Lineaire Algebra en Meetkunde I
Oefeningen

1$^{\text{e}}$ bachelor wiskunde

Heb je vragen? Stuur gerust een mail of kom langs!

Lins Denaux
lins.denaux@ugent.be
De Sterre, gebouw S8, bureau 130.015 (routebeschrijving)

Deze bundel bevat alle oefeningen voor het vak Lineaire Algebra en Meetkunde I voor studenten 1$^{\text{e}}$ bachelor wiskunde. Zorg dat je ze elke oefeningenles meebrengt! De oefeningen worden gemarkeerd met een letter, naargelang het aantal en het type stappen dat nodig zijn om tot een oplossing te komen. Ruwweg betekenen deze het volgende.

(D) **D**efinitie: een oefening die je kan oplossen door definities toe te passen.

(B) **B**asis: deze oefening kan je doorgaans in één stap oplossen, gebruik makend van een definitie, rekentechniek, eigenschap (die eerder aan bod gekomen kan zijn),...

(T) **T**ussenstappen: bij deze oefening moet je via één of enkele tussenstappen of tussenresultaten tot de oplossing komen. Je combineert dus definities, rekentechnieken, eigenschappen,...

(U) **U**itdaging: een uitdagende oefening waarbij je wat creativiteit nodig hebt om tot een oplossing te komen, van een niveau dat niet verwacht wordt op het examen.

Oefeningen op hoofdstuk 4

Matrices en determinanten

4.1 Matrixvoorstellingen van lineaire afbeeldingen en coördinatentransformaties

Oefening 4.1. (D) Beschouw een veld K en de deelruimte V van $K[x]$ bestaande uit alle veeltermen van graad ten hoogste 4. Een basis van V wordt gegeven door $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Bepaal de matrix van de afleidingsoperator

$$V \to V : a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \mapsto b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$$

ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.

Oplossing 4.1. We berekenen de beelden van de elementen van $\mathcal{B}$. Deze bepalen de kolommen van de matrix geassocieerd aan de operator. We vinden de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Oefening 4.2. (B) Beschouw twee verschillende basissen

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0)^t, (0,1,1)^t, (0,-1,0)^t\} \quad \text{en} \quad \mathcal{B}' = \{(1,0,0)^t, (1,0,1)^t, (0,1,-1)^t\}$$

van $V = \mathbb{R}^3$, en beschouw de basissen $\mathcal{C} = \{(1,0)^t, (0,-1)^t\}$ en $\mathcal{C}' = \{(1,1)^t, (1,-1)^t\}$ van $W = \mathbb{R}^2$. Beschouw de lineaire afbeelding $f : V \to W$ gegeven door

$$f\left((a,b,c)^t\right) = (a+b, b+c)^t ,$$

beschreven tegenover de standaardbasis.

(a) Bepaal de matrix A van f ten opzichte van de basissen $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$.
(b) Bepaal de matrix B van f ten opzichte van de basissen $\mathcal{B}'$ en $\mathcal{C}'$.
(c) Bepaal de transitiematrix Q van $\mathcal{B}$ naar $\mathcal{B}'$.
(d) Bepaal de transitiematrix P van $\mathcal{C}$ naar $\mathcal{C}'$, en bepaal ook P^{-1}.
(e) Ga na dat $B = P^{-1}AQ$.

Oplossing 4.2.

(a) Het is duidelijk dat

$$\begin{aligned} f\left((1,0,0)^t\right) &= (1,0)^t = 1 \cdot (1,0)^t + 0 \cdot (0,-1)^t , \\ f\left((0,1,1)^t\right) &= (1,2)^t = 1 \cdot (1,0)^t + (-2) \cdot (0,-1)^t , \\ f\left((0,-1,0)^t\right) &= (-1,-1)^t = (-1) \cdot (1,0)^t + 1 \cdot (0,-1)^t , \end{aligned}$$

waaruit onmiddelijk volgt dat

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Analoog als in (a) vinden we dat

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

(c) We vinden dat

$$\begin{aligned} (1,0,0)^t &= 1 \cdot (1,0,0)^t + 0 \cdot (0,1,1)^t + 0 \cdot (0,-1,0)^t , \\ (1,0,1)^t &= 1 \cdot (1,0,0)^t + 1 \cdot (0,1,1)^t + 1 \cdot (0,-1,0)^t , \\ (0,1,-1)^t &= 0 \cdot (1,0,0)^t + (-1) \cdot (0,1,1)^t + (-2) \cdot (0,-1,0)^t . \end{aligned}$$

Hiermee kunnen we onmiddellijk de transitiematrix Q opstellen:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

(d) Analoog kunnen we de transitiematrix P opstellen:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

De inverse matrix wordt dan gegeven door

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

(e) Dit klopt. Reken dit zelf na.

Oefening 4.3. (T) Beschouw de deelruimte V van $\mathbb{R}[x]$ bestaande uit alle veeltermen van graad ten hoogste 2, en stel $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ en $\mathcal{B}' = \{1, 1+x, 3+4x+2x^2\}$. Beschouw de lineair operator $f \in \mathrm{End}(V)$ gegeven door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$. Bepaal de matrixvoorstelling van f ten opzichte van de basis $\mathcal{B}'$.

Oplossing 4.3. Er zijn twee oplossingsmethoden mogelijk. Een eerste oplossingsmethode maakt gebruik van Stelling 4.2.5. We werken deze niet in detail uit, maar geven enkel de stappen aan. De transformatiematrix Q van de basis $\mathcal{B}$ naar de basis $\mathcal{B}'$ kan je opstellen, door de coördinaten van de nieuwe basis t.o.v. de oude basis in de kolommen van Q te zetten:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

De matrix Q^{-1} is dan transformatiematrix van de basis $\mathcal{B}'$ naar de basis $\mathcal{B}$:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

De matrixvoorstelling van f ten opzichte van $\mathcal{B}'$ wordt dan gegeven door $Q^{-1}AQ$:

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

De tweede oplossingsmethode gaat als volgt. Uit de gegeven matrix voor f halen we dat $f(1) = 1$, dat $f(x) = 1 + 2x$ en dat $f(x^2) = 1 + 2x + 3x^2$. Voor de elementen van $\mathcal{B}'$ geldt dus dat

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 = 1 \cdot (1) + 0 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (3 + 4x + 2x^2) \ , \\ f(1 + x) &= f(1) + f(x) = 2 + 2x = 0 \cdot (1) + 2 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (3 + 4x + 2x^2) \ , \\ f(3 + 4x + 2x^2) &= 3f(1) + 4f(x) + 2f(x^2) = 9 + 12x + 6x^2 = 0 \cdot (1) + 0 \cdot (1 + x) + 3 \cdot (3 + 4x + 2x^2) \ , \end{aligned}$$

Bijgevolg is de matrixvoorstelling van f ten opzichte van $\mathcal{B}'$ gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Oefening 4.4. (T) Beschouw een deelruimte V van $\mathbb{C}^3$ met basis

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 0)^t, (0, 1, 1)^t\} \ ,$$

en een deelruimte W van $\mathbb{C}^5$ met basis

$$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1, 0, 0)^t, (0, 0, 1, i, 0)^t, (0, 0, 0, 1, -i)^t\} \ .$$

We bekijken de volgende afbeelding

$$f : V \to \mathbb{C}^5 : (a, b, c)^t \mapsto (ai + b + ci, b(1 + i), b + c, b + ci, 0)^t \ .$$

(a) Toon aan dat $\text{im}(f) \subseteq W$. Hieruit volgt dan dat f een lineaire afbeelding van V naar W is.
(b) Bepaal de matrix van $f : V \to W$ ten opzichte van de gegeven basissen.

Oplossing 4.4.

(a) Aangezien ieder element van V een lineaire combinatie van elementen uit $\mathcal{B}$ is, en dus wordt afgebeeld op een lineaire combinatie van de beelden van de elementen van $\mathcal{B}$, volstaat het om te verfiëren dat het beeld van de beide elementen van $\mathcal{B}$ in W bevat is. Er geldt dat

$$\begin{aligned} f\left((1, 1, 0)^t\right) &= (1 + i, 1 + i, 1, 1, 0)^t \\ &= (1 + i) \cdot (1, 1, 1, 0, 0)^t + (-i) \cdot (0, 0, 1, i, 0)^t + 0 \cdot (0, 0, 0, 1, -i)^t \in W \ , \\ f\left((0, 1, 1)^t\right) &= (1 + i, 1 + i, 2, 1 + i, 0)^t \\ &= (1 + i) \cdot (1, 1, 1, 0, 0)^t + (1 - i) \cdot (0, 0, 1, i, 0)^t + 0 \cdot (0, 0, 0, 1, -i)^t \in W \ . \end{aligned}$$

(b) De bovenstaande uitdrukking van de beelden van de elementen in $\mathcal{B}$ als lineaire combinatie van elementen in $\mathcal{B}'$ laat ons meteen toe om de matrix van de afbeelding op te stellen ten opzichte van deze basissen:

$$\begin{pmatrix} 1 + i & 1 + i \\ -i & 1 - i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Oefening 4.5. (T) Beschouw de standaardbasis $\mathcal{B} = \{(1, 0)^t, (0, 1)^t\}$ in de vectorruimte $\mathbb{C}^2$ en de nieuwe basissen $\mathcal{B}' = \{(0, i)^t, (1, -i)^t\}$ en $\mathcal{C}' = \{v_1, v_2\}$. Beschouw de lineaire afbeelding

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : (x, y)^t \mapsto ((1 + i)x + (2 + i)y, x + (2 - i)y)^t \ .$$

Er geldt dat f ten opzichte van de basissen $\mathcal{B}'$ (originelen) en $\mathcal{C}'$ (beelden) wordt vastgelegd door de matrix

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 + i \\ -1 + i & -3i \end{pmatrix} \ .$$

(a) Bepaal de matrix van de afbeelding f ten opzichte van de standaardbasis $\mathcal{B}$ (zowel voor de originelen als de beelden).

(b) Bepaal de matrix voor overgang van de standaardbasis $\mathcal{B}$ naar de nieuwe basis $\mathcal{B}'$.
(c) Bepaal de vectoren v_1 en v_2 van de basis $\mathcal{C}'$.

Oplossing 4.5.

(a) Het beeld van de elementen van $\mathcal{B}$ bepaalt de kolommen van deze matrix. We vinden

$$B_f := \begin{pmatrix} 1+i & 2+i \\ 1 & 2-i \end{pmatrix} .$$

(b) We vinden onmiddellijk

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} .$$

(c) Noteer $v_1 = \lambda_1(1,0)^t + \mu_1(0,1)^t = (\lambda_1, \mu_1)^t$ en $v_2 = \lambda_2(1,0)^t + \mu_2(0,1)^t = (\lambda_2, \mu_2)^t$. De transitiematrix van $\mathcal{B}$ naar $\mathcal{C}'$ wordt dan gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

We weten dankzij Stelling 4.2.5 dat $P^{-1}B_f Q = A_f$. Hieruit volgt dan dat $B_f Q A_f^{-1} = P$. We vinden

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1+i & 2+i \\ 1 & 2-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ -1+i & -3i \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1+2i & 2-i \\ 1+2i & -2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1+i & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7i & -2+3i \\ 5+4i & 1+3i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dan dat $v_1 = (7i, 5+4i)^t$ en $v_2 = (-2+3i, 1+3i)^t$.

Oefening 4.6. (T) Deze oefening sluit aan bij Oefening 2.28. Beschouw de verzameling V van alle afbeeldingen σ van $B = \{1,2,3,4\}$ naar $\mathbb{Q}$ waarvoor

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \sigma(3) + \sigma(4) = 0 .$$

(a) Toon aan dat V een $\mathbb{Q}$-vectorruimte is van dimensie 3, en geef een basis voor V.
(b) Beschouw de afbeelding $\alpha : V \to V$ die een afbeelding $\sigma \in V$ afbeeldt op de afbeelding τ gedefinieerd door $\tau(n) := \sigma(5-n)$ voor alle $n \in B$. Toon aan dat α een lineaire operator is, en bepaal de matrix van deze operator ten opzichte van de basis die je in puntje (a) hebt bepaald.

Oplossing 4.6.

(a) We weten dankzij Oefening 3.2 dat de verzameling W van alle afbeeldingen van $B \to \mathbb{Q}$ een vectorruimte is. V is hiervan een deelverzameling. Het is dan zelf ook een $\mathbb{Q}$-vectorruimte als het een deelruimte is van W. Men kan dit eenvoudig nagaan met behulp van het criterium voor deelruimten. We definieerden in Oefening 3.2 ook al de afbeeldingen σ_a. Hier vinden we de afbeeldingen σ_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, die als volgt gedefinieerd zijn.

$$\sigma_i : B \to \mathbb{Q} : j \mapsto \delta_{ij} .$$

De verzameling $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ is dan een basis voor W. Een willekeurig element $\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3 + \lambda_4\sigma_4 \in W$ is dan bevat in V als en slechts als $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. (Ga dit zelf na.) Een willekeurig element van W kan dus geschreven worden als

$$\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\sigma_4 = \lambda_1(\sigma_1 - \sigma_4) + \lambda_2(\sigma_2 - \sigma_4) + \lambda_3(\sigma_3 - \sigma_4) .$$

De verzameling $\{\sigma_1 - \sigma_4, \sigma_2 - \sigma_4, \sigma_3 - \sigma_4\}$ is dan duidelijk voortbrengend voor V. Men kan ook eenvoudig nagaan dat ze lineair onafhankelijk is en dus is ze een basis. We vinden dat de dimensie van V gelijk is aan 3.

(b) De controle dat α een lineaire operator is, is rechtoe rechtaan en laten we over aan de lezer. Merk op dat $\alpha(\sigma_1) = \sigma_4$, dat $\alpha(\sigma_2) = \sigma_3$, dat $\alpha(\sigma_3) = \sigma_2$ en dat $\alpha(\sigma_4) = \sigma_1$. Hieruit volgt dan onmiddellijk dat

$$\begin{aligned}
\alpha(\sigma_1 - \sigma_4) &= \sigma_4 - \sigma_1 = -(\sigma_1 - \sigma_4) \ , \\
\alpha(\sigma_2 - \sigma_4) &= \sigma_3 - \sigma_1 = (\sigma_3 - \sigma_4) - (\sigma_1 - \sigma_4) \ , \\
\alpha(\sigma_3 - \sigma_4) &= \sigma_2 - \sigma_1 = (\sigma_2 - \sigma_4) - (\sigma_1 - \sigma_4) \ .
\end{aligned}$$

Daaruit halen we dat de matrix van α ten opzichte van de basis $\{\sigma_1 - \sigma_4, \sigma_2 - \sigma_4, \sigma_3 - \sigma_4\}$ van V gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Oefening 4.7. (T) Beschouw een K-vectorruimte V van dimensie n en een K-vectorruimte W van dimensie m. Beschouw nu een lineaire afbeelding $f : V \to W$, met $f^* : W^* \to V^*$ de corresponderende duale afbeelding tussen de duale ruimten. Toon aan: als A_f de matrixvoorstelling is ten opzichte van een basis $\mathcal{B}$ in V en een basis $\mathcal{C}$ in W, dan is de getransponeerde matrix A_f^t de matrixvoorstelling van f^* ten opzichte van de duale basissen van $\mathcal{C}$, respectievelijk $\mathcal{B}$.

Dit is Stelling 8.3.9 in de cursus.

Oplossing 4.7. Noteer de elementen van de basissen als volgt: $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ en $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$. De duale basis van $\mathcal{B}$ noteren we dan als $\mathcal{B}^* = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ en de duale basis van $\mathcal{C}$ noteren we dan als $\mathcal{C}^* = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$. Er geldt dat $\beta_i(b_j) = \delta_{i,j}$ en dat $\gamma_i(c_j) = \delta_{i,j}$. De elementen van de matrix A_f noteren we als volgt: $(A_f)_{i,j} = a_{i,j}$. Aangezien de kolommen van A_f corresponderen met de beelden van de basisvectoren geldt er dat $f(b_i) = \sum_{k=1}^m a_{k,i} c_k$, voor $i = 1, \ldots, n$.

Om de elementen van A_{f^*}, de matrix behorend bij de duale afbeelding f^*, te bepalen moeten we de beelden van de elementen in de basis $\mathcal{C}^*$ vinden. We bekijken $f^*(\gamma_i)$:

$$(f^*(\gamma_i))(b_j) = \gamma_i(f(b_j)) = \gamma_i\left(\sum_{k=1}^m a_{k,j} c_k\right) = \sum_{k=1}^m a_{k,j} \gamma_i(c_k) = \sum_{k=1}^m a_{k,j} \delta_{i,k} = a_{i,j} \ .$$

Hieruit volgt dan voor een willekeurige vector $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ dat

$$(f^*(\gamma_i))(v) = (f^*(\gamma_i))\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (f^*(\gamma_i))(b_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{i,j} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \beta_j(v) = \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \beta_j\right)(v) \ .$$

Hierbij heben we meermaals gebruikt gemaakt van de lineariteit. Er volgt dat $f^*(\gamma_i) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \beta_j$. Dit betekent precies dat $(A_{f^*})_{j,i} = a_{i,j} = (A_f)_{i,j}$. Dus is $A_f^t = A_{f^*}$.

Oefening 4.8. (T) Beschouw een n-dimensionale K-vectorruimte V met basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, met $n \geqslant 2$. We definiëren een lineaire afbeelding f als volgt:

$$f : V \to V : v_i \mapsto \begin{cases} v_{i+1} & i \in \{1, \ldots, n-1\} \ , \\ 0 & i = n \ . \end{cases}$$

(a) Bepaal de matrixvoorstelling van f ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.
(b) Toon aan dat $f^{n-1} \neq 0$ maar $f^n = 0$. Leid hieruit af dat $A^{n-1} \neq 0$ en $A^n = 0$.
(c) Stel dat $g : V \to V$ een lineaire afbeelding is waarvoor $g^{n-1} \neq 0$ en $g^n = 0$. Toon aan dat er een basis $\mathcal{C}$ van V bestaat zodat de matrixvoorstelling van g ten opzichte van deze basis $\mathcal{C}$ juist de matrix bekomen in deel (a) van deze opgave, is.

(d) Stel M en N twee $n \times n$-matrices over K zodat $M^n = N^n = 0$ en $M^{n-1} \neq 0$ en $N^{n-1} \neq 0$. Toon aan dat de matrices M en N toegevoegd zijn aan elkaar.

Oplossing 4.8.

(a) We noteren de matrix van deze matrixvoorstelling als $A_f = A$. De i-de kolom van A correspondeert dan met het beeld van v_i. We vinden onmiddellijk dat

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Aangezien $f^{n-1}(v_1) = v_n \neq 0$, is $f^{n-1} \neq 0$. Anderzijds geldt voor elke basisvector dat $f^n(v_i) = 0$, en dus $f^n = 0$. Het tweede deel volgt nu dankzij $A^i = (A_f)^i = A_{f^i}$ (gevolg van Stelling 5.1.8).

(c) Vermits $g^{n-1} \neq 0$, bestaat er zeker een $v \in V$ zodanig dat $g^{n-1}(v) \neq 0$. We tonen aan dat de verzameling $\mathcal{C} = \{v, g(v), \cdots, g^{n-1}(v)\}$ een basis van V is. Merk op dat al deze vectoren verschillend zijn van de nulvector. Aangezien $\dim(V) = n$, volstaat het om aan te tonen dat de elementen van $\mathcal{C}$ lineair onafhankelijk zijn. Veronderstel dat $\lambda_0 v + \lambda_1 g(v) + \ldots + \lambda_{n-1} g^{n-1}(v) = 0$. Dan geldt er dat

$$\begin{aligned} 0 = g^{n-1}(0) &= g^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i g^i(v)\right) = \lambda_0 g^{n-1}(v) \\ 0 = g^{n-2}(0) &= g^{n-2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i g^i(v)\right) = \lambda_0 g^{n-2}(v) + \lambda_1 g^{n-1}(v) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ 0 = g^0(0) &= g^0\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i g^i(v)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i g^i(v) \; . \end{aligned}$$

Uit de eerste vergelijking volgt dat $\lambda_0 = 0$. Uit de tweede volgt dan dat $\lambda_1 = 0$, enz... We vinden dat $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$. Dus is $\mathcal{C}$ een lineair onafhankelijk stel, en dus ook een basis.
Het is dan ook duidelijk dat g de matrix A als matrixvoorstelling heeft t.o.v. $\mathcal{C}$.

(d) Uit het gegeven halen we dat M de matrixvoorstelling ten opzichte van een zekere basis $\mathcal{D}$ is van een zekere afbeelding h waarvoor $h^{n-1} \neq 0$ en $h^n = 0$. Deze afbeelding h heeft wegens (iii) ten opzichte van een goed gekozen basis $\mathcal{C}$ de matrixvoorstelling A. Bijgevolg bestaat er een inverteerbare matrix P (de matrix van basisovergang van $\mathcal{D}$ naar $\mathcal{C}$) zodanig dat $P^{-1}MP = A$.
Volledig analoog bestaat er een inverteerbare Q zodanig dat $Q^{-1}NQ = A$. We vinden dan dat $P^{-1}MP = Q^{-1}NQ$, wat we kunnen herschrijven als $M = (QP^{-1})^{-1}N(QP^{-1})$. Dus zijn M en N toegevoegd.

4.2 Determinant

Oefening 4.9. (B) Bereken de determinant van de volgende matrices:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -4 & -3 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & -6 & -8 \\ -2 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Oplossing 4.9.

(a) -7
(b) -12
(c) 20
(d) 42
(e) 39
(f) 12
(g) -184

Oefening 4.10. (B) Gegeven dat $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$, bepaal dan

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ g-2d & h-2e & i-2f \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix}$

Oplossing 4.10.

(a) Deze determinant bekom je door in de gegeven determinant eerst de laatste twee rijen te wisselen, en dan de eerste twee. We krijgen $(-1)^2 \cdot 4 = 4$.
(b) We kunnen per rij de gemeenschappelijke factor uit de determinant halen, en krijgen $2(-1)5 \cdot 4 = -40$.
(c) Algemeen is $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, voor $A \in M_n(K)$, dus hier krijgen we $2^3 \cdot 4 = 32$.
(d) We mogen bij de eerste rij -2 keer de derde rij optellen zonder dat de determinant wijzigt, dus de determinant is hier 4.

(e) We krijgen hier

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ g-2d & h-2e & i-2f \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ g-2d & h-2e & i-2f \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= 3 \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -12 \, .
\end{aligned}$$

Oefening 4.11. (T) Veronderstel dat $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ een afbeelding is die voldoet aan de volgende voorwaarden:

($\mathbf{F_1}$) $f(1,0,0,1) = 1$,
($\mathbf{F_2}$) voor alle $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ geldt $f(a,b,c,d) = -f(b,a,d,c)$,
($\mathbf{F_3}$) voor elke vaste keuze van $b,d \in \mathbb{R}$ is de afbeelding van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$ gedefinieerd door $(a,c) \mapsto f(a,b,c,d)$ een lineaire afbeelding.

Toon aan dat $f(a,b,c,d) = \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right|$.

Oplossing 4.11. Het is duidelijk dat $\mathbb{R}^4$ en $M_2(\mathbb{R})$ isomorf zijn als vectorruimten. We beschouwen het isomorfisme $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ dat gegeven wordt door $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto (a,b,c,d)$, en we noteren $g = f \circ \varphi$. Het volstaat nu om aan te tonen dat g de determinantafbeelding is.

Uit ($\mathbf{F_1}$) volgt dat $g\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = 1$. Uit ($\mathbf{F_2}$) volgt er dat $g\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = -g\left(\left(\begin{smallmatrix} b & a \\ d & c \end{smallmatrix}\right)\right)$ en uit ($\mathbf{F_3}$) volgt er dat $g(\lambda A_1 + \mu A_2, B) = \lambda g(A_1, B) + \mu g(A_2, B)$, voor kolommen A_1, A_2, B. We gaan nu de eigenschappen ($\mathbf{D_1}$)-($\mathbf{D_3}$) na.

($\mathbf{D_1}$) Uit ($\mathbf{F_3}$) halen we dat g lineair is in de eerste kolom. Er geldt ook dat

$$g(A, \lambda B_1 + \mu B_2) = -g(\lambda B_1 + \mu B_2, A) = -\lambda g(B_1, A) - \mu g(B_2, A) = \lambda g(A, B_1) + \mu g(A, B_2) \, ,$$

voor kolommen A, B_1, B_2, via ($\mathbf{F_2}$) en ($\mathbf{F_3}$). Dus is g ook lineair in de tweede kolom.
($\mathbf{D_2}$) Er zijn slechts twee kolommen in deze matrices, dus moeten we enkel controleren dat $g(A,A) = 0$ voor een kolom A. We weten echter dat $g(A,A) = -g(A,A)$ via ($\mathbf{F_2}$) en dus is $g(A,A) = 0$
($\mathbf{D_3}$) Dit is precies ($\mathbf{F_1}$).

We weten dat de determinantafbeelding de enige afbeelding op $M_2(\mathbb{R})$ is die aan deze voorwaarden voldoet. Dus is g de determinantafbeelding.

Oefening 4.12. (B) Beschouw $A \in M_n(\mathbb{C})$ met $A = -A^t$ en n oneven. Toon aan dat $\det(A) = 0$.

Oplossing 4.12. Er geldt dat $\det(A) = \det(-A^t) = (-1)^n \det(A^t) = -\det(A)$. In de tweede overgang hebben we n keer gebruik gemaakt van de lineariteit in de kolommen. Uit $\det(A) = -\det(A)$ volgt nu direct dat $\det(A) = 0$.

Oefening 4.13. (T) Beschouw een inverteerbare matrix $A \in M_n(K)$ met $A = (a_{ij}) = (A_1, \ldots, A_n)$, met A_i kolommen en $a_{i,j}$ elementen, en beschouw $B \in M_{n,1}(K)$. Noteer $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$. Toon aan dat het stelsel $Ax = B$ steeds een unieke oplossing heeft en dat die oplossing gegeven wordt door

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \det(A_1, \ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots, A_n) \quad \text{voor alle } 1 \leqslant i \leqslant n \, .$$

Dit is gekend als 'de regel van Cramer'. In de praktijk is dit echter geen efficiënte methode om de oplossing van een stelsel te bepalen.

Oplossing 4.13. We merkten al eerder op dat het stelsel $Ax = B$ oplosbaar is als A inverteerbaar is. De oplossing wordt gegeven door $x = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)B$. Noteer $B = (b_1, \ldots, b_n)^t$ Dan geldt er dat

$$x_i = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{adj}(A)B)_i = \frac{1}{\det(A)}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{i,k}b_k = \frac{1}{\det(A)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}A_{k,i}b_k \ .$$

Hierbij is $A_{k,i}$ de cofactor van het element $a_{k,i}$. We berekenen nu de volgende determinant door ontwikkeling naar de i-de kolom:

$$\det(A_1, \ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots, A_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}A_{k,i}b_k \ .$$

Het gestelde is hiermee bewezen.

Oefening 4.14. (T) Bestaat er een matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ zodat $\operatorname{adj}(A) = B$, met

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ?$$

Oplossing 4.14. We veronderstellen dat er zo een matrix bestaat en we noteren $A = (a_{ij})$. Dan geldt er dat $BA = AB = \det(A)I_3$. Daaruit halen we echter dat $\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(\det(A)I_3) = (\det(A))^3$. Aangezien $\det(B) = 0$, moet dan ook $\det(A) = 0$. Echter, dan is $BA = AB$ de (3×3)-nulmatrix. Bijgevolg geldt voor alle elementen $a_{ij} = 0$, met $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ en $(i, j) \neq (3, 3)$. Alle cofactoren van A zijn dan echter 0, dus is $B \neq \operatorname{adj}(A)$, een strijdigheid. Er bestaat dus geen matrix A met B als adjunctmatrix.

Oefening 4.15. (T) Toon aan dat voor elke inverteerbare matrix $A \in M_n(K)$ geldt dat

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-2}A \ .$$

Oplossing 4.15. We gaan dit na met behulp van de formule uit Stelling 4.3.13. Merk op dat $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, een gevolg van Lemma 4.3.11(ii).

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) &= \operatorname{adj}(\det(A)A^{-1}) \\
&= \det(\det(A)A^{-1})(\det(A)A^{-1})^{-1} \\
&= \det(A)^n \det(A^{-1})\det(A)^{-1}A \\
&= \det(A)^{n-1}\frac{1}{\det(A)}A \\
&= \det(A)^{n-2}A \ .
\end{aligned}$$

Oefening 4.16. (T) Beschouw een matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q})$ waarvoor $a_{ij} \in \{1, -1\}$ voor alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Toon aan dat $\det(A)$ een geheel veelvoud van 2^{n-1} is.

Oplossing 4.16. We noteren A als $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, met $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de kolommen van A. We weten dat

$$\det(A) = \det(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \det((A_1, A_2 + A_1, \ldots, A_n + A_1)) \ ,$$

aangezien het optellen van (een veelvoud van) een kolom bij een andere kolom de determinant onveranderd laat (Stelling 4.3.11 (vi)). Echter, alle elementen in een kolom $A_j + A_1$, $2 \leqslant j \leqslant n$, zijn gelijk aan -2, 0 of 2. We kunnen dan A'_j definiëren zodat $2A'_j = A_j + A_1$, $2 \leqslant j \leqslant n$. Deze kolomvector heeft dan enkel gehele elementen. Er volgt dat

$$\det(A) = \det((A_1, A_2 + A_1, \ldots, A_n + A_1)) = \det((A_1, 2A'_2, \ldots, 2A'_n)) = 2^{n-1}\det((A_1, A'_2, \ldots, A'_n)) \ .$$

Aangezien alle elementen van $(A_1, A'_2, \ldots, A'_n)$ geheel zijn, is $\det((A_1, A'_2, \ldots, A'_n))$ ook geheel. Dus is $\det(A)$ een geheel veelvoud van 2^{n-1}.

Oefening 4.17. (T) Beschouw een matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, K een veld en $n \geqslant 2$, met $a_{11} \neq 0$. Stel $b_{ij} = \left|\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{smallmatrix}\right|$ en beschouw de matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} .$$

Toon aan dat $\det(B) = a_{11}^{n-2} \det(A)$.
Hint: gebruik inductie.

Oplossing 4.17. We bewijzen dit met behulp van inductie naar n. Voor $n = 2$ vinden we dat $\det(B) = b_{22} = \det(A)$. Nu veronderstellen we dat het gestelde is bewezen voor matrices van de orde n en tonen we ze aan voor matrices van de orde $n + 1$. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n+1,1} & \cdots & b_{n+1,n+1} \end{pmatrix} ,$$

met bijhorende matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n+1,2} & \cdots & b_{n+1,n+1} \end{pmatrix} .$$

De $((n + 1) \times n)$-matrix die we vinden door in A de onderste rij te schrappen, noemen we A'. De matrix die we bekomen door in A' de i-de kolom te schrappen noemen we A'_i. De matrix die we bekomen door in A de onderste rij te vervangen door de eerste rij noemen we A''. We berekenen nu $\det(B)$ door B te ontwikkelen naar de laatste kolom. Noteer de $((n - 1) \times (n - 1))$-matrix die we bekomen door in B de laatste rij en kolom $(b_{2,i}, \ldots, b_{n+i,i})^t$ te schrappen, als B_i.

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{n+i-1} b_{n+1,i} \det(B_i) \\
&= \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{n+i-1} b_{n+1,i} a_{11}^{n-2} \det(A'_i) \\
&= a_{11}^{n-2} \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{n+i-1} (a_{11} a_{n+1,i} - a_{1,i} a_{n+1,1}) \det(A'_i) \\
&= a_{11}^{n-1} \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{n+i+1} a_{n+1,i} \det(A'_i) - a_{11}^{n-2} a_{n+1,1} \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{n+i+1} a_{1,i} \det(A'_i) \\
&= a_{11}^{n-1} \big(\det(A) - (-1)^{n+2} a_{n+1,1} \det(A'_1)\big) - a_{11}^{n-2} a_{n+1,1} \big(\det(A'') - (-1)^{n+2} a_{11} \det(A'_1)\big) \\
&= a_{11}^{n-1} \det(A)
\end{aligned}$$

Hierbij hebben we in de laatste overgang gebruik gemaakt van het feit dat $\det(A'') = 0$ aangezien A'' twee gelijke rijen bevat. In de tweede overgang hebben we de inductiehypothese gebruikt. Het gestelde is hiermee bewezen.

Oefening 4.18. (T) De rij van Fibonacci $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wordt gedefinieerd door de beginvoorwaarden $a_0 = 0$ en $a_1 = 1$ en de recurrente betrekking $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Toon aan dat de volgende gelijkheden gelden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 \end{vmatrix} = \ldots = 1 \text{ en}$$
$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_6 & a_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_6 & a_7 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} = \ldots = -1 .$$

Oplossing 4.18. We willen bewijzen dat voor $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} .$$

We maken gebruik van inductie naar n. Voor $n = 0$ geldt er dat $\left|\begin{smallmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right| = -1$. Veronderstel nu dat de bewering klopt voor n; we tonen ze aan voor $n+1$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+3} & a_{n+4} \end{vmatrix} &= a_{n+4}a_{n+1} - a_{n+2}a_{n+3} \\
&= (a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+1} - a_{n+2}a_{n+3} \\
&= a_{n+2}a_{n+1} - a_{n+3}(a_{n+2} - a_{n+1}) \\
&= a_{n+2}a_{n+1} - a_{n+3}a_n \\
&= - \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{vmatrix} \\
&= -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} .
\end{aligned}$$

Oefening 4.19. (B)

(a) Onderstel dat we een stelsel hebben met n vergelijkingen en n onbekenden, m.a.w. een stelsel $AX = B$ waarbij $A \in M_n(K)$, $B, X \in M_{n,1}(K)$. Toon aan dat dit stelsel een unieke oplossing heeft als en slechts als $\det(A) \neq 0$.

(b) Bepaal voor elk van de volgende stelsels alle waarden van λ waarvoor het stelsel een unieke oplossing heeft:

(i)

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + \lambda z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ x + y + z = \lambda \end{cases}$$

Oplossing 4.19.

(a) Merk op dat Gevolg 2.5.15 kan versterkt worden tot ‘$\mathrm{rk}(A) = n$ als en slechts als het stelsel een unieke oplossing heeft’. Immers, als het stelsel een unieke oplossing heeft, dan is het stelsel in het bijzonder niet strijdig en heeft de oplossingsverzameling dimensie 0; wegens Stelling 2.5.14 (ii) geldt er bijgevolg dat $n - \mathrm{rk}(A) = 0$. Wegens Stelling 4.3.12 is $\mathrm{rk}(A) = n$ als en slechts als $\det(A) \neq 0$.

(b) (i) Dit stelsel heeft een unieke oplossing als en slechts als $\det(A) \neq 0$, voor $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Uitrekenen van deze determinant geeft dat ons stelsel een unieke oplossing heeft als en slechts als $-13 - 7\lambda \neq 0$, oftewel, voor alle $\lambda \neq \frac{-13}{7}$.

(ii) Analoog aan hierboven heeft dit stelsel een unieke oplossing als en slechts als $\lambda \neq 1$.

Oefening 4.20. (B) Beschouw willekeurige $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Toon aan dat de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ b & a^3 & 1 & a \\ c & d & a^3 & 1 \end{vmatrix}$$

onafhankelijk is van de waarden van b, c en d.
Hint: gebruik rij- of kolomoperaties.

Oplossing 4.20. We maken gebruik van kolomoperaties. Noteer de kolommen als $A_1, \ldots, A_4$ We tellen achtereenvolgens $-aA_3$ keer op bij A_4, $-aA_2$ keer op bij A_3 en $-aA_1$ keer op bij A_2. Elk van deze operaties verandert de determinant niet. We vinden

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ b & a^3 & 1 & a \\ c & d & a^3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ a^3 & 1 & a & 0 \\ b & a^3 & 1 & 0 \\ c & d & a^3 & 1-a^4 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 1-a^4 & 0 & 0 \\ b & a^3-ba & 1-a^4 & 0 \\ c & d-ac & a^3-ad & 1-a^4 \end{vmatrix} = (1-a^4)^3$$

In de laatste overgang kunnen we gebruik maken van het feit dat de determinant van een onderdriehoeksmatrix gelijk is aan het product van de diagonaalelementen.

Oefening 4.21. (T) Beschouw de matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ gedefinieerd door

$$a_{ij} = \begin{cases} c & \text{als } i \neq j \ , \\ d & \text{als } i = j \ , \end{cases}$$

met $c, d \in \mathbb{C}$. Toon aan dat $\det(A) = (d + (n-1)c)\,(d-c)^{n-1}$.

Oplossing 4.21. In deze oplossing maken we gebruik van rij- en kolomoperaties. Ga zelf na welke.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} d & c & & \ldots & c \\ c & d & & & \\ & & & & c \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & c & & \\ c & & & & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d+(n-1)c & c & & \ldots & c \\ d+(n-1)c & d & & & \\ & & & & c \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & c & & \\ d+(n-1)c & & & & d \end{vmatrix}$$

$$= (d+(n-1)c) \begin{vmatrix} 1 & c & & \ldots & c \\ 1 & d & & & \\ & & & & c \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & c & & \\ 1 & & & & d \end{vmatrix}$$

$$= (d+(n-1)c) \begin{vmatrix} 1 & c & & \ldots & c \\ 0 & d-c & & & \\ & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & 0 & & \\ 0 & & & & d-c \end{vmatrix}$$

$$= (d+(n-1)c)(d-c)^{n-1}$$

Oefening 4.22. (U) Een *Vandermonde matrix* is een matrix in $M_n(K)$, $n \geqslant 2$ van de vorm

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} .$$

Toon aan dat $\det(A) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Oplossing 4.22. We tonen dit aan met behulp van inductie. Voor $n = 2$, is $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) = a_2 - a_1$. We veronderstellen nu dat de gelijkheid bewezen is voor $n-1$ en we tonen ze aan voor n. Hierbij maken we gebruik van rij- en kolomoperaties de die determinant invariant laten.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & \dots & a_3^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & \dots & a_3^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} - a_1(a_2^{n-2} - a_1^{n-2}) \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & \dots & a_3^{n-1} - a_1^{n-1} - a_1(a_3^{n-2} - a_1^{n-2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} - a_1(a_n^{n-2} - a_1^{n-2}) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & \dots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\
&= \dots \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 - a_1(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 - a_1(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 - a_1(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{k=2}^{n}(a_k - a_1) \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i)
\end{aligned}
$$

Dit eindigt de inductie. In de laatste stap hebben we gebruik gemaakt van de inductiehypothese. In de opeenvolgende kolomoperaties op de $((n-1) \times (n-1))$-determinant (ter hoogte van het weglatingsteken) wordt achtereenvolgens, gaande van rechts naar links, bij iedere kolom $-a_1$ keer de vorige kolom opgeteld.

4.3 Inverse van een matrix

Oefening 4.23. (B) (Inverse bepalen via de adjunctmatrix.)
Als A inverteerbaar is, dan is $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$ wegens Stelling 4.3.13. Bereken met deze methode de inverse van

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Oplossing 4.23. De determinant van de matrix is 1, de adjunctmatrix is

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} ,$$

en dit is meteen ook de inverse matrix.

Oefening 4.24. (T) Zij A een $n \times n$-matrix. Toon aan dat de volgende drie eigenschappen equivalent zijn:

(i) A is inverteerbaar;
(ii) $\operatorname{rk} A = n$;
(iii) de rij-echelonvorm van A is de eenheidsmatrix.

Oplossing 4.24.

$\boxed{\text{(i)}\Leftrightarrow\text{(ii)}}$ Dit is Stelling 4.3.12.

$\boxed{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(iii)}}$ De rang van de rijechelonvorm van A is dan ook gelijk aan n. Dit betekent dat geen enkele rij van de rijechelonvorm een nulrij kan zijn, en dus moet er op iedere rij een spilelement 1 staan. Aangezien de matrix vierkant is, staat er dan ook in iedere kolom een spilelement. Deze rijechelonvorm is dus de eenheidsmatrix.

$\boxed{\text{(iii)}\Rightarrow\text{(ii)}}$ Gezien de rang van A ongewijzigd blijft door rijreductie, is de rang van A gelijk aan de rang van de eenheidsmatrix, dus n.

Oefening 4.25. (Inverse bepalen via rijreductie.)
Beschouw $A \in M_n(K)$ willekeurig en bekijk nu de matrix $(A|I_n)$, de $(n \times 2n)$-matrix bekomen door A en I_n naast elkaar te plaatsen. Onderstel dat we via rijreductie het volgende bekomen:

$$(A|I_n) \sim (B|C) .$$

(a) **(B)** Toon aan dat A inverteerbaar is als en slechts als $B = I_n$.
(b) **(T)** Indien $B = I_n$, toon dan aan dat $C = A^{-1}$.
(c) **(B)** Bereken met deze methode de inverse van

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Oplossing 4.25.

(a) Uit de vorige oefening halen we dat A inverteerbaar is als en slechts als de rij-echelonvorm van A de eenheidsmatrix is, en B is juist de rij-echelonvorm van A.
(b) De matrix $C = (c_{ij})$ is de inverse matrix van A als en slechts als er geldt dat $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = \delta_{ij}$ voor alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Voor c_j, de j-de kolom van C betekent dit dat $Ac_j = e_j$, waarbij e_j de j-de vector is in de standaardbasis voor K^n. Met andere woorden, c_j is een oplossing van het stelsel $Ax = e_j$. Het zoeken van de inverse matrix komt dus neer op het simultaan oplossen van n verschillende stelsels met eenzelfde coëfficiëntenmatrix. Aangezien al deze stelsels dezelfde coëfficiëntenmatrix hebben, moeten

we de rijoperaties op A slechts éénmaal uitvoeren (cfr. Oefening 1.6). De n verschillende kolommen die dan n verschillende uitgebreide matrices bepalen, staan in de rechterhelft van $(A|I_n)$.
Als de rijechelonvorm van $(A|I_n)$ in de linkerhelft de eenheidsmatrix heeft (dus als $B = I_n$), dan weten we uit puntje (a) dat A inverteerbaar is. Merk op dat dit impliceert dat alle stelsels $Ax = e_j$ met $1 \leqslant j \leqslant n$ een unieke oplossing hebben. Deze oplossingen staan dan in de rechterhelft van de rijechelonvorm van $(A|I_n)$ en vormen dus de matrix C, die dan precies de inverse matrix van A is.

Een tweede oplossingsmethode maakt gebruik van Opmerking 1.4.7. Die zegt dat rijoperaties verkregen kunnen worden door linkse vermenigvuldiging met een matrix. Hieruit volgt: als een matrix $(B|C)$ de rij-echelonvorm is van een matrix $(A|I_n)$, dan is er een matrix D zodat $D(A|I_n) = (B|C)$. Dit betekent dat $DA = B$ en $D = C$. Als B nu de eenheidsmatrix is, is $D = A^{-1}$, dus $C = D = A^{-1}$.

(c) We vinden

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right),$$

dus de inverse matrix is

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Oefening 4.26. (B) Bepaal de inverse van de volgende matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met $ad - bc \neq 0$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Oplossing 4.26.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -8 \\ 5 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{2}{5} & \frac{-8}{5} & \frac{-11}{10} \\ -4 & 1 & -4 & -4 \\ 1 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -8 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Oefening 4.27. (B) In de volgende matrices zijn $a, b \in \mathbb{R}$ parameters. Voor welke waarden van a en b is de matrix inverteerbaar? Bepaal in die gevallen de inverse.

(a) $\begin{pmatrix} a & 0 & 4 \\ 2 & -1 & a-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & a & -2 \\ -a & 2 & -a \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & a^2-1 & 2-a \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Oplossing 4.27.

(a) Deze matrix is inverteerbaar als $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, en in dat geval is de inverse

$$\frac{1}{a^2-4}\begin{pmatrix} a & -4 & -4 \\ a+1 & -a-4 & a^2-a-8 \\ -1 & a & a \end{pmatrix}.$$

(b) Deze matrix is inverteerbaar als $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, en in dat geval is de inverse

$$\frac{1}{a^2-a}\begin{pmatrix} 4-a^2 & 4-a & 2-2a \\ a & a & 0 \\ a^2-2 & a-2 & a-1 \end{pmatrix}.$$

(c) Deze matrix is inverteerbaar als $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, en in dat geval is de inverse

$$\frac{1}{2a(2-a)}\begin{pmatrix} 2(2-a) & -a^2+a-1 & 2 \\ 0 & a(2-a) & 0 \\ 0 & a-a^3 & 2a \end{pmatrix}.$$

(d) Deze matrix is inverteerbaar als $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ en $b \neq 0$, en in dat geval is de inverse

$$\frac{1}{b(1-a^2)}\begin{pmatrix} 0 & b & -ab \\ 0 & -ab & b \\ 1-a^2 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Oefening 4.28. (T) Zij $A, B \in M_n(K)$ en veronderstel dat $AB = I_n$. Toon dan aan dat $BA = I_n$, m.a.w. dat A inverteerbaar is met $A^{-1} = B$.

Oplossing 4.28. Gezien $AB = I_n$ is $\det(A)\det(B) = \det(I_n) = 1$. Bijgevolg is $\det(A) \neq 0$, en dus is A inverteerbaar. We vinden

$$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1} \quad \text{en} \quad BA = A^{-1}A = I_n\,.$$

Oefening 4.29. (U) Zij $A, B, C \in M_n(K)$ met A inverteerbaar. Bewijs dat als $(A-B)C = BA^{-1}$, dat dan $C(A-B) = A^{-1}B$.

Oplossing 4.29. We laten deze opgave als uitdaging.