Lineaire Algebra en Meetkunde I
Oefeningen

1^{e} bachelor wiskunde

Heb je vragen? Stuur gerust een mail of kom langs!

Lins Denaux
lins.denaux@ugent.be
De Sterre, gebouw S8, bureau 130.015 (routebeschrijving)

Deze bundel bevat alle oefeningen voor het vak Lineaire Algebra en Meetkunde I voor studenten 1^{e} bachelor wiskunde. Zorg dat je ze elke oefeningenles meebrengt! De oefeningen worden gemarkeerd met een letter, naargelang het aantal en het type stappen dat nodig zijn om tot een oplossing te komen. Ruwweg betekenen deze het volgende.

(D) **D**efinitie: een oefening die je kan oplossen door definities toe te passen.

(B) **B**asis: deze oefening kan je doorgaans in één stap oplossen, gebruik makend van een definitie, rekentechniek, eigenschap (die eerder aan bod gekomen kan zijn),...

(T) **T**ussenstappen: bij deze oefening moet je via één of enkele tussenstappen of tussenresultaten tot de oplossing komen. Je combineert dus definities, rekentechnieken, eigenschappen,...

(U) **U**itdaging: een uitdagende oefening waarbij je wat creativiteit nodig hebt om tot een oplossing te komen, van een niveau dat niet verwacht wordt op het examen.

Oefeningen op hoofdstuk 5

Lineaire operatoren

5.1 Karakteristieke veelterm

Oefening 5.1. (B)

(a) Beschouw de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$. Bepaal de karakteristieke veelterm van A, maak hiervan gebruik om de minimaalveelterm van A te vinden.

(b) Bekijk de matrices uit Oefening 8.6. In die oefening bepaalden we hun minimaalveeltermen. Bepaal nu de karakteristieke veeltermen van deze matrices en controleer dat de corresponderende minimaalveelterm hiervan een deler is.

Oplossing 5.1.

(a) Directe berekening leert dat $\chi_A(x) = x^2(x-1)$. Aangezien de minimaalveelterm een deler is van de karakteristieke veelterm, zijn de enige mogelijkheden x, $x-1$, x^2, $x(x-1)$ en $x^2(x-1)$. We kunnen makkelijk nagaan dat $A(A - I_3) = 0$, en dat $A \neq 0 \neq A - I_3$ dus dat $\mu_A(x) = x(x-1)$ de minimaalveelterm is.

(b) (i) $\chi(x) = x^2 - 2x + 2 = \mu(x)$;
(ii) $\chi(x) = (x-1)^3 = \mu(x)(x-1)$;
(iii) $\chi(x) = x^2 - x + 2 = \mu(x)$;
(iv) $\chi(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = \mu(x)$.

Oefening 5.2. (B) (Inverse bepalen via de karakteristieke veelterm.)
Beschouw de karakteristieke veelterm $\chi_A(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_2x^2 + c_1x + c_0$ van $A \in M_n(K)$.

(a) Toon aan dat A inverteerbaar is als en slechts dan als $c_0 \neq 0$. Stel dat A inverteerbaar is, toon aan dat zijn inverse gelijk is aan

$$-\frac{1}{c_0}(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + c_{n-2}A^{n-3} + \ldots + c_2A + c_1I_n)\ .$$

(b) Bereken met deze methode de inverse van

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oplossing 5.2.

(a) We weten dat $c_0 = (-1)^n \det(A)$ via Lemma 5.1.6 en dat A inverteerbaar is als en slechts als $\det(A) \neq 0$. Hieruit volgt het eerste deel van het gestelde. Gebruik makend van de Stelling van Cayley-Hamilton, vinden we dat

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{c_0}(A^{n-1}+c_{n-1}A^{n-2}+c_{n-2}A^{n-3}+\ldots+c_2A+c_1I_n)A\\
&=-\frac{1}{c_0}(A^n+c_{n-1}A^{n-1}+c_{n-2}A^{n-2}+\ldots+c_2A^2+c_1A)\\
&=-\frac{1}{c_0}(-c_0I_n)=I_n\ ,
\end{aligned}$$

waaruit onmiddellijk volgt dat de gegeven matrix inderdaad de inverse is van A.

(b) We stellen eerst de karakteristieke veelterm op.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 1\\ 0 & x-1 & 0\\ -1 & -2 & x\end{vmatrix} = (x-1)((x-1)x+1) = x^3-2x^2+2x-1\ .$$

Dan is

$$A^{-1}=-\frac{1}{-1}(A^2-2A+2I_3)=\begin{pmatrix}0&-8&-1\\0&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-3&-1\\0&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&1&0\\-1&-5&1\end{pmatrix}.$$

Oefening 5.3. (B)

(a) Bepaal de karakteristieke veelterm van de volgende matrix B met $a,b,c,d\in K$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&a\\1&0&0&b\\0&1&0&c\\0&0&1&d\end{pmatrix}\in M_4(K)\ .$$

(b) Beschouw een bovendriehoeksmatrix $A=(a_{ij})\in M_n(K)$: een matrix waarvoor $a_{ij}=0$ voor alle $i>j$. Bepaal de karakteristieke veelterm van A.

Oplossing 5.3.

(a) We vinden direct dat

$$\chi_B(x)=\begin{vmatrix}x&0&0&-a\\-1&x&0&-b\\0&-1&x&-c\\0&0&-1&x-d\end{vmatrix}=x^4-dx^3-cx^2-bx-a\ .$$

Het is waarschijnlijk het meest eenvoudig om de matrix te ontwikkelen naar de laatste kolom.

(b) Door de determinant van de karakteristieke veelterm telkens te ontwikkelen naar de meest linkse kolom (of naar de onderste rij), vinden we dat $\prod_{k=1}^n(x-a_{kk})$.

Oefening 5.4. (T) Beschouw $A,B\in M_n(K)$.

(a) Veronderstel dat A of B inverteerbaar is. Toon aan dat AB en BA dezelfde karakteristieke veelterm hebben.

(b) Veronderstel dat A als B beide niet inverteerbaar zijn. Toon aan dat AB en BA dezelfde karakteristieke veelterm hebben.

(c) Leid uit (a) en (b) af dat $\det(AB)=\det(BA)$ en $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ voor willekeurige matrices in $M_n(K)$.
Merk op dat we dit al wisten dankzij Stelling 4.3.11(ii) (voor de determinant) en de opmerking na Definitie 5.1.7 (voor het spoor).

Oplossing 5.4.

(a) Als A inverteerbaar is, dan geldt er dat $\chi_{AB}(x) = \chi_{A^{-1}(AB)A}(x) = \chi_{BA}(x)$ dankzij Lemma 5.1.4 in de cursus. Als B inverteerbaar is, dan geldt dankzij datzelfde lemma dat $\chi_{AB}(x) = \chi_{B(AB)B^{-1}}(x) = \chi_{BA}(x)$. Zodra één van beiden inverteerbaar is, geldt dus duidelijk dat $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.

(b) Veronderstel nu dat zowel A als B niet inverteerbaar zijn en dat $\operatorname{rk} A = r < n$. Stelling 8.3.10 en Stelling 4.2.5 leren ons dan dat er inverteerbare matrices P en Q bestaan zodanig dat

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \ .$$

We definiëren nu de matrix $B' = QBP$. We kunnen B' schrijven als

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} ,$$

met B_{11} een $(r \times r)$-matrix, B_{12} een $(r \times (n-r))$-matrix, B_{21} een $((n-r) \times r)$-matrix en B_{22} een $((n-r) \times (n-r))$-matrix. Dan is

$$\begin{aligned} AB &= P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QQ^{-1}B'P^{-1} = P \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \ , \\ BA &= Q^{-1}B'P^{-1}P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} Q \ . \end{aligned}$$

Er geldt nu dat $\chi_{AB}(x) = \chi_{\left(\begin{smallmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(x)$. Wanneer we $\det\left(xI_n - \left(\begin{smallmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ berekenen door eerst te ontwikkelen naar de $n-r$ onderste rijen, vinden we dat $\chi_{AB}(x) = x^{n-r}\chi_{B_{11}}(x)$. Analoog vinden we ook dat $\chi_{BA}(x) = x^{n-r}\chi_{B_{11}}(x)$. Hieruit volgt dan de gezochte gelijkheid.

(c) Uit (a) en (b) volgt dat $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$ voor alle $A, B \in M_n(K)$. Het gestelde volgt dan onmiddellijk uit Lemma 5.1.6.

Oefening 5.5. (T) Toon aan dat de vergelijking $xy - yx = I_n$ geen oplossing heeft in $M_n(K)$, met K een veld van karakteristiek nul. Zoek lineaire operatoren f, g op een oneindigdimensionale vectorruimte zodat $fg - gf = \mathbf{1}_V$. (Merk op dat het voorgaande eigenlijk aantoont dat zulke lineaire operatoren niet bestaan in eindigdimensionale vectorruimten.)

Oplossing 5.5. Veronderstel dat $A, B \in M_n(K)$ zodanig zijn dat $AB - BA = I_n$. We bekijken dan het spoor van linker- en rechterlid (zie Oefening 2.6).

$$n = \operatorname{tr}(I_n) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0.$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de eigenschap $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ voor alle $A, B \in M_n(K)$ (zie Definitie 5.1.7).

Stel V de vectorruimte van alle veeltermen $p(x)$ (van willekeurige graad) in de variabele x over K. Definieer $f(p(x)) = \frac{\partial p(x)}{\partial x}$, de afleidingsoperator, en $g(p(x)) = xp(x)$. Ga zelf na dat dit lineaire operatoren zijn op V en dat voor iedere veelterm $p(x)$ geldt dat $f(g(p(x))) - g(f(p(x))) = p(x)$.

5.2 Eigenwaarden en eigenvectoren

Oefening 5.6. (B) Bepaal van de volgende matrices of lineaire afbeeldingen de eigenwaarden, de eigenruimten en bepaal een matrix P zodanig dat $P^{-1}AP$ (of $P^{-1}A_fP$ als er een lineaire afbeelding f gegeven is, met A_f de matrixvoorstelling van f t.o.v. de standaardbasis) een diagonaalmatrix is. Geef ook de diagonaalmatrix.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$

(e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$

(f) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$

(g) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$

(h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

(j) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vastgelegd door

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(k) De afbeelding

$$f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 : (x, y, z) \mapsto (x - z, x, x - y)$$

Oplossing 5.6. We werken enkele opgaven als voorbeeld uit. Van de andere geven we enkel de oplossing.

(a) We bepalen eerste de karakteristieke veelterm $\chi_A(x)$:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2 - 1 = (x-3)(x-1) \, .$$

De oplossingen van de vergelijking $\chi_A(x) = 0$ zijn 3 en 1. De eigenwaarden van A zijn dus $\lambda_1 = 3$ en $\lambda_2 = 1$, met bijhorende eigenruimten V_1 en V_2. De eigenruimte V_1 bestaat uit alle vectoren w waarvoor $(3I - A)w = 0 \in \mathbb{R}^2$. Met behulp van het rijreductiealgoritme vinden we

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2 \leftarrow R_2 + R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

Dus is $V_1 = \{(k,k)^t \mid k \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1)^t \rangle$. Analoog vinden we dat $V_2 = \{(k,-k)^t \mid k \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1)^t \rangle$. De matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

opgebouwd met lineair onafhankelijke eigenvectoren (op de kolommen) diagonaliseert dan de matrix A. Immers,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \, .$$

(b) De eigenwaarden met bijhorende eigenvectoren zijn: $\lambda_1 = 3$ met eigenruimte $V_1 = \langle (2,-2,1)^t \rangle$, $\lambda_2 = 0$ met eigenruimte $V_2 = \langle (2,1,-2)^t \rangle$ en $\lambda_3 = -3$ met eigenruimte $V_3 = \langle (1,2,2)^t \rangle$. Er geldt dan dat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \text{ met } P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \, .$$

(c) De eigenwaarden met bijhorende eigenvectoren zijn: $\lambda_1 = 2$ met eigenruimte $V_1 = \langle (1,0,0)^t \rangle$, $\lambda_2 = -1$ met eigenruimte $V_2 = \langle (14,-15,-9)^t \rangle$ en $\lambda_3 = -3$ met eigenruimte $V_3 = \langle (4,-5,-5)^t \rangle$. Er geldt dan dat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \text{ met } P = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 4 \\ 0 & -15 & -5 \\ 0 & -9 & -5 \end{pmatrix} .$$

(d) We bepalen eerste de karakteristieke veelterm $\chi_A(x)$:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = \ldots = x(x-3)^2 .$$

De oplossingen van de vergelijking $\chi_A(x) = 0$ zijn 3 en 0. Merk op dat de algebraïsche multipliciteit van 3 gelijk is aan 2. De eigenwaarden van A zijn dus $\lambda_1 = 3$ en $\lambda_2 = 0$, met bijhorende eigenruimten V_1 en V_2. De eigenruimte V_1 bestaat uit alle vectoren w waarvoor $(3I - A)w = 0 \in \mathbb{R}^3$. Met behulp van het rijreductiealgoritme vinden we

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2 \leftarrow R_2 - R_1, R_3 \leftarrow R_3 + R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dus is $V_1 = \{(r,s,r+s)^t \mid r,s \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1)^t, (0,1,1)^t \rangle$. Merk op dat λ_1 dus ook meetkundige multipliciteit 2 heeft. Analoog vinden we dat $V_2 = \{(k,k,-k)^t \mid k \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,-1)^t \rangle$. De matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

opgebouwd met lineair onafhankelijke eigenvectoren (op de kolommen) diagonaliseert dan de matrix A. Immers,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(e) De karakteristieke veelterm van A is hier $(x+1)^2(x-2)^2$. We vinden dus twee eigenwaarden: $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$. Bepalen van de eigenruimtes geeft $V_1 = \langle (1,1,-1,0)^t, (1,-1,0,1)^t \rangle$ en $V_2 = \langle (0,0,1,0)^t, (0,1,0,-1)^t \rangle$. We vinden

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ met } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(f) We bepalen eerste de karakteristieke veelterm $\chi_A(x)$:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = (x-i)(x+i) .$$

Merk op dat dez matrix dus niet diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$, maar wel over $\mathbb{C}$. De oplossingen van de vergelijking $\chi_A(x) = 0$ zijn i en $-i$. De eigenwaarden van A zijn dus $\lambda_1 = i$ en $\lambda_2 = -i$, met bijhorende eigenruimten V_1 en V_2. De eigenruimte V_1 bestaat uit alle vectoren w waarvoor $(iI - A)w = 0 \in \mathbb{C}^2$. Met behulp van het rijreductiealgoritme vinden we

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftarrow (-i)R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2 \leftarrow R_1 + R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dus is $V_1 = \{(ir, r)^t \mid r \in \mathbb{C}\} = \langle (i, 1)^t \rangle$. Analoog vinden we dat $V_2 = \{(-ir, r)^t \mid k \in \mathbb{R}\} = \langle (-i, 1)^t \rangle$. De matrix

$$P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

opgebouwd met lineair onafhankelijke eigenvectoren (op de kolommen) diagonaliseert dan de matrix A. Immers,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} .$$

(g) De eigenwaarden met bijhorende eigenvectoren zijn: $\lambda_1 = 0$ met eigenruimte $V_1 = \langle (1, i)^t \rangle$ en $\lambda_2 = 2$ met eigenruimte $V_2 = \langle (1, -i)^t \rangle$. Er geldt dan dat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ met } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} .$$

(h) De eigenwaarden met bijhorende eigenvectoren zijn: $\lambda_1 = 6$ met eigenruimte $V_1 = \langle (16, 25, 10)^t \rangle$, $\lambda_2 = 4$ met eigenruimte $V_2 = \langle (2, 3, 0)^t \rangle$ en $\lambda_3 = 1$ met eigenruimte $V_3 = \langle (1, 0, 0)^t \rangle$. Er geldt dan dat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ met } P = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 25 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(i) De eigenwaarden met bijhorende eigenvectoren zijn: $\lambda_1 = 1$ met eigenruimte $V_1 = \langle (0, 1, 0)^t \rangle$, $\lambda_2 = -i$ met eigenruimte $V_2 = \langle (1, 0, i)^t \rangle$ en $\lambda_3 = i$ met eigenruimte $V_3 = \langle (1, 0, -i)^t \rangle$. Er geldt dan dat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \text{ met } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix} .$$

(j) De matrix behorend bij de afbeelding f is

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} .$$

De eigenwaarden met bijhorende eigenvectoren zijn: $\lambda_1 = 4$ met eigenruimte $V_1 = \langle (1, 1, 2)^t \rangle$ en $\lambda_2 = -2$ met eigenruimte $V_2 = \langle (1, 0, -1)^t, (0, 1, 1)^t \rangle$. Er geldt dan dat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ met } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(k) De matrix behorend bij de afbeelding f is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

De eigenwaarden met bijhorende eigenvectoren zijn: $\lambda_1 = 1$ met eigenruimte $V_1 = \langle (1, 1, 0)^t \rangle$, $\lambda_2 = -i$ met eigenruimte $V_2 = \langle (1, i, 1 + i)^t \rangle$ en $\lambda_3 = i$ met eigenruimte $V_3 = \langle (1, -i, 1 - i)^t \rangle$. Er geldt dan dat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \text{ met } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 0 & 1+i & 1-i \end{pmatrix} .$$

Oefening 5.7. (B) Zijn de volgende matrices diagonaliseerbaar over het opgegeven veld? Motiveer je antwoord.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

(d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$

(e) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

(g) $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 10 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$

(h) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

Oplossing 5.7. We werken geen van de oefeningen in detail uit: het berekenen van de eigenwaarden, eigenruimten, ... laten we over aan de lezer.

(a) De matrix A heeft drie verschillende eigenwaarden, namelijk 2, 0 en -1. Bijgevolg is A diagonaliseerbaar.
(b) De matrix A heeft slechts één eigenwaarde, namelijk 1, met algebraïsche multipliciteit gelijk aan 2. De bijhorende eigenruimte $V_1 = \langle (1,0)^t \rangle$ heeft echter dimensie 1, en dus is de meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde gelijk aan 1. Bijgevolg is A niet diagonaliseerbaar.
(c) De matrix A is symmetrisch en dus diagonaliseerbaar dankzij Gevolg 7.3.4. Alternatief: de matrix A heeft drie verschillende eigenwaarden, namelijk 2, 1 en -2. Bijgevolg is A diagonaliseerbaar.
(d) De karakteristieke veelterm van deze matrix is $x^2 - 2$, en heeft dus geen wortels (in $\mathbb{Q}$). Merk op dat we over $\mathbb{Q}$ werken, dus het symmetrisch zijn van deze matrix helpt ons niet voor het bepalen van diagonaliseerbaarheid.
(e) De matrix A heeft twee verschillende eigenwaarden, namelijk $\lambda_1 = -2$ met algebraïsche multipliciteit 1 en $\lambda_2 = 2$ met algebraïsche multipliciteit 2. De eigenruimte $V_2 = \langle (1,1,-1)^t \rangle$ behorend bij λ_2 heeft echter dimensie 1, en dus is de meetkundige multipliciteit van λ_2 gelijk aan 1. Bijgevolg is A niet diagonaliseerbaar.
(f) De matrix A is symmetrisch en dus diagonaliseerbaar dankzij Gevolg 7.3.4.
(g) De matrix A heeft slechts één eigenwaarde, namelijk 3, met algebraïsche multipliciteit gelijk aan 3. De bijhorende eigenruimte $V_1 = \langle (2,1,-1)^t \rangle$ heeft echter dimensie 1, en dus is de meetkundige multipliciteit van deze eigenwaarde gelijk aan 1. Bijgevolg is A niet diagonaliseerbaar.
(h) De karakteristieke veelterm van deze matrix is $x^2 - 4x + 8$. Deze veelterm heeft geen wortels over $\mathbb{R}$, en de matrix is bijgevolg niet diagonaliseerbaar. Merk op dat deze matrix wel diagonaliseerbaar is over $\mathbb{C}$, met eigenwaarden $2 \pm 2i$.
(i) Deze matrix heeft twee eigenwaarden, 1 en 2, beide met algebraïsche multipliciteit 2. De eigenruimte bij 1 is $\langle (1,0,0,0)^t, (0,0,1,0)^t \rangle$, dus de bijbehorende meetkundige multipliciteit is ook 2. De eigenruimte bij 2 is echter $\langle (1,1,0,0)^t \rangle$, en heeft dus slechts meetkundige multipliciteit 1. De matrix is bijgevolg niet diagonaliseerbaar.

Oefening 5.8. (B) Beschouw de volgende matrices in $M_3(\mathbb{Q})$ met een parameter $a \in \mathbb{Q}$. Voor welke waarden van de parameter is de matrix diagonaliseerbaar? Motiveer je antwoord.

(a) $A = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a-2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} a+1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2a+4 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

Hint: $a+3$ is een eigenwaarde van A.

Oplossing 5.8. We werken opgave (c) in detail uit. Voor de andere twee opgaves geven we het resultaat en enkele tussenstappen.

(a) De eigenwaarden van A zijn -1, 1 en a. Enkel de gevallen $a = -1$ en $a = 1$ moeten dan in detail bekeken worden. We vinden dan dat A diagonaliseerbaar is als $a \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$ en dat A niet diagonaliseerbaar is als $a = -1$ (de meetkundige multipliciteit van -1 is dan slechts 1).

(b) De karakteristieke veelterm van A is $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-3)$. De eigenwaarden van A zijn dus 1, met algebraïsche multipliciteit 2, en 3 met algebraïsche multipliciteit gelijk aan 1. De eigenwaarden van A zijn dus onafhankelijk van a. De eigenruimte bij de eigenwaarde 1 is $\{(r, s, -r) \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$ als $a = 0$ en $\{(0, s, 0) \mid s \in \mathbb{Q}\}$ als $a \neq 0$. Bijgevolg is de meetkundige multipliciteit van 1 enkel gelijk aan de meetkundige multipliciteit is als $a = 0$. We besluiten dat A diagonaliseerbaar is als en slechts als $a = 0$.

(c) We berekenen de karakteristieke veelterm van A via

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-(a+1) & -5 & -1 \\ 0 & x+1 & 0 \\ -2a-4 & -10 & x-1 \end{vmatrix} = (x+1)\left((x-a-1)(x-1) + (-2a-4)\right)$$
$$= (x+1)(x^2-(a+2)x-(a+3)) = (x+1)^2(x-(a+3))\,.$$

De eigenwaarden van A zijn dus -1 en $a+3$. Deze twee eigenwaarden zijn verschillend als en slechts als $a \neq -4$. We berekenen de eigenruimte V behorend bij de eigenwaarde -1. De eigenruimte V bestaat uit alle vectoren w waarvoor $(-I-A)w = 0 \in \mathbb{Q}^3$. Met behulp van het rijreductiealgoritme vinden we

$$\begin{pmatrix} -(a+2) & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2a-4 & -10 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}{\sim} \begin{pmatrix} -(a+2) & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dus is $V = \{(r, s, -(a+2)r - 5s)^t \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$. De meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde -1 is dus 2, ongeacht de waarde van a.

Bijgevolg, als $a \neq -4$, dan is voor iedere eigenwaarde de algebraïsche multipliciteit gelijk aan de meetkundige multipliciteit, en dan is A diagonaliseerbaar. Als $a = -4$, dan is de algebraïsche multipliciteit van de unieke eigenwaarde -1 gelijk aan 3, en is A niet diagonaliseerbaar. We besluiten dan A diagonaliseerbaar is als en slechts als $a \in \mathbb{Q} \setminus \{-4\}$.

Oefening 5.9. (B) Beschouw de volgende matrices in $M_3(\mathbb{R})$ met parameters $a, b, c \in \mathbb{R}$. Voor welke waarden van de parameters is de matrix diagonaliseerbaar? Motiveer je antwoord.

(a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Oplossing 5.9.

(a) De eigenwaarden van deze matrix zijn 1, a en b. Indien deze allemaal verschillend zijn, is de matrix diagonaliseerbaar. We hebben nog vier verschillende gevallen: $a = b = 1$, $a = b \neq 1$, $a = 1 \neq b$ en $b = 1 \neq a$. We bekijken in deze gevallen de eigenruimte met algebraïsche multipliciteit meer dan 1.

$\boxed{a = b = 1}$ We bepalen de eigenruimte bij $\lambda = 1$, i.e. de oplossingen van het homogeen stelsel met coëfficiëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-b \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De oplossingsruimte is hier dus $\langle (1,0,0)^t, (0,0,1)^t \rangle$, dus 2-dimensionaal. De matrix A is in deze situatie dus niet diagonaliseerbaar.

$\boxed{a = b \neq 1}$ We bepalen de eigenruimte bij $\lambda = a = b$, i.e. de oplossingen van het homogeen stelsel met coëfficiëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-b \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De eigenruimte bij a is $\langle (1,0,0)^t \rangle$, dus 1-dimensionaal. De matrix A is ook in deze situatie niet diagonaliseerbaar.

$\boxed{a = 1 \neq b}$ We bepalen de eigenruimte bij $\lambda = 1$, i.e. de oplossingen van het homogeen stelsel met coëfficiëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-b \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De eigenruimte bij 1 is $\langle (1,0,0)^t \rangle$, dus 1-dimensionaal. De matrix A is wederom niet diagonaliseerbaar.

$\boxed{b = 1 \neq a}$ We bepalen de eigenruimte bij $\lambda = 1$, i.e. de oplossingen van het homogeen stelsel met coëfficiëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-b \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De eigenruimte bij 1 is $\langle (1,1-a,0)^t, (0,0,1)^t \rangle$, dus 2-dimensionaal. Bijgevolg is de meetkundige multipliciteit gelijk aan de algebraïsche multipliciteit voor elke eigenwaarde, en is A diagonaliseerbaar.

Samengevat is A diagonaliseerbaar als en slechts als $a \neq b$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ en $b \in \mathbb{R}$.

(b) De eigenwaarden zijn hier a, 1 en c. Als deze allemaal verschillend zijn, is de matrix diagonaliseerbaar. Er blijven nog 4 gevallen over om te bestuderen: $a = 1, c \neq 1$, $a \neq 1, c = 1$, $a = c = 1$ en $a = c \neq 1$. We geven hier twee mogelijke manieren om te werk te gaan. In de eerste manier bekijken we eerst de gevallen waarbij de algebraïsche mulptipliciteit van a gelijk is aan 2.

$\boxed{a = c \text{ of } a = 1}$ In deze gevallen is de eigenruimte bij a telkens slechts 1-dimensionaal, terwijl de algebraïsche multipliciteit 2 of 3 is, dus A is niet diagonaliseerbaar in deze gevallen.

$\boxed{c = 1 \neq a}$ We bepalen de eigenruimte bij $\lambda = 1$, i.e. de oplossingen van het homogeen stelsel met coëfficiëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & b \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1+(1-a)b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De oplossingsruimte is nu afhankelijk het al dan niet nul zijn van $1+(1-a)b$. Als $1+(1-a)b = 0$, is de oplossingsruimte gelijk aan $\langle (1,0,1-a)^t, (0,1,0)^t \rangle$, dus dan is A diagonaliseerbaar. Anders is de oplossingsruimte $\langle (0,1,0)^t \rangle$, dus dan is A niet diagonaliseerbaar.

Samengevat hebben we dat A diagonaliseerbaar is als $|\{a,1,c\}| = 3$, of als $c = 1, a \neq 1$ en $b = \frac{1}{a-1}$.

Een tweede manier om deze gevallen te bestuderen is de gevallen te bestuderen waarin 1 een algebraïsche multipliciteit is die strikt groter is dan 1.

$\boxed{a = 1 \text{ of } c = 1}$ Hier moeten we de meetkundige multipliciteit van 1 berekenen om na te gaan voor welke waarden van a, b en c de matrix A diagonaliseerbaar is. We bepalen dus de dimensie van de oplossingsverzameling van het homogeen stelsel met coëfficiëntenmatrix de matrix $I_3 - A$.

$$\begin{pmatrix} 1-a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1-c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1-(a-1)b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}$$

Merk op de dimensie van de oplossingsverzameling gelijk is aan $3 - \mathrm{rk}(I_3 - A)$. We zien dat

$$\mathrm{rk}(I_3 - A) = \begin{cases} 1 & \text{als } c = 1 \text{ en } 1 - (a-1)b = 0 \\ 2 & \text{als } c \neq 1 \text{ of } 1 - (a-1)b \neq 0, \end{cases}$$

waaruit volgt: als $a = 1$ dan is de meetkundige multipliciteit van 1 gelijk aan 1 en dus strikt kleiner dan de algebraïsche multipliciteit (die 2 of 3 is in deze gevallen); als $a \neq 1$ en dus $c = 1$, dan is de meetkundige multipliciteit gelijk aan de algebraïsche multipliciteit (die 2 is) als en slechts als $1 - b(a-1) = 0$.

$\boxed{a = c \neq 1}$ In dit geval is de algebraïsche multipliciteit van a gelijk aan 2. We bepalen hier dus ook diens meetkundige multipliciteit, m.a.w., de dimensie van de oplossingsverzameling van het homogeen stelsel met coëfficiëntenmatrix de matrix $aI_3 - A$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & a-1 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De rang van deze matrix is steeds 2, dus de meetkundige multipliciteit van a is 1, wat strikt kleiner is dan zijn algebraïsche multipliciteit en aldus is A niet diagonaliseerbaar in dit geval.

Oefening 5.10. (T) Veronderstel dat $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ een eigenvector v heeft met bijhorende eigenwaarde λ. Toon aan dat v een eigenvector is van f^k met bijhorende eigenwaarde λ^k, $k \in \mathbb{N}$. Toon aan dat v een eigenvector is van $\sum_{i=0}^k a_i f^i$ met bijhorende eigenwaarde $\sum_{i=0}^k a_i \lambda^i$, met $a_0, \ldots, a_k \in K$ en $k \in \mathbb{N}$.

Oplossing 5.10. De eerste bewering kunnen we eenvoudig aantonen met behulp van inductie. Werk dit zelf uit. De tweede bewering volgt ook direct:

$$\left(\sum_{i=0}^k a_i f^i\right)(v) = \sum_{i=0}^k \left(a_i f^i(v)\right) = \sum_{i=0}^k \left(a_i \lambda^i v\right) = \left(\sum_{i=0}^k a_i \lambda^i\right) v\,.$$

Oefening 5.11. (B) Veronderstel dat $A \in M_n(K)$ diagonaliseerbaar is met diagonalisatie $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

(a) Toon aan dat A inverteerbaar is als en slechts als alle eigenwaarden verschillend zijn van nul, en dat in dat geval $A^{-1} = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})P^{-1}$.
(b) Toon aan dat $A^k = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)P^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$.
(c) Veronderstel dat A twee eigenwaarden heeft: de eigenwaarde $\lambda \neq 0$ met algebraïsche multipliciteit s, en de eigenwaarde 0 met algebraïsche multipliciteit $n - s$. Toon aan dat $A^k = \lambda^{k-1}A$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.
(d) Veronderstel dat A een eigenwaarde λ met algebraïsche multipliciteit n heeft. Toon aan dat $A = \lambda I_n$.

Oplossing 5.11.

(a) Merk eerst en vooral op dat

$$\det(A) = \det(P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}) = \det P \det P^{-1} \det \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n\,.$$

Hieruit halen we meteen dat A inverteerbaar is als en slechts als $\det A \neq 0$, dus als en slechts als alle eigenwaarden verschillend zijn van 0. Indien dit het geval is, vinden we dat

$$A^{-1} = (P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1})^{-1} = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{-1}P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})P^{-1}\,.$$

(b) Toon dit zelf aan via inductie.
(c) Zonder verlies van algemeenheid kunnen we $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = \lambda$ en $\lambda_{s+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ veronderstellen. Dan vinden we, via (a) dat

$$A^k = P\,\mathrm{diag}(\lambda^k \ldots, \lambda^k, 0, \ldots, 0)P^{-1} = \lambda^{k-1}P\,\mathrm{diag}(\lambda \ldots, \lambda, 0, \ldots, 0)P^{-1} = \lambda^{k-1}A\,.$$

(d) We weten dat $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda) = \lambda I_n$. Daaruit volgt dat $A = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda I_n$.

Oefening 5.12. (T) Beschouw een lineaire operator f over de vectorruimte $\mathbb{C}^n$, met 0 als enige eigenwaarde. Toon aan dat f een nilpotente operator is, i.e. toon aan dat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $f^k = 0$.

Oplossing 5.12. De karakteristieke veelterm $\chi_f(x)$ van f heeft n complexe wortels (met multipliciteit gerekend), zie Opmerking 5.3.7. Dus is $\chi_f(x) = x^n$. Uit Stelling 8.2.1 (Cayley-Hamilton) volgt dan dat $0 = \chi_f(f) = f^n$. Dus is f nilpotent.

Oefening 5.13. (T) Beschouw een matrix $A \in M_3(\mathbb{C})$ waarvan het spoor en de determinant gelijk zijn aan 0. Toon aan dat A ofwel diagonaliseerbaar is, ofwel nilpotent is.

Oplossing 5.13. De karakteristieke veelterm van A is wegens Lemma 5.1.6 van de vorm $\chi_A(x) = x^3 - a^2x = x(x-a)(x+a)$ voor een bepaalde $a \in \mathbb{C}$ (ieder element van $\mathbb{C}$ is een kwadraat). Als $a \neq 0$, dan is A diagonaliseerbaar. Werk dit zelf uit. Als $a = 0$, dan is A nilpotent via Oefening 5.12.

Oefening 5.14. (T) Beschouw een n-dimensionale K-vectorruimte V en beschouw een operator $f \in \mathrm{End}(V)$ met n verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Toon aan dat $\det(\mathbf{1}_V + f) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)$.

Oplossing 5.14. We geven twee verschillende oplossingen voor dit probleem. We noteren de matrixvoorstelling van f t.o.v. een vastgelegde basis als A.

Oplossing 1. Aangezien f precies n verschillende eigenwaarden heeft, is f diagonaliseerbaar en bestaat er een $P \in M_n(K)$ waarvoor $A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$. Dan geldt er dat

$$I_n + A = I_n + P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1} = P(I_n + \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_n + 1)P^{-1} .$$

Dus is

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{1}_V + f) &= \det(I_n + A) \\ &= \det(P\,\mathrm{diag}(\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_n + 1)P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(\mathrm{diag}(\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_n + 1))\det(P)^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) . \end{aligned}$$

Oplossing 2. We weten dat $\chi_f(x) = \chi_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$. Dan geldt er dat

$$\det(\mathbf{1}_V + f) = \det(I_n + A) = (-1)^n \det(-I_n - A) = (-1)^n \chi_A(-1) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (-1 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)$$

Merk op dat we in deze oplossing geen gebruik hebben gemaakt van het feit dat dat eigenwaarden van f verschillend zijn.

Oefening 5.15. (T) Beschouw een veelterm $f(x) \in K[x]$ en een matrix $A \in M_n(K)$ met eigenwaarde λ. Toon aan: als $f(A) = 0$, dan is $f(\lambda) = 0$.

Oplossing 5.15. Beschouw een eigenvector v van A met eigenwaarde λ. Uit Oefening 5.10 halen we dat $f(A)(v) = f(\lambda)v$. Het gestelde volgt dan direct.

Oefening 5.16. (T) Beschouw een n-dimensionale vectorruimte V over het veld K, en beschouw $f, g \in \mathrm{End}(V)$. Veronderstel dat f en g elk n verschillende eigenwaarden hebben. Bewijs dat f en g dezelfde eigenvectoren hebben als en slechts als $fg = gf$.

Oplossing 5.16. We veronderstellen eerst dat f en g dezelfde eigenvectoren hebben. Noteer de n verschillende eigenwaarden van f als $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ en noteer de bijhorende eigenruimten als $\langle v_1 \rangle, \ldots, \langle v_n \rangle$. We weten dan dat $\{v_1, \ldots, v_n\}$ een basis is voor V (zie Stelling 5.3.4). Aangezien $v_1, \ldots, v_n$ ook eigenvectoren voor g zijn, bestaan er $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ zodat $g(v_i) = \mu_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Voor een vector v_i, $i = 1, \ldots, n$, geldt dan dat

$$(fg)(v_i) = f(g(v_i)) = f(\mu_i v_i) = \mu_i f(v_i) = \mu_i \lambda_i v_i = \lambda_i g(v_i) = g(\lambda_i v_i) = g(f(v_i)) = (gf)(v_i) .$$

We merken dus op dat $(fg)(v_i) = (gf)(v_i)$. Aangezien f een lineaire afbeelding is, en $\{v_1, \dots, v_n\}$ een basis is voor V, volgt hieruit dat $fg = gf$.

Nu veronderstellen we dat $fg = gf$. Noteer de n verschillende eigenwaarden van f als $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ en noteer de bijhorende bijhorende eigenruimten als $\langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle$. Er geldt dat

$$f(g(v_i)) = (fg)(v_i) = (gf)(v_i) = g(f(v_i)) = g(\lambda_i v_i) = \lambda_i g(v_i) \ ,$$

voor alle $i = 1, \dots, n$. Dus is $g(v_i)$ een eigenvector van f met bijhorende eigenwaarde λ_i, $i = 1, \dots, n$. Aangezien de n eigenwaarden van f verschillend zijn, zijn de eigenruimten bij elk van deze eigenwaarden ééndimensionaal. De eigenruimte bij de eigenwaarde λ_i is dus $\langle v_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Bijgevolg is $g(v_i) = \mu_i(v_i)$ voor een zekere μ_i, $i = 1, \dots, n$. Iedere eigenvector van f kan geschreven worden als νv_j voor een $\nu \in K$ en een $j \in \{1, \dots, n\}$. Het is nu duidelijk dat dit ook een eigenvector is van g. Alle eigenvectoren van f zijn dus ook eigenvectoren van g. Analoog kunnen we aantonen dat alle eigenvectoren van g ook eigenvectoren van f zijn.

Oefening 5.17. (T) Beschouw een matrix $A \in M_n(K)$ waarvoor $A^2 = A$.

(a) Toon aan dat A enkel 0 of 1 als eigenwaarde kan hebben.
(b) Toon aan dat iedere $x \in K^n$ kan geschreven worden als $x = y + z$, $y, z \in K^n$, met $Ay = 0$ en $Az = z$.
(c) Toon aan dat A diagonaliseerbaar is.

Oplossing 5.17.

(a) Beschouw een eigenwaarde λ van A, en een bijhorende eigenvector v. Dan geldt er dat

$$\lambda v = Av = A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda^2 v \ .$$

Hieruit halen we dat $\lambda^2 = \lambda$ en dus dat $\lambda \in \{0, 1\}$.

(b) Voor iedere $x \in K^n$ geldt dat $A(x - Ax) = 0$ aangezien $A^2 = A$. Er geldt dan duidelijk dat $x = y + z$, met $y = x - Ax$ en $z = Ax$. We merkten eerder op dat $Ay = 0$. Er geldt duidelijk ook dat $Az = A^2 x = Ax = z$.

(c) We voeren de volgende notatie in: $V_0 = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ en $V_1 = \{x \in K^n \mid Ax = x\}$. Merk op V_i de eigenruimte behorend bij de eigenwaarde i is, $i = 0, 1$. Uit (a) volgt nu dat $V_0 + V_1 = K^n$. We bewijzen dat dit een directe som is. Hiervoor moeten we aantonen dat $V_0 \cap V_1 = \{0\}$. Stel dat $x \in V_0 \cap V_1$, dan is enerzijds $Ax = 0$ en anderzijds $Ax = x$. Bijgevolg is $x = 0$, dus inderdaad, $V_0 \cap V_1 = \{0\}$. Bijgevolg is $V_0 \oplus V_1 = K^n$. We kunnen dus een basis van K^n vinden door een basis van V_0 en een basis van V_1 samen te voegen. Dit zijn echter automatisch basissen bestaande uit eigenvectoren van A. We vinden dus een basis van eigenvectoren voor K^n, en dus is A diagonaliseerbaar.

Oefening 5.18. (B) Beschouw een matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$. Toon aan dat $A^t A$ diagonaliseerbaar is.

Oplossing 5.18. Merk op dat $(A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A$. Dus is $A^t A$ symmetrisch. Bijgevolg (zie Gevolg 7.3.4) is $A^t A$ ook diagonaliseerbaar.

Oefening 5.19. (T) $A \in M_3(\mathbb{R})$ is een symmetrische matrix, waarvoor $(1, 2, 0)^t$ en $(0, 0, 1)^t$ eigenvectoren zijn, beiden met eigenwaarde 1. De determinant van A is 6. Bepaal de matrix A.

Oplossing 5.19. Aangezien A symmetrisch is, kunnen we deze matrix schrijven als

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \ ,$$

met $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$. Door uit te drukken dat $(0, 0, 1)^t$ een eigenvector met eigenwaarde 1 is, vinden we dat $a_{13} = a_{23} = 0$ en dat $a_{33} = 1$. Door vervolgens uit te drukken dat $(1, 2, 0)^t$ een eigenvector met eigenwaarde 1 is, vinden we een stelsel

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = 1 \\ a_{12} + 2a_{22} = 2 \end{cases}$$

Door dit op te lossen (met het rijreductiealgoritme) vinden we dat $a_{11} = -3 + 4a_{22}$ en $a_{12} = 2 - 2a_{22}$. Er geldt echter ook dat

$$6 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = (-3 + 4a_{22})a_{22} - (2 - 2a_{22})^2 = -4 + 5a_{22} \ .$$

Hieruit halen we dan onmiddellijk dat $a_{22} = 2$, $a_{11} = 5$ en $a_{12} = -2$. De matrix A is dan volledig bepaald.

Alternatieve werkwijze. We schrijven A zoals hierboven en drukken opnieuw uit dat $(0, 0, 1)^t$ een eigenvector met eigenwaarde 1 is. Aangezien $\det(A) = 6$, de determinant gelijk is aan het product van de eigenwaarden, en de algebraïsche multipliciteit van de eigenwaarde 1 minstens 2 is, moet de andere eigenwaarde gelijk zijn aan 6 (met algebraïsche multipliciteit gelijk aan 1). De som van de eigenwaarden (met hun algebraïsche multipliciteit) is dan 8. Dit is echter gelijk aan de het spoor van de matrix A. Dus zouden we aan het stelsel dat we vinden door uit te drukken dat $(1, 2, 0)^t$ een eigenvector met eigenwaarde 1 is, nog de vergelijking $a_{11} + a_{22} + 1 = 8$ kunnen toevoegen. Uit dit stelsel kunnen we dan de waarden van a_{11}, a_{12} en a_{22} halen.

Oefening 5.20. (T) Beschouw een matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ waarvoor $A^t = -\overline{A}$ (A wordt scheef-hermitisch genoemd).

(a) Toon aan dat de eigenwaarden van A zuiver imaginair zijn. De zuiver imaginaire elementen in $\mathbb{C}$ zijn de elementen die kunnen geschreven worden als ki met $k \in \mathbb{R}$.
(b) Beschouw twee verschillende eigenwaarden μ, ν van A, met bijhorende eigenvectoren v (bij de eigenwaarde μ) en w (bij de eigenwaarde ν). Toon aan dat $v^t\overline{w} = 0$.

Oplossing 5.20. We volgen in beide antwoorden de werkwijze van Stelling 7.3.2. We maken gebruik van het standaard inproduct op $\mathbb{C}^n$: $\langle v_1, v_2\rangle = v_1^t\overline{v_2}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$. Er geldt voor alle $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$ dat

$$\langle Av_1, v_2\rangle = (Av_1)^t\overline{v_2} = v_1^tA^t\overline{v_2} = -v_1^t\overline{Av_2} = -\langle v_1, Av_2\rangle \ .$$

(a) Beschouw een eigenvector u van A met eigenwaarde λ. Dan is $Av = \lambda v$. Door de bovenstaande regel toe te passen, vinden we dat

$$\lambda\langle u, u\rangle = \langle\lambda u, u\rangle = \langle Au, u\rangle = -\langle u, Au\rangle = -\langle u, \lambda u\rangle = -\overline{\lambda}\langle u, u\rangle \ .$$

Aangezien $\langle u, u\rangle > 0$, volgt hieruit dat $\lambda = -\overline{\lambda}$. Dus is λ zuiver imaginair.
(b) Opnieuw door toepassing van de bovenstaande regel, volgt er eenvoudig dat

$$\mu\langle v, w\rangle = \langle\mu v, w\rangle = \langle Av, w\rangle = -\langle v, Aw\rangle = -\langle v, \nu w\rangle = -\overline{\nu}\langle v, w\rangle = \nu\langle v, w\rangle \ .$$

Hierbij hebben we in de laatste overgang gebruik gemaakt van het feit dat ν zuiver imaginair is. Aangezien $\mu \neq \nu$ volgt hieruit dat $0 = \langle v, w\rangle = v^t\overline{w}$.

Oefening 5.21. (T) (*) In deze oefening worden matrices over het veld $\mathbb{F}_p$ beschouwd, p een priemgetal. Eenvoudige eigenschappen van dit veld komen van pas. Beschouw een matrix $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$, p een priemgetal. Toon aan: als A diagonaliseerbaar is, dan is $A^p = A$.

Oplossing 5.21. Aangezien A diagonaliseerbaar is, bestaat er een $P \in M_n(\mathbb{F}_p)$ en $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}_p$ zodat $A = P^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$, en hiering zijn $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A. Noteer $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Er geldt dat

$$A^p = (P^{-1}DP)^p = (P^{-1}DP)\dots(P^{-1}DP) = P^{-1}D^pP \ .$$

We weten dat

$$D^p = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^p = \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$$

omdat $x^p = x$ voor alle $x \in \mathbb{F}_p$. We concluderen dat

$$A^p = P^{-1}D^pP = P^{-1}DP = A \ .$$