Examen Lineaire algebra en meetkunde II

Oefeningen

dinsdag 11 juni 2024, 08:30

- Uiterlijk om **12:00** dien je het examen in.
- Schrijf **je naam** op elk blad, leg je **studentenkaart** klaar.
- Maak elke oefening op een **apart blad** en dien voor elke oefening een blad in (eventueel leeg).
- De cursus, andere cursussen, de oefeningen en hun oplossingen behoren tot het toegelaten materiaal. Maak je gebruik van een resultaat dat hierin te vinden is, **verwijs** er dan ook naar.
- Gsm's zijn **uitgeschakeld**, evenals ander elektronisch materiaal. Overleg met medestudenten en buitenstaanders is strikt **verboden**.
- De puntjes waaruit een opgave bestaat kunnen soms **onafhankelijk** van elkaar opgelost worden (het is niet omdat je (i) niet kan dat je (ii) niet kan, enz.). Indien gewenst mag je wel steunen op de opgaven van eerdere puntjes, mits verwijzing.
- Zorg voor een duidelijke opbouw in je antwoord; tussenstappen en berekeningen worden steeds **gemotiveerd**.
- Het is geen wedstrijd schoonschrift, maar schrijf **leesbaar**.
- **Denk goed na**, start niet halsoverkop.
- Veel succes!

Opgave 1. Beschouw een affiene ruimte $\mathcal{A}$ van dimensie 5. Zij D een driedimensionale deelruimte, π een vlak in $\mathcal{A}$ en L een rechte in π. Zij L parallel met D. Bespreek (in functie van intersectie en parallellisme) de mogelijke onderlinge liggingen van D en π (en toon ook aan dat deze voorkomen). [3 punten]

Opgave 2. Zij $\mathcal{A}$ een pappiaanse eindigdimensionale affiene ruimte met basis $\mathcal{B}$. Zij $D := \langle b_0, b_1, \ldots b_k \rangle$ een k-dimensionale deelruimte met $b_i \in \mathcal{B}$ $(i = 0, \ldots k)$ en zij $D' := \langle \mathcal{B} \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \rangle$. Dan definiëren we de volgende projectie:

$$\varphi : \mathcal{A} \to D : x \mapsto D'_x \cap D,$$

met D'_x de unieke sterk parallelle deelruimte door x aan D'.

1. [2 punten] Ga na dat deze afbeelding goed gedefinieerd is, i.e. dat er steeds zo een unieke D'_x is en dat die D snijdt in een uniek punt.
2. [2 punten] Ga na dat deze afbeelding equipollentie bewaard, i.e. dat een paar equipollente koppels wordt afgebeeld op een paar equipollente koppels.
3. [1 bonuspunt] Bespreek waar je in deze oefeningen de bijkomende voorwaarden Pappiaans en eindigdimensionaal nodig hebt. Heb je een idee hoe je deze oefening zou kunnen doen zonder (één van) deze voorwaarden?

enkel als ik klaar geraakt

Opgave 3. Beschouw een bilineaire ruimte (V, f) op $V = V(4, \mathbb{R})$ en zij $a \in \mathbb{R}$ een parameter. Over de reflexieve bilineaire vorm f en de basis $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ van V is het volgende gegeven: e_4 is isotroop; de (aan de bilineaire vorm f geassocieerde) norm van e_1 en e_2 is 1; $f(e_3, e_3) = 2$; de basisvector e_1 staat orthogonaal op het vectorvlak $\langle e_2, e_3 \rangle$; $f(e_2, e_4) = 1$; e_3 is orthogonaal met e_4 en e_2; $f(e_1, e_4) = a$.

1. [1 punt] Bepaal de matrixvoorstelling van f t.o.v. B.
2. [1 punt] Beschrijf de verzameling isotrope punten van (V, f). Is dit een deelruimte van van V? Verklaar je antwoord in functie van a.
3. [1 punt] Bepaal de rang en signatuur van de geassocieerde kwadratische vorm.