bestaan er coëfficiënten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ waarvoor $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. We vinden

$$\begin{aligned}
f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\
&= \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) && \text{(want } f \text{ is lineair)} \\
&= \lambda_1 g(v_1) + \cdots + \lambda_n g(v_n) && \text{(uit de gegevens)} \\
&= g(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) && \text{(want } g \text{ is lineair)} \\
&= g(v)
\end{aligned}$$

Aangezien v willekeurig was, geldt dit voor alle v, dus $f = g$. □

Oefening 2.40. (B) Beschouw V en W, twee K-vectorruimten, en een afbeelding $f : V \to W$ waarvoor geldt dat $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ voor alle $x, y \in V$ en alle $\lambda \in K$. Toon aan dat f een lineaire afbeelding is.
Hint: Toon eerst aan dat $f(0) = 0$.

Oplossing 2.40. We passen de gelijkheid uit de opgave toe voor $x = y \in V$ en $\lambda = -1$. We vinden dat $f(0) = 0$. Beschouw nu willekeurige $v, w \in V$ en willekeurige $\mu, \mu' \in K$. Dan geldt er

$$f(\mu v + \mu' w) = f(\mu v) + \mu' f(w) = f(0 + \mu v) + \mu' f(w) = f(0) + \mu f(v) + \mu' f(w) = \mu f(v) + \mu' f(w) .$$

Hierbij hebben we de gelijkheid uit de opgave tweemaal toegepast.

Oefening 2.41. Zij V de vectorruimte van veeltermen over $\mathbb{R}$ van graad kleiner dan 3. Definieer de afbeelding $\sigma : V \to V$ als volgt:

$$\sigma(a + bx + cx^2) = a + b(x+1) + c(x+1)^2 \ .$$

(a) **(D)** Toon aan dat σ een lineaire afbeelding is.
(b) **(B)** Bepaal de kern en bepaal alle $f \in V$ zodat $\sigma(f) = x^2 + 3x + 3$.
(c) **(T)** Is σ een bijectie? Zo ja, bepaal de inverse afbeelding.

Oplossing 2.41.

(a) Beschouw twee willekeurige elementen van V, zeg $f = a + bx + cx^2$ en $g = a' + b'x + c'x^2$, en beschouw $\lambda, \mu \in K$. Er geldt dat

$$\begin{aligned}
\sigma(\lambda f + \mu g) &= \sigma(\lambda(a + bx + cx^2) + \mu(a' + b'x + c'x^2)) \\
&= \sigma((\lambda a + \mu a') + (\lambda b + \mu b')x + (\lambda c + \mu c')x^2) \\
&= (\lambda a + \mu a') + (\lambda b + \mu b')(x+1) + (\lambda c + \mu c')(x+1)^2 \\
&= \lambda(a + b(x+1) + c(x+1)^2) + \mu(a' + b'(x+1) + c'(x+1)^2) \\
&= \lambda\sigma(f) + \mu\sigma(g) \ .
\end{aligned}$$

De afbeelding is dus lineair.

(b) De kern bestaat uit alle elementen van V die op de nulveelterm in V worden afgebeeld. Voor een willekeurig element $a + bx + cx^2 \in V$ geldt er dat $\sigma(a + bx + cx^2) = 0$ als en slechts als

$$0 = a + b(x+1) + c(x+1)^2 = (a+b+c) + (b+2c)x + cx^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \ .$$

Het enige element in de kern is dus $0 \in V$, de nulveelterm.
Nu zoeken we alle elementen in V die door σ worden afgebeeld op $x^2 + 3x + 3$. Voor een willekeurig element $a + bx + cx^2 \in V$ geldt er dat $\sigma(a + bx + cx^2) = x^2 + 3x + 3$ als en slechts als

$$x^2 + 3x + 3 = a + b(x+1) + c(x+1)^2 = (a+b+c) + (b+2c)x + cx^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c = 3 \\ b + 2c = 3 \\ c = 1 \end{cases} \ .$$

Dit stelsel heeft als unieke oplossing $(a, b, c) = (1, 1, 1)$. Dus is $x^2 + x + 1$ het unieke element in V dat op $x^2 + 3x + 3$ wordt afgebeeld.

(c) Aangezien $\ker(\sigma) = \{0\}$ volgt uit Lemma 2.4.11 in de cursus dat σ injectief is. Uit de Alternatiefstelling (Gevolg 2.4.21 in de cursus) volgt dan dat σ bijectief is. Om de inverse afbeelding te bepalen, zoeken we het element dat door σ wordt afgebeeld op $a' + b'x + c'x^2 \in V$. Voor een willekeurig element $a + bx + cx^2 \in V$ geldt er dat $\sigma(a + bx + cx^2) = a' + b'x + c'x^2$ als en slechts als

$$a' + b'x + c'x^2 = a + b(x+1) + c(x+1)^2 = (a+b+c) + (b+2c)x + cx^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c = a' \\ b + 2c = b' \\ c = c' \end{cases} \ .$$

Dit stelsel, met onbekenden a, b, c en parameters a', b', c', heeft als unieke oplossing $(a, b, c) = (a' - b' + c', b' - 2c', c')$. Dus is $c'x^2 + (b' - 2c')x + (a' - b' + c') = a' + b'(x-1) + c'(x-1)^2$ het unieke element in V dat op $a' + b'x + c'x^2$ wordt afgebeeld. De inverse afbeelding wordt dan gegeven door $\tau : V \to V : a + bx + cx^2 \mapsto a + b(x-1) + c(x-1)^2$.

Oefening 2.42. (D) Probeer zo eenvoudig mogelijk in te zien dat de volgende afbeeldingen geen lineaire afbeeldingen zijn:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x + 1$;
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \to (x, x^2)$;
(c) $h : \mathbb{R}^3 \to V$, met V een vectorruimte, zodat $h((1, -1, 0)^t) = 0$, $h((1, 2, 1)^t) = 0$, en $h((2, 1, 1)^t) \neq 0$.

Oplossing 2.42.

(a) Voor deze afbeelding is $f(0) \neq 0$.
(b) Hier is $\operatorname{im} g$ geen deelruimte van $\mathbb{R}^2$.
(c) Het is hier onmogelijk dat $h((2, 1, 1)^t) = h((1, -1, 0)^t + (1, 2, 1)^t) = h((1, -1, 0)^t) + h((1, 2, 1)^t)$.

Oefening 2.43. (B) Zij $f : K^n \to K^n$ de afbeelding bepaald door $f((a_1, \ldots, a_n)^t) = (a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \cdots + a_n)^t$. Is f een lineaire afbeelding? Is f een bijectie? Zo ja, bepaal de inverse afbeelding.

Oplossing 2.43. We werken de oplossing niet volledig uit. We laten dit aan de lezer.

De afbeelding f is inderdaad lineair. Zoals in de voorgaande oefeningen kunnen we dit vinden door na te gaan dat $f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w)$ voor willekeurige $\lambda, \mu \in K$ en $v, w \in K^n$.

Ga na dat uit $f((a_1, \ldots, a_n)^t) = 0$ volgt dat $(a_1, \ldots, a_n)^t = (0, \ldots, 0)^t$. Uit Lemma 2.4.11 volgt dan dat f injectief is. Uit Gevolg 2.4.21 volgt dan ook dat f een bijectie is.

We zoeken een lineaire functie $g : K^n \to K^n$ zodanig dat $g(f((a_1, \ldots, a_n)^t)) = (a_1, \ldots, a_n)^t$ en dat $f(g((a_1, \ldots, a_n)^t)) = (a_1, \ldots, a_n)^t$. We starten met de eerste gelijkheid, dus zoek een lineaire functie g, zodanig dat

$$g((a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \cdots + a_n)^t) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^t .$$

Beredeneer dat $g((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^t) = (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1})^t$ de gezochte functie is. Controleer dat $f(g(v)) = g(f(v)) = v$ voor alle $v \in K^n$. We concluderen dat $g = f^{-1}$.

Oefening 2.44. (T) Beschouw parameters $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ een lineaire afbeelding die vastgelegd wordt door het beeld van een basis van $\mathbb{R}^3$:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} .$$

Bepaal $\ker(f)$ en $\operatorname{im}(f)$ voor iedere waarde van a en b.

(b) Zij $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een lineaire afbeelding die vastgelegd wordt door het beeld van een basis van $\mathbb{R}^3$:

$$g\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}b\\0\\a\end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix} .$$

Bepaal $\ker(g)$ en $\operatorname{im}(g)$ voor iedere waarde van a en b.

Oplossing 2.44. We werken enkel de eerste opgave uit. Van de tweede opgave wordt enkel het resultaat gegeven; de redenering is analoog.

(a) We bepalen eerst de kern van deze afbeeldingen. Voor een vector $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$ geldt er dat

$$f((x, y, z)^t) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = \begin{pmatrix}xa + by + z\\xb + ya + z\end{pmatrix}$$

dankzij de lineariteit van f. Om de vectoren die tot de kern behoren te vinden, lossen we dus het stelsel

$$\begin{cases} xa + by + z = 0 \\ xb + ya + z = 0 \end{cases}$$

met onbekenden x, y, z en parameters a, b op. Met behulp van het rijreductiealgoritme en door toepassing van gevalsonderscheiding vinden we dat de kern gelijk is aan $\{(r, r, -(a + b)r)^t \mid r \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, -a - b)^t \rangle$ als $a \neq b$, dat de kern gelijk is aan $\{(r, s, -a(r + s))^t \mid r, s \in \mathbb{R}\} = \langle e_1 - ae_3, e_2 - ae_3 \rangle$ als $a = b$. In het eerste geval, $a \neq b$, is de kern ééndimensionaal. Bijgevolg is $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2$. Dus moet $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^2$. In het tweede geval, $a = b$, is de kern tweedimensionaal. Bijgevolg is $\dim(\operatorname{im}(f)) = 1$. We zien onmiddellijk dat $\operatorname{im}(f) = \{(r, r)^t \mid r \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1)^t \rangle$

(b) We vatten de resultaten samen

$$\begin{cases} \ker(g) = \{0\}, \operatorname{im}(g) = \mathbb{R}^3 & a \neq -b \\ \ker(g) = \left\langle (1,1,1)^t \right\rangle, \operatorname{im}(g) = \left\langle (1,-1,0)^t, (-1,0,1)^t \right\rangle & a = -b \neq 0 \\ \ker(g) = \mathbb{R}^3, \operatorname{im}(g) = \{0\} & a = b = 0 \end{cases} .$$

Oefening 2.45. (T) Zij $f : V \to W$ een lineaire afbeelding, en $U \leqslant V$. Toon dan aan dat

$$\ker f\big|_U = \ker f \cap U \quad \text{ en } \quad \operatorname{im} f\big|_U \leqslant \operatorname{im} f .$$

Oplossing 2.45. Er geldt dat

$$\ker f\big|_U = \{v \in U \mid f(v) = 0\} = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \cap U = \ker f \cap U .$$

Voor de tweede claim combineren we twee eigenschappen:

$$\operatorname{im} f\big|_U = \{f(v) \mid v \in U\} \subseteq \{f(v) \mid v \in V\} = \operatorname{im} f ,$$

gezien $U \subseteq V$. Anderzijds is $f\big|_U$ een lineaire afbeelding van U naar W, dus $\operatorname{im} f\big|_U \leqslant W$. Aangezien een deelruimte een deelverzameling is die zelf een vectorruimte is en we verder ook weten dat $\operatorname{im} f\big|_U$ een deelverzameling is van $\operatorname{im} f$, volgt er dat $\operatorname{im} f\big|_U$ een deelruimte is van $\operatorname{im} f$.

Oefening 2.46. (T) Zij V een n-dimensionale K-vectorruimte en $f : V \to V$ een lineaire afbeelding. Bewijs de volgende uitspraken:

(a) Als $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ een basis is voor V, dan is $\{a_1, \ldots, a_n\}$ een basis voor V.
(b) Als f injectief is en $\{b_1, \ldots, b_n\}$ een basis is voor V dan is $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ een basis voor V.
(c) Als $\{c_1, \ldots, c_n\}$ een basis is voor V en $\ker(f) = \langle c_1, \ldots, c_k\rangle$ voor een bepaalde $0 < k < n$, dan is $\{f(c_{k+1}), \ldots, f(c_n)\}$ een basis voor $\operatorname{im}(f)$.

Oplossing 2.46.

(a) Wegens Stelling 2.2.12 is het voldoende om aan te tonen dat $\{a_1, \ldots, a_n\}$ een lineair onafhankelijk stel is. Veronderstel dat $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$ voor zekere $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Dan is ook $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) = 0$. Aangezien $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ een basis is, en dus zeker ook een lineair onafhankelijk stel, moet $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
(b) Net als daarnet volstaat het om aan te tonen dat $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ een lineair onafhankelijk stel is. Dat dit zo is volgt dan weer uit Stelling 2.4.11.
(c) Aangezien $\operatorname{im}(f) = \langle f(c_1), \ldots, f(c_n)\rangle = \langle f(c_{k+1}), \ldots, f(c_n)\rangle = \operatorname{im}(f\big|_{C'})$ geldt er dat $\operatorname{im}(f)$ voortgebracht wordt door $\{f(c_{k+1}), \ldots, f(c_n)\}$. We gaan na dat $\{f(c_{k+1}), \ldots, f(c_n)\}$ een lineair onafhankelijk stel is. Dit kunnen we op twee manieren doen.
Manier 1. Stel $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i f(c_i) = 0$. Wegens lineariteit van f volgt hieruit dat $f\left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i c_i\right) = 0$, m.a.w., $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i c_i \in \ker(f)$. Daar $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i c_i \in \langle c_{k+1}, \ldots, c_n\rangle$ en $\ker(f) = \langle c_1, \ldots, c_k\rangle$ volgt er dat $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i c_i = 0$, dit omdat $\{c_1, \ldots, c_n\}$ lineair onafhankelijk is. Uit dat laatste halen we dan ook dat $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, waaruit het gevraagde volgt.
Manier 2. Stel C' gelijk aan $\langle c_{k+1}, \ldots, c_n\rangle$. Dan is $f\big|_{C'}$ een injectieve afbeelding, daar uit Oefening 2.45 volgt dat $\ker(f\big|_{C'}) = \ker(f) \cap C'$ en dit kan enkel de nulvector bevatten aangezien $\{c_1, \ldots, c_n\}$ een basis is voor V. Uit Stelling 2.4.9 volgt dat $\{f(c_{k+1}), \ldots, f(c_n)\}$ lineair onafhankelijk is.

Oefening 2.47. Zij V een $\mathbb{Q}$-vectorruimte. Beschouw een lineaire operator $f : V \to V$ waarvoor $f^3 = \mathbf{1}_V$. Zij $a \in V$ en stel $b = 2a - f(a) - f^2(a)$. Toon aan dat

(a) **(B)** $\ker(f) = \{0\}$,
(b) **(T)** het stel $\{b, f(b), f^2(b)\}$ lineair afhankelijk is.

Oplossing 2.47.

(a) Veronderstel dat $x \in \ker(f)$. Dan geldt er dat $x = \mathbf{1}_V(x) = f^3(x) = f^2(f(x)) = f^2(0) = 0$. Dus is $\ker(f) = \{0\}$.
Een alternatieve methode is aantonen dat f injectief is: onderstel dat $f(v) = f(w)$, dan is $v = f^2(f(v)) = f^2(f(w)) = w$, dus f is injectief, en bijgevolg is $\ker(f) = \{0\}$.
Een derde manier is aantonen dat f een inverse heeft, wat meteen duidelijk is gezien $f \circ f^2 = f^2 \circ f = \mathbf{1}_V$ (dus f^2 is de inverse van f). Bijgevolg is f bijectief, dus injectief, dus $\ker(f) = \{0\}$.

(b) We weten dat $b = 2a - f(a) - f^2(a)$ en dus dat $f(b) = 2f(a) - f^2(a) - a$ en $f^2(b) = 2f^2(a) - a - f(a)$. We bekijken nu een lineaire combinatie van het stel $\{b, f(b), f^2(b)\}$

$$\begin{aligned}\lambda_1 b + \lambda_2 f(b) + \lambda_3 f^2(b) &= \lambda_1(2a - f(a) - f^2(a)) + \lambda_2(2f(a) - f^2(a) - a) + \lambda_3(2f^2(a) - a - f(a)) \\ &= (2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)a + (-\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3)f(a) + (-\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)f^2(a)\ .\end{aligned}$$

Uit $\lambda_1 b + \lambda_2 f(b) + \lambda_3 f^2(b) = 0$ halen we dan het stelsel

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

dat altijd een oplossing verschillend van de nuloplossing heeft, bijvoorbeeld $(1,1,1)$. Werk dit zelf uit met behulp van het rijreductiealgoritme. We besluiten dat er een lineaire combinatie van de elementen $b, f(b), f^2(b)$ bestaat die gelijk is aan 0 en waarvan niet alle coëfficiënten nul zijn. Dus is het stel $\{b, f(b), f^2(b)\}$ lineair afhankelijk.

Oefening 2.48. (T) Beschouw lineaire operatoren $f : V \to V$ en $g : V \to V$, met V een K-vectorruimte. Veronderstel dat $f^2 + gf = 0$.

(a) Toon aan: als $\operatorname{im}(f) = V$, dan geldt $f + g = 0$.
(b) Geef een voorbeeld om aan te tonen dat het mogelijk is dat $f + g \neq 0$ en $f \neq 0$, maar dat $f^2 + gf = 0$.

Oplossing 2.48.

(a) Als $\operatorname{im}(f) = V$, dan bestaat er voor elke $v \in V$ een element w zodat $f(w) = v$. Dan geldt er dat

$$0 = (f^2 + gf)(w) = (f + g)(f(w)) = (f + g)(v)\ .$$

We vinden dat $(f + g)(v) = 0$ voor elke $v \in V$. Dus is $f + g = 0$.

(b) We moeten dus f zo kiezen dat $\operatorname{im}(f) \neq V$. We geven een eenvoudig voorbeeld voor $V = \mathbb{R}^2$. We kiezen $f : V \to V$ met $f((a,b)^t) = (a,0)^t$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dan is $\operatorname{im}(f)$ een ééndimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^2$. We leggen nu $g : V \to V$ vast door $g((a,b)^t) = (-a,-b)^t$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dan is $f^2 + gf = 0$, maar $f + g \neq 0$. Zoek zelf nog een ander voorbeeld.

Oefening 2.49. (T) Zij $f : V \to V$ een lineaire operator op een K-vectorruimte V.

(a) Toon aan dat voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\ker(f^k) \subseteq \ker(f^{k+1}) \text{ en } \operatorname{im}(f^k) \supseteq \operatorname{im}(f^{k+1})\ .$$

Hieruit volgt dan dat

$$\begin{aligned}\ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \ker(f^3) \subseteq \cdots \subseteq \ker(f^k) \subseteq \ker(f^{k+1}) \subseteq \cdots \\ \operatorname{im}(f) \supseteq \operatorname{im}(f^2) \supseteq \operatorname{im}(f^3) \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{im}(f^k) \supseteq \operatorname{im}(f^{k+1}) \supseteq \cdots\end{aligned}$$

(b) Stel dat V eindigdimensionaal is. Toon aan dat er een natuurlijk getal k bestaat zodat $\ker(f^m) = \ker(f^k)$ voor alle $m \geqslant k$. Toon aan dat hieruit volgt dat ook $\operatorname{im}(f^m) = \operatorname{im}(f^k)$ voor alle $m \geqslant k$. Hieruit volgt dan dat

$$\begin{aligned}\ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \ker(f^3) \subseteq \cdots \subseteq \ker(f^k) = \ker(f^{k+1}) = \cdots \\ \operatorname{im}(f) \supseteq \operatorname{im}(f^2) \supseteq \operatorname{im}(f^3) \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{im}(f^k) = \operatorname{im}(f^{k+1}) = \cdots\end{aligned}$$

Oplossing 2.49.

(a) Kies $k \in \mathbb{N}$ willekeurig. Veronderstel dat $x \in \ker(f^k)$. Dan geldt er dat $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$. Bijgevolg is x ook bevat in $\ker(f^{k+1})$. Aangezien x willekeurig gekozen kan worden in $\ker(f^k)$ betekent dit dat $\ker(f^k) \subseteq \ker(f^{k+1})$.
Veronderstel nu dat $y \in \mathrm{im}(f^{k+1})$. Dan bestaat er een $z \in V$ zodat $f^{k+1}(z) = y$. Meteen volgt er dat $f^k(f(z)) = y$. Bijgevolg is y bevat in $\mathrm{im}(f^k)$, als beeld van $f(z) \in V$. Aangezien y willekeurig gekozen kan worden in $\mathrm{im}(f^{k+1})$ betekent dit dat $\mathrm{im}(f^{k+1}) \subseteq \mathrm{im}(f^k)$.

(b) Noteer $\dim(V) = n$. We weten dat $\ker(f^i)$ een deelruimte is van V voor alle $i \in \mathbb{N}$. Aangezien $\ker(f^i) \subseteq \ker(f^{i+1})$, is $\dim(\ker(f^i)) \leqslant \dim(\ker(f^{i+1}))$, waarbij $\dim(\ker(f^i)) = \dim(\ker(f^{i+1}))$ als en slechts als $\ker(f^i) = \ker(f^{i+1})$. We weten dat $\dim(\ker(f^i)) \leqslant n$, voor alle $i \in \mathbb{N}$. Bijgevolg kan de rij $\dim(\ker(f)), \dim(\ker(f^2)), \dim(\ker(f^3)), \ldots, \dim(\ker(f^i)), \dim(\ker(f^{k+1})), \ldots$ bij hoogstens n overgangen strikt stijgen. Bijgevolg bestaat er een k zodat $\dim(\ker(f^k)) = \dim(\ker(f^{k+1})) = \ldots$, met andere woorden zodat $\dim(\ker(f^m)) = \dim(\ker(f^k))$ voor alle $m \geqslant k$. Dit betekent dan ook dat $\ker(f^m) = \ker(f^k)$ voor alle $m \geqslant k$.
Aangezien voor alle i geldt dat $\mathrm{im}(f^i)$ een deelruimte is en dat $\dim(\ker(f^i)) + \dim(\mathrm{im}(f^i)) = \dim(V) = n$, volgt er uit het voorgaande ook onmiddellijk dat $\mathrm{im}(f^m) = \mathrm{im}(f^k)$ voor alle $m \geqslant k$.

Oefening 2.50. Zij V een K-vectorruimte, $f, g \in \mathrm{End}(V)$ zodat $\mathrm{im}(fg) = \mathrm{im}(gf)$ en $\mathrm{im}(f) + \ker(g) = V$.

(a) **(T)** Toon aan dat $\mathrm{im}(g) \cap \ker(f) = \{0\}$ als V eindig-dimensionaal is.
Hint: toon eerst aan dat $\mathrm{im}(gf) = \mathrm{im}(g)$.

(b) **(U)** Geef een voorbeeld waarbij $\mathrm{im}(g) \cap \ker(f) \neq \{0\}$ (dus met V oneindigdimensionaal).

Oplossing 2.50.

(a) We bekijken eerst de eindigdimensionale vectorruimten. We tonen eerst aan dat $\mathrm{im}(gf) = \mathrm{im}(g)$. Kies $x \in \mathrm{im}(g)$, dan bestaat er een $v \in V$ zodat $x = g(v)$. Uit $V = \mathrm{im}(f) + \ker(g)$ volgt er dat v te schrijven is als $f(w) + u$ met $w \in V, u \in \ker g$. Dan is $x = g(v) = g(f(w)) = (gf)(w) \in \mathrm{im}(gf)$. Hieruit volgt dat $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{im}(gf)$. De omgekeerde inclusie is triviaal voldaan en dus is $\mathrm{im}(g) = \mathrm{im}(gf) = \mathrm{im}(fg)$.
We bekijken nu de afbeelding

$$f\big|_{\mathrm{im}(g)} : \mathrm{im}(g) \to V : g(x) \mapsto f(g(x)) ,$$

de restrictie van f tot $\mathrm{im}(g)$. Het is duidelijk dat $\mathrm{im}(f\big|_{\mathrm{im}(g)}) = \mathrm{im}(fg) = \mathrm{im}(g)$. Uit de dimensiestelling volgt dan

$$\dim(\mathrm{im}(g)) = \dim(\mathrm{im}(f\big|_{\mathrm{im}(g)})) + \dim(\ker(f\big|_{\mathrm{im}(g)})) = \dim(\mathrm{im}(g)) + \dim(\ker(f\big|_{\mathrm{im}(g)})) .$$

Dus is $\dim(\ker(f\big|_{\mathrm{im}(g)})) = 0$. We bekijken deze kern:

$$\ker(f\big|_{\mathrm{im}(g)}) = \{v \in \mathrm{im}(g) \mid f\big|_{\mathrm{im}(g)}(v) = 0\} = \{v \in \mathrm{im}(g) \mid f(v) = 0\} = \mathrm{im}(g) \cap \ker(f) .$$

We besluiten dat $\mathrm{im}(g) \cap \ker(f) = \{0\}$.

(b) Beschouw de vectorruimte van oneindige rijen over een veld K. Stel f de shiftoperator, gegeven door $f((a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots)$ en stel g de identieke operator: $g = \mathbf{1}_V$. Deze voldoen aan de voorwaarden (ga dit na), maar $\mathrm{im}(g) \cap \ker(f) = \{(a, 0, 0, \ldots) \mid a \in K\} \neq 0$.

2.6 Rang van een matrix

Oefening 2.51. (B) Bepaal de rang van de volgende matrices over $\mathbb{R}$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Oplossing 2.51.

(a) De rang van een matrix verandert niet wanneer we het rijreductiealgoritme toepassen, en voor een rij-echelonmatrix is de rang juist het aantal spilplaatsen. In dit geval krijgen we de rij-echelonmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

waarvan we zien dat er twee spilplaatsen zijn, dus dat de rang 2 is.
We konden ook observeren dat als we $v = (1,2,1,1)$ en $w = (2,-1,1,2)$ noteren, dat dan $(4,3,3,4) = w + 2v$ en $(3,1,2,3) = w + v$. Verder zijn v en w lineair onafhankelijk, dus de dimensie van de ruimte opgespannen door de rijen is 2. Dit is meteen ook de rang.

(b) Je kan snel nagaan dat de drie kolommen $(1,0,0)^t$, $(0,0,4)^t$ en $(0,1,1)^t$ lineair onafhankelijk zijn, dus is de dimensie van de kolomruimte minstens 3. De kolomruimte is echter ook een deelruimte van $\mathbb{R}^3$, dus kan de dimensie hoogstens 3 zijn. Bijgevolg is de rang van deze matrix 3. Indien je niet meteen een dergelijk argument ziet, kan je altijd het rijreductiealgoritme toepassen.

Oefening 2.52. (B) Bepaal de rang van de volgende matrices over $\mathbb{R}$. Hierin is a een parameter in $\mathbb{R}$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Oplossing 2.52.

(a) De rang is 2 als $a = 3$ en de rang is 3 als $a \neq 3$.

(b) We reduceren deze matrix tot rij-echelonvorm:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - aR_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Op dit punt moeten we een onderscheid maken, of a al dan niet gelijk is aan 1. Als $a = 1$ vinden we een matrix met 3 nulrijen en één rij met enen, en is de rang dus 1. Onderstel dus dat $a \neq 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2 \leftarrow (a-1)^{-1} R_2 \\ R_3 \leftarrow (a-1)^{-1} R_3 \\ R_4 \leftarrow (1-a)^{-1} R_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2+a \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_4 \leftarrow R_4 - R_3 \\ R_1 \leftarrow R_1 - R_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2+a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3+a \end{pmatrix}$$

We krijgen opnieuw twee gevallen. Indien $a = -3$ is de rang 3, en als $a \neq 3$ is de rang 4. We vatten samen:

$$\begin{cases} a = 1 & \text{rang } 1 \\ a = -3 & \text{rang } 3 \\ a \in \mathbb{R} \backslash \{1, -3\} & \text{rang } 4 \end{cases}$$

Oefening 2.53. (B) Beschouw de volgende matrix A over $\mathbb{R}$, met parameter a in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} = (A_1, A_2, A_3),$$

waarbij A_1, A_2, A_3 de kolommen zijn. Bepaal alle waarden a waarvoor de vector $v = (0, a, a^2)^t$ in de kolomruimte $\mathrm{span}(A_1, A_2, A_3)$ zit.

Oplossing 2.53. Dit komt neer op het bepalen wanneer het stelsel $\lambda_1(1+a,1,1)^t + \lambda_2(1,1+a,1)^t + \lambda_3(1,1,1+a)^t = (0,a,a^2)^t$ oplossingen heeft. M.a.w. we moeten de rij-echelonvorm van

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1+a & a^2 \end{pmatrix}$$

bepalen. De concrete uitwerking laten we aan de lezer over. Als antwoord krijgen we

$$\begin{cases} a = -3 & v \text{ zit niet in de kolomruimte;} \\ a \neq -3 & v \text{ zit in de kolomruimte.} \end{cases}$$

Oefening 2.54. (B) Zij V een K-vectorruimte. Beschouw $W, W' \leqslant V$ en $v, v' \in V$.

(a) Toon aan dat de affiene deelruimte $v + W$ een deelruimte van V is als en slechts als $v \in W$.
(b) Toon aan: als $x \in v + W$, dan $x + W = v + W$.
(c) Beschouw de affiene deelruimten $U = v + W$ en $U' = v' + W'$. Toon aan dat

$$U + U' = \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}$$

gelijk is aan de affiene deelruimte $(v + v') + (W + W')$.

Oplossing 2.54.

(a) Als $v + W$ een deelruimte van V is, dan is $0 \in v + W \subseteq V$. Dus bestaat er een $w \in W$ waarvoor $0 = v + w$. Hieruit volgt dat $v \in W$. Als $v \in W$, dan is $v + W \subseteq W$ want voor iedere $w \in W$ geldt er dat $v + w \in W$. Ook is $W \subseteq v + W$, want voor iedere $w \in W$ geldt dat $w = v + (w - v) \in v + W$. Dus is $v + W = W$ en bijgevolg is $v + W$ een deelruimte van V.
(b) Omdat $x \in v + W$, bestaat er een $w \in W$ zodat $x = v + w$. We tonen aan dat hieruit volgt dat $x + W \subseteq v + W$. Een willekeurig element $x + w' \in x + W$ kunnen we schrijven als $v + (w + w')$, hetgeen duidelijk behoort tot $v + W$, daar W een deelruimte is en w en w' behoren tot W. Rest ons nog aan te tonen dat $v + W \subseteq x + W$: $v + w'$ behoort ook tot $x + W$ voor alle $w' \in W$, want $v + w' = x + (-w + w') \in x + W$. Een andere mogelijkheid om deze tweede inclusie aan te tonen is te steunen op het feit dat we de rollen van x en v kunnen omwisselen. Inderdaad, uit $x = v + w \in v + W$ halen we, wegens $v = x - w$, dat $v \in x + W$, en zo kunnen we analoog als daarnet bewijzen dat $v + W \subseteq x + W$.
(c) Kies $x \in U + U'$. Dan bestaan er $u \in U$, $u' \in U'$, zodat $x = u + u'$. Dan bestaan er $w \in W$, $w' \in W'$, zodat $u = v + w$ en $u' = v' + w'$. Dus $x = v + w + v' + w' = (v + v') + (w + w') \in (v + v') + (W + W')$. Een willekeurig element van $U + U'$ is dus bevat in $(v + v') + (W + W')$. Bijgevolg, $U + U' \subseteq (v + v') + (W + W')$. Kies nu $x \in (v + v') + (W + W')$. Dan is $x = (v + v') + (w + w')$ voor zekere $w \in W, w' \in W'$. Dus $x = (v + w) + (v' + w')$ en bijgevolg bevat in $(v + W) + (v' + W') = U + U'$. We besluiten dat $(v + v') + (W + W') \subseteq U + U'$.

Oefening 2.55. (T) Beschouw een $n \times m$-matrix A. Toon aan dat $\mathrm{rk}\, A = 1$ als en slechts als $A = xy^t$ voor niet-nulvectoren $x \in K^n$ en $y \in K^m$.

Oplossing 2.55.
$\boxed{\Longrightarrow}$ We onderstellen dat $\mathrm{rk}\, A = 1$. Schrijven we $A = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$, dan is $\dim \mathrm{span}(\{A_1, \ldots, A_m\}) = 1$. Bijgevolg is er minstens één niet-nulkolom, stel dat $A_i \neq 0$. Omdat $\mathrm{span}(\{A_1, \ldots, A_m\})$ 1-dimensionaal is, is elke andere kolomvector een veelvoud van de niet-nulkolom A_i, stel $A_j = \lambda_j A_i$ (dus $\lambda_i = 1$). We vinden

$$A_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = (A_1, A_2, \ldots, A_m) = A\ ,$$

dus we kunnen $x = A_i$ en $y = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)^t$ nemen.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Stel dat $A = xy^t$ voor niet-nulvectoren $x \in K^n$ en $y \in K^m$, en noteer $y = (y_1, \dots, y_m)^t$. Dan is $A = xy^t = (xy_1, xy_2, \dots, xy_m)$, waarbij $\{xy_1, \dots, xy_m\}$ de kolommen van A zijn. Gezien y geen nulvector is, heeft y minstens één niet-nulentry, stel dat $y_i \neq 0$. Dan is $xy_j = (y_j y_i^{-1})xy_i$, dus elke kolom van A is een scalair veelvoud van xy_i. Bijgevolg is $\operatorname{span}(\{xy_1, \dots, xy_m\}) = \operatorname{span}(\{xy_i\})$, en gezien xy_i geen nulvector is, is $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{span}(\{xy_i\}) = 1$.

Oefening 2.56. (T) Beschouw een matrix $A \in M_{n,m}$, en zij $B \in M_{n-s,m-t}$ een matrix bekomen uit A door s rijen en t kolommen te schrappen. Toon dan aan dat $\operatorname{rk} A \leqslant s + t + \operatorname{rk} B$.

Oplossing 2.56. Stel dat B' de $n \times (m-t)$-matrix is die je bekomt door uit A de t kolommen te verwijderen, die ook voor het maken van B verwijderd zijn. Noteer nu de kolommen van B' als $A_1, A_2, \dots, A_{m-t}$, en de overige t kolommen uit A als $A_{m-t+1}, \dots, A_m$. Dan is

$$\begin{aligned}
\operatorname{rk} A &= \dim \operatorname{span}(\{A_1, \dots, A_m\}) = \dim(\operatorname{span}(\{A_1, A_2, \dots, A_{m-t}\}) + \operatorname{span}(\{A_{m-t+1}, \dots, A_m\})) \\
&\leqslant \dim \operatorname{span}(\{A_1, A_2, \dots, A_{m-t}\}) + \dim \operatorname{span}(\{A_{m-t+1}, \dots, A_m\}) \\
&= \operatorname{rk} B' + \dim \operatorname{span}(\{A_{m-t+1}, \dots, A_m\}) \leqslant \operatorname{rk} B' + t \; .
\end{aligned}$$

We kunnen nu hetzelfde argument doorvoeren met B' en B, en de s rijen, om te vinden dat

$$\operatorname{rk} B' \leqslant \operatorname{rk} B + s \; ,$$

waaruit de te bewijzen volgt.

Oefening 2.57. (B) Zij L_A de lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bekomen door linkse vermenigvuldiging met de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dus de afbeelding

$$L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

(a) Bepaal de dimensie van de kern en van de beeldruimte *zonder* kern en beeldruimte uit te rekenen.
(b) Is deze afbeelding een bijectie? Zo ja, bepaal de inverse afbeelding.
(c) Bepaal nu een basis van de kern en een basis van de beeldruimte.
(d) Bepaal het inverse beeld van $(2,1,1)^t$, dit is $L_A^{-1}((2,1,1)^t) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid L_A(v) = (2,1,1)^t\}$.

Oplossing 2.57.

(a) Aan de hand van het rijreductiealgoritme bepalen we dat $\operatorname{rk}(A) = 2$. Uit Lemma 2.5.13 en Stelling 2.5.14 volgt dat $\dim(\ker L_A) = 1$. Uit $\dim(\ker L_A) + \dim(\operatorname{im} L_A) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ volgt dan dat de dimensie van de beeldruimte gelijk is aan 2.
(b) De afbeelding L_A is niet injectief omdat $\ker(L_A) \neq \{0\}$. Bijgevolg is L_A ook niet bijectief.
(c) We bepalen eerst de kern. Deze bestaat uit alle vectoren $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$ waarvoor $Av = (0,0,0)^t$. We vinden het stelsel

$$\begin{cases} 2x + 8y + 5z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} .$$

Met behulp van het rijreductiealgoritme vinden we de oplossinsverzameling van dit stelsel. We vinden dat de kern wordt gegeven door $\{(r, r, -2r)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$. Iedere element in de kern verschillend van de nulvector, vormt een basis voor de kern want deze is ééndimensionaal. Bijvoorbeeld, $\{(1,1,-2)^t\}$ is een basis voor de kern. Een basis voor de beeldruimte wordt gevormd door twee lineair onafhankelijke elementen in $\operatorname{im}(L_A)$. Bijvoorbeeld, $L_A((1,0,0)^)t = (2,1,1)^t$ en $L_A((0,1,0)^t) = (8,3,1)^t$ vormen een basis.
(d) Uit $L_A((1,0,0)^t) = (2,1,1)^t$ volgt dat $L_A^{-1}((2,1,1)^t) = (1,0,0)^t + \ker L_A = \{(1+r, r, -2r)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Oefening 2.58. (B) Beschouw de stelsels uit Oefeningen 1.1 die je gemaakt hebt. Wanneer we zo'n stelsel kort noteren als $AX = w$, bepaal dan voor elk van deze stelsels $\text{rk}(A)$, $\text{rk}(A|w)$ en de dimensie van de oplossingsverzameling wanneer die niet ledig is.

Oplossing 2.58.

1.1(a) $\text{rk}(A) = 3$, $\text{rk}(A|w) = 3$, $\dim V = 0$;
1.1(b) $\text{rk}(A) = 2$, $\text{rk}(A|w) = 3$;
1.1(c) $\text{rk}(A) = 2$, $\text{rk}(A|w) = 2$, $\dim V = 1$;
1.1(d) $\text{rk}(A) = 2$, $\text{rk}(A|w) = 2$, $\dim V = 2$.
1.1(e) $\text{rk}(A) = 4$, $\text{rk}(A|w) = 4$, $\dim V = 0$;
1.1(f) $\text{rk}(A) = 3$, $\text{rk}(A|w) = 3$, $\dim V = 2$;
1.1(g) $\text{rk}(A) = 2$, $\text{rk}(A|w) = 2$, $\dim V = 2$;
1.1(h) $\text{rk}(A) = 1$, $\text{rk}(A|w) = 2$;
1.1(i) $\text{rk}(A) = 2$, $\text{rk}(A|w) = 2$, $\dim V = 0$.

Oefening 2.59. (T) Zij $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ en $v, w \in \mathbb{R}^m$. Onderstel dat de oplossingsverzameling van $AX = v$ 2-dimensionaal is. Als het stelsel $AX = w$ niet strijdig is, welke dimensie heeft de oplossingsverzameling dan?

Oplossing 2.59. Uit Stelling 2.5.14 volgt dat, als een stelsel van de vorm $AX = u$ niet strijdig is, dat de dimensie van de oplossingsverzameling dan $n - \text{rk}(A)$ is. Als de oplossingsverzameling van $AX = v$ 2-dimensionaal is, is dat stelsel niet strijdig, dus $\text{rk}(A) = n - 2$. Als het stelsel $AX = w$ niet strijdig is, is de oplossingsverzameling daarvan dus ook 2-dimensionaal.