Lineaire Algebra en Meetkunde I
Oefeningen

1$^{\text{e}}$ bachelor wiskunde

Heb je vragen? Stuur gerust een mail of kom langs!

Lins Denaux
lins.denaux@ugent.be
De Sterre, gebouw S8, bureau 130.015 (routebeschrijving)

Deze bundel bevat alle oefeningen voor het vak Lineaire Algebra en Meetkunde I voor studenten 1$^{\text{e}}$ bachelor wiskunde. Zorg dat je ze elke oefeningenles meebrengt! De oefeningen worden gemarkeerd met een letter, naargelang het aantal en het type stappen dat nodig zijn om tot een oplossing te komen. Ruwweg betekenen deze het volgende.

(D) **D**efinitie: een oefening die je kan oplossen door definities toe te passen.

(B) **B**asis: deze oefening kan je doorgaans in één stap oplossen, gebruik makend van een definitie, rekentechniek, eigenschap (die eerder aan bod gekomen kan zijn),...

(T) **T**ussenstappen: bij deze oefening moet je via één of enkele tussenstappen of tussenresultaten tot de oplossing komen. Je combineert dus definities, rekentechnieken, eigenschappen,...

(U) **U**itdaging: een uitdagende oefening waarbij je wat creativiteit nodig hebt om tot een oplossing te komen, van een niveau dat niet verwacht wordt op het examen.

Oefeningen op hoofdstuk 3

Ruimten van homomorfismen

3.1 De vectorruimte $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

Oefening 3.1. (D) Beschouw de volgende twee lineaire afbeeldingen:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x,y)^t \mapsto (2x, 2y, x-y)^t \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x,y)^t \mapsto (y, x, y)^t \end{aligned}$$

Bepaal $f + 2g$ en $\ker(f + 2g)$.

Oplossing 3.1. Per definitie is

$$(f+2g)((x,y)^t) = f((x,y)^t) + 2g((x,y)^t) = (2x, 2y, x-y)^t + 2(y,x,y)^t = (2x+2y, 2x+2y, x+y)^t \ ,$$

dus

$$f + 2g : (x,y)^t \mapsto (2(x+y), 2(x+y), x+y)^t \ .$$

De kern is

$$\{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid (f+2g)((x,y)^t) = (0,0,0)\} = \{(r, -r) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \mathbb{R}\} \ .$$

Oefening 3.2. (D) Bewijs Lemma 3.1.7: als $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ en $f \in \mathrm{Hom}_K(W, U)$, dan is $f \circ g \in \mathrm{Hom}_K(V, U)$, voor K-vectorruimten V, W, U.

Oplossing 3.2. Uit de definitie van de samenstelling volgt dat $f \circ g$ een afbeelding van V naar U is. We moeten dus aantonen dat deze afbeelding lineair is. Zij $v, v' \in V$ en $\lambda, \mu \in K$ willekeurig. Uit de volgende gelijkheden volgt dan dat $f \circ g$ lineair is.

$$\begin{aligned} f \circ g(\lambda v + \mu v') &= f\big(g(\lambda v + \mu v')\big) && \text{(definitie samenstelling)} \\ &= f\big(\lambda g(v) + \mu g(v')\big) && \text{(lineariteit } g) \\ &= \lambda f\big(g(v)\big) + \mu f\big(g(v')\big) && \text{(lineariteit } f) \\ &= \lambda (f \circ g)(v) + \mu (f \circ g)(v') && \text{(definitie samenstelling)} \end{aligned}$$

Dus inderdaad, $f \circ g \in \mathrm{Hom}_K(V, U)$.

Oefening 3.3. Beschouw twee K-vectorruimten V en W.

(a) **(D)** Neem $a, b \in V$ en $d \in W \setminus \{0\}$. Bepaal of de volgende deelverzamelingen van $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ deelruimten zijn van $\mathrm{Hom}_K(V, W)$?
  (i) $U_1 = \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(a) = 0\}$,
  (ii) $U_2 = \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(a) = d\}$,
  (iii) $U_3 = \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(a) = f(b)\}$,
  (iv) $U_4 = \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(a) = 0 \text{ en } f(b) = 0\}$.

(b) **(T)** Veronderstel dat $\dim(W) \neq 0$ en neem $a, b, c \in V$. Beschouw de volgende deelverzameling van $\mathrm{Hom}_K(V, W)$:

$$U_5 = \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(a) = f(b) \text{ of } f(c) = 0\} .$$

Geef een nodige en voldoende voorwaarde op a, b, c opdat U_5 een deelruimte is.

Oplossing 3.3.

(a) (i) Als $f, g \in U_1$, dan geldt voor $\lambda f + \mu g$, met $\lambda, \mu \in K$, dat

$$(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda f(a) + \mu g(a) = 0 .$$

Bijgevolg is $\lambda f + \mu g \in U_1$, voor iedere keuze van λ en μ. Dus is U_1 een deelruimte.

(ii) De nulfunctie $O_{V,W}$ zit niet in U_2, dus U_2 kan geen deelruimte zijn.

(iii) Merk op dat de voorwaarde $f(a) = f(b)$ equivalent is met de voorwaarde $f(a - b) = 0$. Dus vinden we, analoog aan de redenering in (i) dat U_3 een deelruimte is.

(iv) Merk op dat

$$\begin{aligned} U_4 &= \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(a) = 0 \text{ en } f(b) = 0\} \\ &= \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(a) = 0\} \cap \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(b) = 0\} . \end{aligned}$$

Dus is U_4 een deelruimte als doorsnede van twee deelruimten.

(b) We weten dat $U_5 = U_5' \cup U_5''$ met

$$\begin{aligned} U_5' &= \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(a) = f(b)\} = \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(a - b) = 0\} \\ U_5'' &= \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(c) = 0\} \end{aligned}$$

Veronderstel dat er een element $f \in U_5' \setminus U_5''$ en een element $g \in U_5'' \setminus U_5'$ bestaan. Dan zijn f en g bevat in U_5, maar is $f + g \notin U_5$. Dus kan U_5 enkel een deelruimte zijn als $U_5' \subseteq U_5''$ of $U_5'' \subseteq U_5'$.
Als $a - b = 0$, dan is $U_5' = \mathrm{Hom}_K(V, W)$ en is U_5'' zeker bevat in U_5'. Analoog, als $c = 0$, dan is U_5' zeker bevat in U_5''. Als $a - b \neq 0 \neq c$ en $\{a - b, c\}$ een lineair afhankelijk stel is, dan is $f(a - b) = 0$ als en slechts als $f(c) = 0$. Dan is dus $U_5' = U_5''$. We besluiten dat U_5 sowieso een deelruimte is als $\{a - b, c\}$ een lineair afhankelijk stel is.
Veronderstel nu dat $\{a - b, c\}$ een lineair onafhankelijk stel is. We weten dat er een $w \in W \setminus \{0\}$ bestaat omdat $\dim(W) \neq 0$. Aangezien $\{a - b, c\}$ een lineair onafhankelijk stel is, kunnen we V schrijven als directe som: $V = \langle a - b \rangle \oplus \langle c \rangle \oplus V'$ voor een zekere V'. Een willekeurig element van V kan dan geschreven worden als $\lambda(a - b) + \mu c + v'$, met $\lambda, \mu \in K$ en $v' \in V'$. We definiëren $f_1 \in \mathrm{Hom}(V, W)$ als volgt: $f_1(\lambda(a - b) + \mu c + v') = \lambda w$. Ga zelf na dat dit inderdaad een lineaire afbeelding is. Het is duidelijk dat $f_1 \notin U_5'$, maar $f_1 \in U_5''$. Analoog definiëren we $f_2 \in \mathrm{Hom}(V, W)$ als volgt $f_2(\lambda(a - b) + \mu c + v') = \mu w$. Ga opnieuw zelf na dat dit inderdaad een lineaire afbeelding is. Nu is het duidelijk dat $f_2 \in U_5'$, maar $f_2 \notin U_5''$. Uit het bestaan van f_1 en f_2 volgt dan dat U_5 geen deelruimte is.
We besluiten: U_5 is een deelruimte als en slechts als $\{a - b, c\}$ een lineair afhankelijk stel is.

Oefening 3.4. (T) Beschouw drie eindigdimensionale K-vectorruimten U, V, W en twee afbeeldingen $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Toon aan dat

$$\dim(\mathrm{im}(f) \cap \ker(g)) = \dim(\mathrm{im}(f)) - \dim(\mathrm{im}(gf)) = \dim(\ker(gf)) - \dim(\ker(f)) .$$

Hint: Beschouw $g\big|_{f(U)}$.

Oplossing 3.4. We beschouwen de afbeelding $g|_{f(U)} : f(U) \to W$. Dit is de restrictie van g to de beeldverzameling $\mathrm{im}(f) \leqslant V$. We passen hierop de dimensiestelling toe en vinden dat

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{im}(f)) &= \dim(\ker(g|_{f(U)})) + \dim(\mathrm{im}(g|_{f(U)})) \\ &= \dim(\{v \in \mathrm{im}(f) \mid g(v) = 0\}) + \dim(\{g(v) \mid v \in \mathrm{im}(f)\}) \\ &= \dim(\mathrm{im}(f) \cap \ker(g)) + \dim(\{(gf)(w) \mid w \in U\}) \\ &= \dim(\mathrm{im}(f) \cap \ker(g)) + \dim(\mathrm{im}(gf)) . \end{aligned}$$

Hieruit volgt dan de gelijkheid $\dim(\mathrm{im}(f) \cap \ker(g)) = \dim(\mathrm{im}(f)) - \dim(\mathrm{im}(gf))$. De tweede gelijkheid volgt hieruit dankzij toepassingen van de dimensiestelling voor de afbeeldingen $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ en $gf \in \mathrm{Hom}(U, W)$: $\dim(U) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$ en $\dim(U) = \dim(\ker(gf)) + \dim(\mathrm{im}(gf))$.

Oefening 3.5. (T) Beschouw twee eindigdimensionale K-vectorruimten V en W, en zij φ een isomorfisme van V naar W. Beschouw de afbeelding

$$\psi : \mathrm{Hom}_K(V, V) \to \mathrm{Hom}_K(W, W) : f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} .$$

Toon volgende puntjes aan om te bewijzen dat ψ een isomorfisme van $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ naar $\mathrm{Hom}_K(W, W)$ vormt.

(a) Voor alle f in $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ geldt dat $\psi(f)$ behoort tot $\mathrm{Hom}_K(W, W)$. (Als dit geldt zeggen we dat ψ *goed gedefinieerd* is.)

(b) De afbeelding ψ is lineair. Met andere woorden, toon aan dat voor alle $f, f' \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ en $\lambda, \mu \in K$ geldt dat

$$\psi(\lambda f + \mu f') = \lambda\psi(f) + \mu\psi(f') .$$

Hint: dit is een gelijkheid tussen lineaire afbeeldingen van W naar W. Twee lineaire afbeeldingen zijn gelijk als en slechts als ze elke $w \in W$ afbeelden op hetzelfde beeld.

(c) ψ is bijectief.

Oplossing 3.5. Merk vooreerst op dat een isomorfisme tussen vectorruimten een bijective lineaire afbeelding is, dus het aantonen van puntjes (a), (b) en (c) komt precies overeen met aantonen dat ψ een isomorfisme is.

(a) Zij f een element van $\mathrm{Hom}_K(V, V)$. De afbeelding φ^{-1} gaat van W naar V, f gaat van V naar V, en φ gaat van V naar W. Hieruit volgt dat $\psi(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ een afbeelding van W naar W is. Dat $\psi(f)$ lineair is volgt uit Oefening 3.2, die ons zegt dat de samenstellingen van lineaire afbeeldingen wederom lineair is.

(b) Zij $f, f' \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ en $\lambda, \mu \in K$ willekeurig. Beschouw een willekeurig element w in W.

$$\begin{aligned}
(\psi(\lambda f + \mu f'))(w) &= (\varphi \circ (\lambda f' + \mu f') \circ \varphi^{-1})(w) && \text{(definitie } \psi) \\
&= (\varphi((\lambda f + \mu f')(\varphi^{-1}(w))) && \text{(definitie } \circ) \\
&= \varphi(\lambda f(\varphi^{-1}(w)) + \mu f'(\varphi^{-1}(w))) && \text{(bewerkingen in } \mathrm{Hom}_K(V, V)) \\
&= \lambda\varphi(f(\varphi^{-1}(w))) + \mu\varphi(f'(\varphi^{-1}(w))) && (\varphi \text{ lineair}) \\
&= \lambda(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(w) + mu(\varphi \circ f' \circ \varphi^{-1})(w) && \text{(definitie } \circ) \\
&= \lambda\psi(f)(w) + \mu\psi(f')(w) && \text{(definitie } \psi) \\
&= (\lambda\psi(f) + \mu\psi(f'))(w) && \text{(bewerkingen in } \mathrm{Hom}_K(W, W))
\end{aligned}$$

Aangezien w willekeurig was, is $\psi(\lambda f + \mu f) = \lambda\psi(f) + \mu\psi(f')$, en dus is ψ lineair.

(c) We gaan nu dat ψ injectief is. Hiervoor onderstellen we dat $\psi(f) = 0$ voor een zekere f in $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ en wensen we aan te tonen dat $f = 0$.

$$\begin{aligned}
\psi(f) = 0 &\Leftrightarrow \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = 0 && \text{(definitie } \psi) \\
&\Leftrightarrow \varphi(f(\varphi^{-1}(w))) = 0, \quad \forall w \in W && \text{(definitie } \circ) \\
&\Leftrightarrow \varphi(f(v)) = 0, \quad \forall v \in V && (\varphi \text{ bijectief}) \\
&\Leftrightarrow f(v) = 0, \quad \forall v \in V && (\varphi \text{ bijectief}) \\
&\Leftrightarrow f = 0
\end{aligned}$$

We besluiten dat ψ injectief is. Zij g een willekeurig element in $\mathrm{Hom}_K(W, W)$. Dan kan je nagaan zoals in puntje (a) dat $\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ behoort tot $\mathrm{Hom}_K(V, V)$. We vinden dat

$$\psi(\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi) = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ g \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) = g .$$

Aangezien we elke $g \in \mathrm{Hom}_K(W, W)$ bevat is in $\mathrm{im}(\psi)$ besluiten we dat ψ surjectief is.

Oefening 3.6. (T) Beschouw twee eindigdimensionale K-vectorruimten V en W, met $\dim(W) > 0$, en kies $v \in V \setminus \{0\}$ vast. Toon aan dat de afbeelding

$$\varphi : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to W : f \mapsto f(v)$$

een lineaire surjectieve afbeelding is. Onder welke voorwaarde is φ injectief?

Oplossing 3.6. Omdat $f(v) \in W$ voor alle f in $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ is φ goed gedefinieerd. Dat φ lineair is zien we als volgt. Zij $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V, W)$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ willekeurig. Er geldt dat

$$\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v) = \lambda_1 f_1(v) + \lambda_2 f_2(v) = \lambda_1 \varphi(f_1) + \lambda_2 \varphi(f_2),$$

waaruit volgt dat φ lineair is.

We gaan nu na dat φ surjectief is. Dit betekent dat we voor alle $w \in W$ een $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ kunnen vinden zodanig dat $f(v) = w$. Met andere woorden, we zoeken, voor elke $w \in W$, een lineaire afbeelding f_w van V naar W die v op w afbeeldt. Zij V' het complement van $\langle v \rangle$ in V, m.a.w., V' is zo dat $V = v \oplus V'$. Ieder element van V kan dan op unieke wijze geschreven worden als $\lambda v + v'$, met $v' \in V'$ en $\lambda \in V$. Kies nu $w \in W$ willekeurig. We definiëren dan $f_w(\lambda v + v') = \lambda w$. Ga zelf na dat f_w goed gedefinieerd is en een lineaire afbeelding bepaalt. Het is duidelijk dat $\varphi(f_w) = f_w(v) = w$. Aangezien w willekeurig gekozen was, volgt hieruit dat φ surjectief is.

Aangezien φ surjectief is, weten we dat uit de injectiviteit van φ meteen ook zou volgen dat φ een bijectie is. Dat zou betekenen dat de vectorruimten $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ en W bijectief zijn en daarom dus ook dezelfde dimensie zouden hebben. We weten echter dat $\dim(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = \dim(V)\dim(W)$. Dus zou $\dim(V) = 1$ moeten zijn aangezien $\dim(W) > 0$. Dit betekent dat $\dim(V) = 1$ een nodige voorwaarde is voor injectiviteit. We gaan nu na dat het ook een voldoende voorwaarde is. Zij dus $\dim(V) = 1$, dan is $V = \langle v \rangle$. Onderstel dat $\varphi(g) = 0$ voor een zekere g in $\mathrm{Hom}_K(V, W)$. Dit betekent dat $g(v) = 0$ en dus ook dat $g(\lambda v) = 0$ voor alle $\lambda \in K$. Aangezien in dit geval $V = \langle v \rangle$ hebben we dat $g = 0$. Hieruit volgt dat φ injectief is als en slechts als $\dim V = 1$.

We kunnen deze voorwaarde voor de injectiviteit ook rechtstreeks afleiden. Veronderstel dat $f \in \ker(\varphi)$. Dan geldt er dat $f(v) = 0$. Opdat φ injectief zou zijn, moet hieruit volgen dat f de nulafbeelding is. Als $\dim(V) = 1$, volgt onmiddellijk uit $f(v) = 0$ dat $f(v') = 0$ is voor alle $v' \in V$. Als $\dim(V) > 1$ (merk op dat $\dim(V) = 0$ onmogelijk is), kunnen we een afbeelding f construeren waarvoor enerzijds $f(v) = 0$, maar waarvoor anderzijds een $v' \in V \setminus \langle v \rangle$ bestaat met $f(v') \neq 0$.