STELSELS

17 02 **Oefening 1**

Los volgende stelsels op over het veld K. Merk op dat je bespreking zal afhankelijk zijn van het veld.
delen door a, a ontbinden in priemfactoren, velden met die karakteristiek apart onderzoeken

ⓐ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 6 \\ 6x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right)_{/2} \backsim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -15 \end{array}\right)_{/9} \backsim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right) \text{ kar } K \neq 2,3 : \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

- kar $K = 2$: $0 = 0$, $x_2 = 1$ $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ met $t \in K$
- kar $K = 3$: $2x_1 + x_2 = 0$, $0 = 0$ $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ met $t \in K$

ⓑ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{/2} \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \lightning \Rightarrow \text{oplverz.} = \emptyset$$

- kar $K = 2$: $x_2 + x_3 = 0$, $0 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ $\begin{pmatrix} t \\ s \\ s \end{pmatrix}$ met $t, s \in K$

ⓒ $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -15 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{/15} \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- kar $K = 3$: $0 = 2$ $\lightning$
- kar $K = 5$: $0 = 3$ $\lightning$.

kar $K \neq 3,5$: $\begin{pmatrix} \frac{-1}{15} \\ \frac{11}{15} \\ \frac{-8}{15} \end{pmatrix}$

ⓓ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 11x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & -11 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & 1 & 3 \end{array}\right) /7 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

kar $K \neq 7$: $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} - \frac{10}{7}t \\ \frac{-3}{7} + \frac{1}{7}t \\ t \end{pmatrix}$ met $t \in K$

- kar $K = 7$: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$ $\quad \begin{pmatrix} 3+4t \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$ met $t \in K$

  $x_3 = 3$

Oefening 2: oefening 1 met parameters

ⓐ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = d \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & d \\ 0 & -1 & 1 & 2-d \\ 0 & 5 & 1 & 1-2d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & d \\ 0 & 1 & -1 & d-2 \\ 0 & 0 & 6 & 11-7d \end{array}\right) /6 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{3} + \frac{5}{3}d \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{6} - \frac{d}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} - \frac{7d}{6} \end{array}\right)$$

- kar $K = 2$: $d = 1$: $x_1 + x_2 + x_3 = d$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix}$ met $t \in K$

  $x_2 + x_3 = d$

  $d \neq 1$: ↯

- kar $K = 3$: $d = 2$: $x_1 + x_3 = 2$ $\quad \begin{pmatrix} 2+2t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ met $t \in K$

  $x_2 + 2x_3 = 0$

  $d \neq 2$: ↯

kar $K \neq 2, 3$: $\begin{pmatrix} \frac{-7}{3} + \frac{5}{3}d \\ \frac{-1}{6} - \frac{d}{6} \\ \frac{11}{6} - \frac{7d}{6} \end{pmatrix}$

ⓑ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = m \\ mx_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 = 2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & m \\ m & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & m-2 \\ 0 & 3 & 1 & -2m \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & m-2 \\ 0 & 0 & 7 & -5m+6 \\ 0 & 0 & 1 & 3-m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4-m \\ 0 & 0 & 1 & 3-m \\ 0 & 0 & 0 & 2m-15 \end{array}\right)$$

$2m = 15 \overset{/2}{\iff} m = 7{,}5$, kar $K \neq 2$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$

- kar $K = 2$: $0 = 1$ ↯

Oefening 3

Los volgende stelsels op over $\mathbb{F}_4$, met $\mathbb{F}_4$ gedefinieerd a.d.h.v. het irreducieble polynoom: $f(t) = t^2 + t + 1$, $4 = 2^2 \Rightarrow$ mod 2, graad veelterm $= 2$;
elementen van $\mathbb{F}_4$: $\{0, 1, \alpha, \alpha + 1 = \alpha^2, 1 = \alpha^3, \ldots\}$
zonder breuken schrijven, in termen $\mathbb{F}_4$ schrijven ($\{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$)

ⓐ $\begin{cases} \alpha^2 x_1 + m x_2 = \alpha \\ x_1 + m x_2 = m + \alpha^2 \end{cases}$ met $m \in \mathbb{F}_4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha^2 & m & \alpha \\ 1 & m & m+\alpha^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m+\alpha^2 \\ 0 & \alpha m & \alpha^2 m \end{array}\right) \sim {}_{/m}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha^2(m+1) \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) \quad m \neq 0: \begin{pmatrix} \alpha^2(m+1) \\ \alpha \end{pmatrix}$$

- $m = 0$: $x_1 = \alpha^2$ $\qquad \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ t \end{pmatrix}$ met $t \in \mathbb{F}_4$
  $0 = 0$

ⓑ $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 0 \\ \alpha x_1 + \alpha^2 x_3 = m \\ \alpha^2 x_1 + \alpha x_2 + m\alpha x_3 = \alpha \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha^2 & m \\ \alpha^2 & \alpha & m\alpha & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^2 & m \\ 0 & \alpha^2 & m\alpha & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{m}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & m\alpha + \alpha^2 & m+\alpha \end{array}\right)$$

$$\sim {}_{/m+\alpha}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & m\alpha^2+1 \\ 0 & 1 & 0 & m\alpha+\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 \end{array}\right) \quad m \neq \alpha: \begin{pmatrix} m\alpha^2+1 \\ m\alpha+\alpha^2 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$$

- $m = \alpha$: $x_1 + \alpha x_2 = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 1+\alpha t \\ \alpha^2+t \\ t \end{pmatrix}$ met $t \in \mathbb{F}_4$
  $x_2 + x_3 = \alpha^2$
  $0 = 0$

24 02 ⓒ $\begin{cases} m x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = 1 \\ (m+1) x_1 + \alpha x_2 = \alpha^2 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ m+1 & \alpha & 0 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha(m+1) & \alpha^2+m & 1 \\ 0 & m\alpha & m+1 & \alpha^2 \end{array}\right) \sim {}_{/m}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^2(1+\frac{1}{m}) & \frac{\alpha}{m} \\ 0 & 0 & \frac{1}{m}+\alpha^2 & \alpha(1+\frac{\alpha}{m}) \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ /\frac{1}{m}+\alpha^2 \end{array} \qquad m \neq 0, \alpha : \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$$

- $m = 0$: $x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0$
  $\alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = 1$
  $x_3 = \alpha^2$
  $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$
- $m = \alpha$: $x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0$
  $x^2 + x^3 = 1$
  $0 = 0$
  $\begin{pmatrix} \alpha(t+1)+t \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$

ⓓ
$$\begin{cases} x_1 + b x_2 = 1 \\ b x_1 + \alpha x_3 = 0 \\ x_2 + \alpha x_3 = 1 \\ x_2 + a x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 1 \\ b & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 1 \\ 0 & b^2 & \alpha & b \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+a & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+ab^2 & b+b^2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ /a+\alpha \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2+b \end{array}\right)$$

- $b = 0$, $a \neq \alpha$: $x_1 = 1$
  $x_2 = 1$
  $x_3 = 0$
  $0 = 0$
  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $b = 1$, $a \neq \alpha$: $x_1 = 0$
  $x_2 = 1$
  $x_3 = 0$
  $0 = 0$
  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $b \neq 0, 1$, $a \neq \alpha$: ↯
- $a = \alpha$: $x_1 + b x_2 = 1$ $\quad b \neq 1$
  $x_2 + \alpha x_3 = 1$
  $0 = 0$
  $\begin{pmatrix} \frac{1}{1+b} \\ \frac{1}{1+b} \\ \alpha^2 \frac{b}{b+1} \end{pmatrix}$
  $\alpha(1+b^2) x_3 = \underset{\frac{b(b+1)}{(b+1)(b+1)\cdot\alpha}}{b+b^2}$ $\quad /b^2+1$
- $a = \alpha$, $b = 1$: $x_1 + x_2 = 1$
  $x_2 + \alpha x_3 = 1$
  $0 = 0$
  $0 = 0$
  $\begin{pmatrix} \alpha t \\ 1+\alpha t \\ t \end{pmatrix}$ met $t \in \mathbb{F}_4$

rekenregels $\mathbb{F}_4$ gelden niet voor parameters

VECTORRUIMTEN

Oefening 1

Beschouw de 3-dimensionale vectorruimte V over $K = \mathbb{F}_2$ $(V(3,K))$

a) Hoeveel vectoren, vectorrechten en vectorvlakken bevat V?

rechten door oorsprong => zijn positievector   vlakken door oorsprong => zijn positievector

b) Hoeveel vectorvlakken gaan er door een vaste vector $\vec{v}$ van V?

c) Hoeveel verschillende nevenklassen kan je associëren met een vectorrechte

hoeveel 'evenwijdige' zijn er

van V en hoeveel met een vectorvlak van V?

vb.: $\mathbb{F}_3$

a) $q^n = 2^3 = 8$ vectoren

$\frac{q^n-1}{q-1 \text{ \#vect}} = \frac{2^3-1}{2-1 \text{ \#vect}} = 7$ vectorrechten $= \frac{\text{alle vectoren - nulvector}}{\text{vectoren op dezelfde rechte}}$

$\frac{\boxed{q^n-1}}{\boxed{q^2-1}}\frac{\boxed{(q^n-q)}}{\boxed{(q^2-q)}} = \frac{(2^3-1)(2^3-2)}{(2^2-1)(2^2-2)} = 7$ vectorvlakken $= \frac{(\text{alle vectoren - nulvector})\ (\text{alle vectoren -}}{(\text{vectoren in zelfde vlak})}$

$\frac{\text{nulvector - vectoren in verlengde } v_1)}{(\text{vectoren op zelfde rechte})}$

b) $\frac{q^n-q}{q^2-q} = \frac{2^3-2}{2^2-2} = 3$ vectorvlakken gaan door een vaste vector $\vec{v}$ = 2^e^ vector in vectorvlak kiezen

c) $\frac{q^n}{q} = \frac{2^3}{2} = 4$ nevenklassen te associëren met vectorrechte

$\frac{q^n}{q^2} = \frac{2^3}{2^2} = 2$ nevenklassen te associëren met vectorvlak

Oefening 2

Laat V en W twee deelruimten zijn van $\mathbb{R}^n$ waarbij geen van de twee een deelverzameling is van de andere. Toon aan dat $V \cup W$ geen deelruimte is van $\mathbb{R}^n$.

Ongerijmde: Stel $V \cup W$ is deelruimte van $\mathbb{R}^n$, $V \not\subset W: \exists \vec{v} \in V: \vec{v} \notin W$ en $W \not\subset V: \exists \vec{w} \in W: \vec{w} \notin V$. $V \cup W$ is deelruimte $\Rightarrow (\vec{v} + \vec{w}) \in (V \cup W)$

- $(\vec{v}+\vec{w}) \in V,\ \vec{v} \in V \Rightarrow ((\vec{v}+\vec{w})-\vec{v}) \in V \Leftrightarrow \vec{w} \in V$ ↯
- $(\vec{v}+\vec{w}) \in W,\ \vec{w} \in W \Rightarrow ((\vec{v}+\vec{w})-\vec{w}) \in W \Leftrightarrow \vec{v} \in W$ ↯

$V \cup W$ kan nooit deelruimte van $\mathbb{R}^n$ zijn.

Oefening 3

Laat A en B twee verschillende 2-dimensionale deelruimten zijn in $\mathbb{R}^3$. Toon aan dat deze deelruimten elkaar snijden in een vectorrechte.

$$\underbrace{\dim A}_{2} + \underbrace{\dim B}_{2} = \dim(A \cap B) + \underbrace{\dim(A+B)}_{2 \leq \ldots \leq 3}$$

- $\dim(A \cap B) = 1$ = vectorrechte
- $\dim(A \cap B) = 2$ = ↯ $A \neq B$

Oefening 4

Beschouw in $\mathbb{R}^4$ een deelruimte A van dimensie 2 en een deelruimte B van dimensie 3. Toon aan dat $A \cap B$ een vectorvlak of vectorrechte is.

$$\underbrace{\dim A}_{2} + \underbrace{\dim B}_{3} = \dim(A \cap B) + \underbrace{\dim(A+B)}_{2 \leq \ldots \leq 4}$$

- $\dim A \cap B = 3 =$ ↯ A heeft maar dimensie 2
- $\dim A \cap B = 2 =$ vectorvlak
- $\dim A \cap B = 1 =$ vectorrechte

Oefening 5

Geef een basis en zoek de dimensie van volgende deelruimte.

$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ en } x+z+t=0\}$

$x+z=-y,\ x+z=-t \Rightarrow \{(x, -x-z, z, -x-z)\} \Rightarrow \{(t, -t-s, s, -t-s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

$$\text{basis} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{dimensie} = 2$$

goede basis? ja : $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda, \mu = 0$

AFFIENE RUIMTEN

10 03

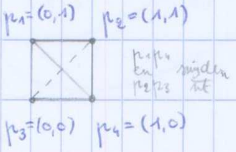
Oefening 1: Affien vlak, $\overset{\text{affien}}{A}G(\overset{n}{2},\overset{q}{2})$

affiene
\# punten: $q^2 = 2^2 = 4$

affiene
\# rechten: $q^2 + q = 2^2 + 2 = 6$

\# punten waarmee een rechte incident is = # punten op rechte: $q = 2$

\# rechten waarmee een punt incident is = # rechten door punt: $q+1 = 3$



$p_1p_2: y=1$ $\quad$ $p_3p_1: x=0$

$p_2p_4: x=1$ $\quad$ $p_1p_4: x+y=1 \iff y=x+1$

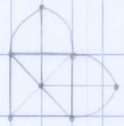
$p_4p_3: y=0$ $\quad$ $p_2p_3: x+y=0 \iff y=x$

vergelijkingen van de rechten via $y = ax + b$ met $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

parallelklasse = 'equivalentieklasse': vb: p_1p_2 parallel met p_3p_4 want ze hebben geen punten gemeenschappelijk en snijden bijgevolg niet, p_1p_3 parallel met p_2p_4 en p_1p_4 parallel met p_2p_3

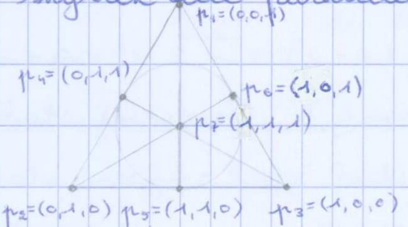
Oefening 2: Projectief vlak, PG(2,2) = Het Fanovlak

in een projectief vlak snijden alle parallelle rechten op oneindig



is isomorf met

$\cong$



het punt (0,0,0) bestaat nooit

projectief vlak heeft altijd 1 dimensie meer dan affien vlak

$P(n,q) \xleftrightarrow{\text{correspondeert met}} V(n+1,q) \setminus \{\vec{0}\}$

\# punten: $q^2 + q + 1 = 2^2 + 2 + 1 = 7$

\# rechten: $q^2 + q + 1 = 2^2 + 2 + 1 = 7$

\# punten waarmee een rechte incident is: $q+1 = 3$

\# rechten waarmee een punt incident is: $q+1 = 3$

vergelijkingen van de rechten via $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$

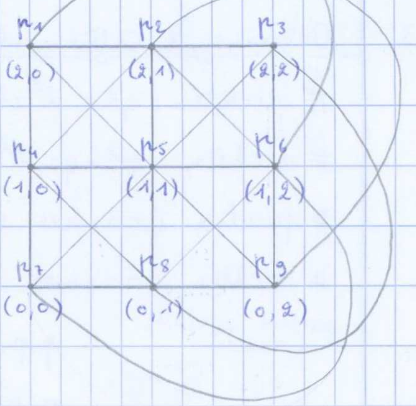
$p_1p_4p_2: x_1 = 0$ $\quad$ $p_1p_7p_5: x_1 + x_2 = 0$

$p_2p_5p_3: x_3 = 0$ $\quad$ $p_2p_7p_6: x_1 + x_3 = 0$

$p_3p_6p_1: x_2 = 0$ $\quad$ $p_3p_7p_4: x_2 + x_3 = 0$

$p_4p_5p_6: x_1 + x_2 + x_3 = 0 \iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Oefening 3: Affien vlak, $AG(2,\overset{GF(3)}{\overset{\shortparallel}{3}})$



#affiene punten: $q^2 = 9$

#affiene rechten: $q^2 + q = 12$

punten op rechte: $q = 3$

#rechten door punt: $q + 1 = 4$

$p_1p_2p_3: x = 2$ $\quad$ $p_1p_5p_9: x+y = 2$

$p_4p_5p_6: x = 1$ $\quad$ $p_2p_6p_7: x+y = 0$

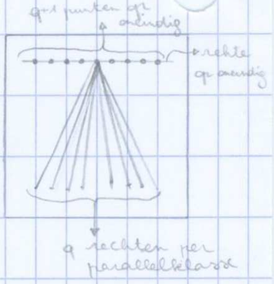
$p_7p_8p_9: x = 0$ $\quad$ $p_3p_4p_8: x+y = 1$

$p_1p_4p_7: y = 0$ $\quad$ $p_3p_5p_7: x = y$

$p_2p_5p_8: y = 1$ $\quad$ $p_2p_4p_9: x+1 = y$

$p_3p_6p_9: y = 2$ $\quad$ $p_1p_6p_8: x+2 = y$

Oefening 4: Projectief vlak, $PG(2,q)$



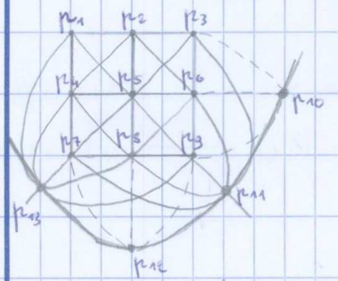
#punten op oneindig: $q+1 \rightarrow q+1$ parallelklassen

#rechten per parallelklasse: q

$\Rightarrow \overset{r\,ppk}{q}(\overset{pk}{q+1}) + \overset{r\text{ op oneindig}}{1} = q^2 + q + 1 =$ # rechten

Oefening 5: Projectief vlak, $PG(2,3)$

projectief vlak = affien vlak + rechte op oneindig



$p_1 = (1,2,0)$	$p_5 = (1,1,1)$	$p_9 = (1,0,2)$	$p_{13} = (0,1,1)$
$p_2 = (1,2,1)$	$p_6 = (1,1,2)$	$p_{10} = (0,0,1)$	
$p_3 = (1,2,2)$	$p_7 = (1,0,0)$	$p_{11} = (0,1,2)$	
$p_4 = (1,1,0)$	$p_8 = (1,0,1)$	$p_{12} = (0,1,0)$	

$p_1p_2p_3p_{10}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0$

$p_{10}p_{11}p_{12}p_{13}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$p_1p_4p_7p_{12}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -z = 0$

$p_2p_4p_{13}p_9: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y - z = 0$

$p_1p_5p_9p_{11}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z = 0$

$p_2p_6p_{11}p_7: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -y - z = 0$

$\Leftrightarrow y + z = 0$

$p_1p_{13}p_8p_6: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z = 0$ ...

Oefening 6: Affien vlak, AG(3,2)

affiene punten: $q^n = 2^3 = 8$

affiene rechten: $\frac{q^n(q^n-1)}{q(q-1)} = \frac{2^3(2^3-1)}{2\cdot 1} = 28$

affiene vlakken: $\frac{q^n(q^n-1)(q^n-2)}{q^2(q^2-1)(q^2-q)} = \frac{2^3(2^3-1)(2^3-2)}{2^2(2^2-1)(2^2-2)} = 14$

1 vlak = 4 punten
1^e punt → 4
2^e punt → 3
3^e punt → 2

Oefening 7

Opmerking (zie theorie): k+1 punten in een (k-1)-dimensionale ruimte gelegen bepalen juist één k-dimensionale ruimte

- # rechten AG(5,4): $\frac{q^n(q^n-1)}{q(q-1)} = \frac{4^5(4^5-1)}{4(4-1)} = \frac{1024.1023}{4.3} = 87296$
- # punten AG(7,3): $q^n = 3^7 = 2187$

  # rechten AG(7,3): $\frac{q^n(q^n-1)}{q(q-1)} = \frac{3^7(3^7-1)}{3(3-1)} = \frac{2187.2186}{3.2} = 108207$

  # vlakken AG(7,3): $\frac{q^n(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{q^2(q^2-1)(q^2-q)} = \frac{3^7(3^7-1)(3^6-1)}{3^2(3^2-1)(3^2-3)} = \frac{2187.2186.628}{9.8.6} = 13899681$
- # vlakken door 2 punten AG(5,4): $\frac{\overset{\#punten}{q^n-q}}{q^2-\underset{rechte}{q}} = \frac{4^5-4}{4^2-4} = \frac{1024-4}{16-4} = 85$
- # vlakken door 2 punten AG(n,q): $\frac{q^n-q}{q^2-q} = \frac{q^{n-1}-1}{q-1}$
- # rechten AG(4,q) zwak parallel met gegeven vlak: $\frac{\overset{\text{affiene ptn}}{q^4}\,(\overset{\text{parallelklasse}}{q+1})}{q \rightarrow \text{punten op rechte}} = q^3(q+1)$
- # rechten AG(6,q) geen enkel punt gemeen met gegeven vlak:

  $\overset{\text{totaal}}{\frac{q^6(q^6-1)}{q(q-1)}} - \overset{\text{in vlak}}{\frac{q^2(q^2-1)}{q(q-1)}} - \overset{\text{snijdt vlak}}{\frac{q^2(q^6-q^2)}{q-1}}$
- # 3-dimensionale affiene ruimten in AG(6,q) $\overset{?}{=} q^3(q^3+1)(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$:

  $\frac{\overset{\text{punt}}{q^6}\,\overset{\text{ander}}{(q^6-1)}\,\overset{\text{nt coll}}{(q^6-q)}\,\overset{\text{nt vlak}}{(q^6-q^2)}}{q^3(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)} = q^3\frac{(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)}{(q^3-1)(q^2-1)(q-1)} = q^3(q^3+1)(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$

Toon aan dat er juist $q^3(q^3+1)(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$ 3-dim affiene ruimten zijn in AG(6,q)

17 03

- # 3-dimensionale affiene ruimten door vast punt van AG(6,q):

  $\frac{\overset{\text{punt}}{(q^6-1)}\,\overset{\text{nt coll}}{(q^6-q)}\,\overset{\text{nt vlak}}{(q^6-q^2)}}{(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)} = (q^3+1)(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$
- # rechten, vlakken, 3-dimensionale en k-dimensionale ruimten in AG(n,q)

  rechte: $\frac{q^n(q^n-1)}{q^1(q^1-1)}$, vlak: $\frac{q^n(q^n-1)(q^n-q)}{q^2(q^2-1)(q^2-q)}$, 3-dim.-ruimte: $\frac{q^n(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)}{q^3(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)}$

  k-dim.-ruimte: $\frac{q^n(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{k-1})}{q^k(q^k-1)(q^k-q)(q^k-q^2)\cdots(q^k-q^{k-1})}$
- # affiene hypervlakken door 3 nt collineaire punten in AG(5,2):

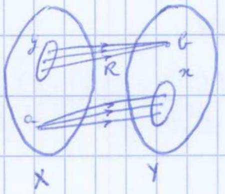
  ↳ dim = n-1

  $\frac{(2^5-2^2)(2^5-2^3)}{(2^4-2^2)(2^4-2^3)} = 2^2+2+1 = 7$
- # affiene deelruimten van dimensie 4 en AG(6,3) door 3 nt collineaire punten:

  $\frac{(3^6-3^2)(3^6-3^3)}{(3^4-3^2)(3^4-3^3)} = (3^2+1)(3^2+3+1) = 130$

Telprincipes: voor affiene ruimten → # relaties is cst

Stel X en Y eindige verzamelingen, R een relatie, $R \subseteq X \times Y$



tel # koppels $(a,b) \in R$ op 2 manieren

1) kies $a \in X \to \exists x$ koppels $(a,b) \in R$, geldt $\forall a \Rightarrow$ # koppels $= x \cdot |X|$

2) kies $b \in Y \to \exists y$ koppels $(a,b) \in R$, geldt $\forall b \Rightarrow$ # koppels $= y \cdot |Y|$

$\Rightarrow x|X| = y|Y|$

Oefening 8: Hoeveel rechten bevat AG(5,4)

1) $X = \{L \mid L$ is rechte van $AG(5,4)\}$

$Y = \{p \mid p$ is punt van $AG(5,4)\}$

$R = \{(p,L) \mid p \in L\}$

$x =$ # punten op rechte $= q = 4$

$y =$ # rechten door punt $= \dfrac{q^n-1}{q^1-1} = \dfrac{4^5-1}{4-1} = 341$

$|Y| =$ # punten $= q^n = 4^5 = 1024$

$|X| = \dfrac{|Y|y}{x} = q^{n-1}\dfrac{q^n-1}{q-1} = 4^4\dfrac{4^5-1}{4-1} = 87296$

2) $X = \{L \mid L$ is rechte van $AG(5,4)\}$

$Y = \{(p_1,p_2) \mid p_1 \neq p_2$ zijn punten van $AG(5,4)\}$

$R = \{((p_1,p_2),L) \mid \langle p_1,p_2 \rangle = L\}$

$x =$ 2 punten van gegeven rechte kiesen $= q(q-1) = 12$

$y =$ 2 punten $\Rightarrow$ rechte ? $= 1$

$|Y| =$ 2 punten → rechte $= q^n(q^n-1) =$

$|X| = \dfrac{|Y|y}{x} = q^{n-1}\dfrac{(q^n-1)}{q-1} = 1047552$

Oefening 9: # vlakken door 2 punten in AG(5,q)

1) $X = \{V \mid V$ is vlak van $AG(5,q)\}$

$Y = \{(p_1,p_2) \mid p_1 \neq p_2$ punten van $AG(5,q)\}$

$R = \{((p_1,p_2),V) \mid \langle p_1,p_2 \rangle \in V\}$

$x =$ 2 punten van gegeven vlak kiesen $= q^2(q^2-1)$

$|X| =$ aantal vlakken $= \dfrac{q^5(q^5-1)(q^5-q)}{q^2(q^2-1)(q^2-q)}$

$|Y| =$ 2 punten → vlak $= q^5(q^5-1)$

$y = \dfrac{|X|x}{|Y|} = \dfrac{q^5(q^5-1)(q^5-q)}{q^2(q^2-1)(q^2-q)} q^2(q^2-1) \dfrac{1}{q^5(q^5-1)} = \dfrac{q^5-q}{q^2-q} = \dfrac{q^4-1}{q-1}$

2) $X = \{\pi \mid \pi$ is vlak door p_1 en p_2 in $AG(5,q)$

$Y = \{p \mid p$ is punt van $AG(5,q)$ met $\langle p,p_1,p_2 \rangle = \pi$

dim 3 → ptn: 4

Oefening 10: # affiene hypervlakken door punt van AG(4, q)

$X = \{H \mid H$ is hypervlak van $AG(4,q)\}$

$Y = \{(p_1) \mid p_1$ is punt van $AG(4,q)\}$

$R = \{((p_1), H) \mid p_1 \in H\}$

$x = 4$ punten van gegeven hypervlak kiezen $= q^3(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)$

$|X| =$ aantal hypervlakken $= \dfrac{q^4(q^4-1)(q^4-q)(q^4-q^2)}{q^3(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)}$

$|Y| = 1$ punt → hypervlak $= q^4$

$$y = \frac{|X|x}{|Y|} = \frac{q^4(q^4-1)(q^4-q)(q^4-q^2)}{q^3(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)} \cdot q^3(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2) \cdot \frac{1}{q^4} = (q^4-1)(q^4-q)(q^4-q^2)$$

BUNDELS VAN HYPERVLAKKEN

24 03

Oefening 1

$H_1 \cap H_2 : \alpha H_1 + \beta H_2 = 0$ in $AG(5,3)$

$p(1,0,0,-1,0)$ op H_1: $1+0-0-1-0-1 = -1$; op H_2: $1+0-0 = 1$

$\alpha(-1) + \beta(1) = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha$ stel $\alpha = 1$

$(X_1+X_2-X_3+X_4-X_5-1) + (X_1+X_3-X_5) = 0 \Leftrightarrow 2X_1+X_2+X_4-2X_5-1=0$

$\Leftrightarrow -X_1+X_2+X_4+X_5-1=0$

Oefening 2

parallel aan H_1 → constante wijzigen: $1+2+8+0+C=0 \Leftrightarrow C=-11=4$

of $\Rightarrow H_p : X_1+X_2+2X_3+3X_4+4=0$

projectief bekijken (homogene coördinaten) en hypervlak laten snijden met hypervlak op oneindig en zorgen dat p er op ligt

p op H: $1+2+8+0-2 = 9 = 4$, p op H_∞: 1

($H: X_1+X_2+2X_3+3X_4-2Z=0$; $H_\infty: Z=0$; p projectief: $(1,2,4,0,1)$)

$\alpha(4)+\beta(1)=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$ stel $\alpha=1 \Rightarrow (X_1+X_2+2X_3+3X_4-2)+(1)=0$

$\Leftrightarrow X_1+X_2+2X_3+3X_4-1=0$

Oefening 3

a) rang $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) = 3$? ok

aantal nt nul rijen

rang $\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$? ok als $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a+4-1-4 = a-1$ moet $=0$

$\Rightarrow a = 1$

dim − rang uitgeb.matrix $= 3-3=0$ → 0-dim doorsnede op ∞

rang matrix < rang uitgebreide matrix → doorsnede op ∞

Oefeningen Laam II: Bundels van hypervlakken

1. Beschouw in $AG(5,3)$ de twee hypervlakken H_1 en H_2 met:

   $$\begin{aligned} H_1 &: X_1 + X_2 - X_3 + X_4 - X_5 - 1 = 0 \\ H_2 &: X_1 + X_3 - X_5 = 0 \end{aligned}$$

   en een punt $p = (1,0,0,-1,0)$. Stel de vergelijking op van het hypervlak door p en $H_1 \cap H_2$.

2. Beschouw in $AG(4,5)$ het hypervlak $H_1 : X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 - 2 = 0$ en het punt $p = (1,2,4,0)$. Stel de vergelijking op van het hypervlak door p en parallel met H_1. (

3. Beschouw in $AG(3,3)$ de drie vlakken $H_1 : aX_1 + X_2 + 2X_3 + 1 = 0, H_2 : X_1 + X_2 + 2 = 0, H_3 : 2X_1 + 2X_2 + X_3 = 0$, met $a \in GF(3)$.

   (a) Voor welke waarde van a is de doorsnede van deze drie vlakken een punt op oneindig? (Werk voortaan verder met die waarde voor a).

   (b) Is er dan een parallel paar vlakken te vinden onder deze drie vlakken?

   (c) Bepaal de vergelijking van het unieke vlak door het punt $p = (0,2,1)$ en $H_1 \cap H_3$.

   (d) Stel nu expliciet de vergelijking op van het vlak door $p, q = (2,0,1)$ en $r = (0,0,2)$ en verifieer dat dit hetzelfde vlak is.

4. Beschouw $AG(3,4)$. We bouwen $GF(4)$ op als $GF(2)[t]/(t^2 + t + 1)$. Beschouw de drie vlakken H_1, H_2, H_3.

   $$\begin{aligned} H_1 &: X_1 + X_2 + X_3 + t = 0 \\ H_2 &: X_2 + X_3 + (t+1) = 0 \\ H_3 &: X_1 + X_2 + tX_3 + 1 = 0 \end{aligned}$$

   (a) Bepaal met bundels het vlak door de punten $p = (1,0,0)$ en $q = (0,t,0)$, en door $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

   (b) Bepaal nu het punt $r = H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

   (c) Stel nu expliciet de vergelijking op (via een determinant) van het vlak door p, q en r en vergelijk.

b) ja, H_1 en H_3: $2H_1 = H_3 + c$

c) $\alpha H_1 + \beta H_3$ met $p = (0, 2, 1)$

p in H_1: $0 + 2 + 2 + 1 = 5 = 2$; p in H_3: $0 + 4 + 1 = 5 = 2$

$\alpha(2) + \beta(2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$ stel $\alpha = 1 \Rightarrow (1X_1 + X_2 + 2X_3 + 1) - (2X_1 + 2X_2 + X_3) = 0$

$\Leftrightarrow -X_1 - X_2 + X_3 + 1 = 0$

d) $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2X_1 - 4X_1 + 2X_2 + 8 - 4X_3 - 4X_2 = X_1 + X_2 + 2X_3 + 2 = 0$$

Oefening 4

a) $\alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3 = 0$

$p = (1, 0, 0) \Rightarrow$ in H_1: $1+t$, in H_2: $1+t$, in H_3: 0 ; $\alpha(1+t) + \beta(1+t) = 0$

$q = (0, t, 0) \Rightarrow$ in H_1: 0, in H_2: 1, in H_3: $t+1$; $\beta(1) + \gamma(1+t) = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta$, $\beta = \gamma(1+t)$ stel $\alpha = 1+t$

$\Rightarrow (t+1)(X_1 + X_2 + X_3 + t) + (t+1)(X_2 + X_3 + (t+1)) + 1(X_1 + X_2 + tX_3 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow tX_1 + X_2 + tX_3 + tX_4 = 0$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 & t+1 \\ 1 & 1 & t & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & t+1 \\ 0 & 0 & t+1 & t+1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad r = (1, t, 1)$$

c) $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(t + tx_3 - tx_3 - x_2) + (tx_1 - tx_3)$$

$\rightarrow$

$= t(x_4) + x_2 + tx_1 + tx_3$ klopt !

28/03 ① Beschouw in AG(5,q) een 3-dimensionale affiene ruimte U en een affien vlak V die snijden in een rechte. Tel het aantal rechten die met V ten minste 1 punt gemeen hebben en zwak parallel zijn aan U.

② Beschouw in AG (6,5) de 2 hypervlakken H_1, H_2 met $H_1: 2X_1+X_2+3X_3+4X_4+X_6+3=0$, $H_2: X_1+4X_2+3X_3+3X_5+2X_6+2=0$

(a) Omschrijf de intersectie op oneindig van deze 2 hypervlakken

(b) Zij p=(1,1,0,1,2,3) een punt van AG(6,5). Stel de vergelijking op van het hypervlak H dat zowel P als de deelruimte $H_1 \cap H_2$ bevat.

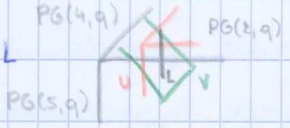
(c) Hoeveel punten van AG(6,5) hebben hetzelfde hypervlak H bepaald? Motiveer je antwoord?

(d) Laten we H_1, H_2, H buiten beschouwing, hoeveel hypervlakken blijven dan nog over in de desbetreffende hypervlakkenbundel? Motiveer je antwoord.

---

q oneindig
→ projectieve ruimte van 1 dim. lager

① U: 3-dim, V: 2-dim, U∩V: 1-dim = L



//U, 1 punt uit V

q rechten // met L in V + $q^2(q^2+q)$ (# punten in V. # punten in PG(2,q)−1 (punt op oneindig van L)) ⇒ $q+q^4+q^3$

② a) rang $\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) = 2$ ⇒ niet samenvallend, rang A = 2 ⇒ $\overline{\text{nt}}$ parallel

⇒ snijden in 4-dimensionale deelruimte, $\overline{\text{nt}}$ parallel ⇒ 3-dimensionale deelruimte gemeenschappelijk

b) $2.1+1+3.0+4.1+3+3 = 2+1+4+3+3 = \boxed{3}$

$1+4.1+3.0+3.2+2.3+2 = 1+4+6+6+2 = \boxed{4}$

$\alpha(3)+\beta(4)=0$ ⇒ kies $\alpha=3$ en $\beta=4$ ⇒ $9+16=25=0$ of $\alpha=2$ en $\beta=1$

$3(2X_1+X_2+3X_3+4X_4+X_6+3)+4(X_1+4X_2+3X_3+3X_5+2X_6+2)=0$

$\Leftrightarrow 4X_2+X_3+2X_4+2X_5+X_6+2=0$

c) # punten in H − # punten in 4-dimensionale intersectie $= 5^5 - 5^4 = 5^4(5-1) = 5^4 4$

d) $\underbrace{\frac{q^6-q^4}{q^5-q^4}}_{\text{\# hypervlakken door 3-dim. deelruimten}} - \overset{}{3} = q-2 = 3$

↳ H_1, H_2, H

punten in projectief vlak: coördinaat meer maar oorsprong niet: vb.: 3-dim → q - 1 maar je kan alles delen: $(a,b,c,d)=(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2},\frac{d}{2})$ zijn dezelfde punten → $\frac{1}{q-1}$ => $\frac{q^4-1}{q-1} = q^3+q^2+q+1$ = # punten op oneindig van 3-dimensionale ruimte

③ Gegeven in AG(5, q) een affien vlak α en een affiene rechte L zodat $\alpha \cap L = \emptyset$. Tel het aantal vlakken π in AG(5, q) zo dat α en π snijden in juist één rechte en zo dat L zwak parallel is met π.

④ Beschouw in AG(4, 5) de 2 hypervlakken H_1 en H_2 met H_1: $3X_1+2X_2+X_3+X_4+4=0$, H_2: $4X_1+X_2+3X_3+aX_4+3=0$ waarbij a ∈ GF(5)

(a) i Hoeveel affiene punten liggen op de doorsnede van H_1 en H_2?

ii Voor welke waarde van a zijn deze 2 hypervlakken parallel?

(b) Stel nu a zoals in vraag (a) puntje ii

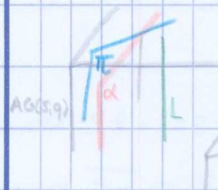
i Wat is de vergelijking van het hypervlak parallel met H_1 en H_2 en gaande door het punt $p=(2,0,3,1)$?

ii Is dit gevonden hypervlak uniek? Verklaar je antwoord.

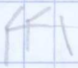
(c) Hoeveel hypervlakken liggen in 1 parallelklasse. Verklaar je antwoord.

---

③



1) echt disjunct, ook op oneindig:
kies punt op oneindig van α, rechte van α door punt op oneindig, punt van L op oneindig
=> $(q+1).q.1 = q^2+q$ vlakken π



2) $L \cap \alpha$ = punt op oneindig: kies rechte van α, kies punt in AG(5, q) niet in α: $\frac{q^5-q^2}{q^*-q} = q^4+q^3+q^2$ vlakken π

④ (a) i rang $\left(\begin{array}{cccc:c} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & a & 3 \end{array}\right) = 2 \Rightarrow \overline{nt}$ samenvallend
hypervlak = 3-dim. → doorsnede: 2-dim.
=> $5^2 = 25$ punten

ii a=3 → parallel (rang=1)

(b) i $\alpha H_1 + \beta H_2 = 0 \iff \alpha 4 + \beta 3 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$
$\Rightarrow 3X_1+2X_2+X_3+X_4+4+3X_1+2X_2+X_3+X_4+1=0 \iff X_1+4X_2+2X_3+2X_4=0$

ii uniek: 2-dim. ruimte + 1 punt => juist 1 3-dim. ruimte

(c) 5

Bilineaire en sexquilineaire vormen (reeks 1)

$f: V \times W \to K$ is een bilineaire vorm als $\forall v, v_1, v_2 \in V, \forall w, w_1, w_2 \in W$ en $\lambda \in K$:

- $f(v_1 + v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w)$
- $f(v, w_1 + w_2) = f(v, w_1) + f(v, w_2)$
- $f(\lambda v, w) = f(v, \lambda w) = \lambda f(v, w)$

of $\forall v, v_1, v_2 \in V, \forall w, w_1, w_2 \in W$ en $k, l \in K$:

- $f(kv_1 + lv_2, w) = kf(v_1, w) + l f(v_2, w)$
- $f(v, kw_1 + lw_2) = k f(v, w_1) + l f(v, w_2)$

Oefening 1

Onderzoek of volgende afbeeldingen naar $\mathbb{R}$ bilineaire vormen zijn

a) $f_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \to \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- $f_1\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c & d \end{pmatrix} = (a_1+a_2)d - c(b_1+b_2)$

  $f_1\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) + f_1\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix} = da_1 - cb_1 + da_2 - cb_2$

  oke

- $f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1+c_2 \\ d_1+d_2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = a(d_1+d_2) - b(c_1+c_2)$

  $f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}\right) + f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c_2 & d_1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & b \\ c_1 & d_2 \end{pmatrix} = ad_1 - bc_1 + ad_2 - bc_2$

  oke

- $f_1\left(\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda ad - \lambda cb$

  $f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = a\lambda d - b\lambda c$

  $\lambda f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \lambda \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda (ad - cb)$

  oke

b) $f_2: M_3(\mathbb{R}) \times M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}: ((a_{ij}), (b_{ij})) \to a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$

- $f_2\left(k(a_1, a_2, a_3) + l(a'_1, a'_2, a'_3), \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) = (a_1k + a'_1l)b_1 + (a_2k + a'_2l)b_2 + (a_3k + a'_3l)b_3$

  $k f_2((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) + l f_2((a'_1, a'_2, a'_3), (b_1, b_2, b_3)) = ka_1b_1 + ka_2b_2 + ka_3b_3 + la'_1b_1 + la'_2b_2 + la'_3b_3$ oke

- $f_2\left((a_1, a_2, a_3), k\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix}\right) = a_1(kb_1 + lb'_1) + a_2(kb_2 + lb'_2) + a_3(kb_3 + lb'_3)$

  $k f_2\left((a_1, a_2, a_3), \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) + l f_2\left((a_1, a_2, a_3), \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix}\right) = ka_1b_1 + ka_2b_2 + ka_3b_3 + la_1b'_1 + la_2b'_2 + la_3b'_3$

15'

LAAM 2 :

Oefeningen : Bilineaire en sesquilineaire vormen.

reeks 1.

---

1. Onderzoek of de volgende afbeeldingen naar $\mathbb{R}$ bilineaire vormen zijn.

a. $f_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

b. $f_2 : M_3(\mathbb{R}) \times M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : ((a_{ij}),(b_{ij})) \mapsto$

$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$

---

2. In vectorruimte $V(2,\mathbb{R})$ met basis $B = (e_1, e_2)$ geldt $u = x_1e_1 + y_1e_2$ en $v = x_2e_1 + y_2e_2$.

Onderzoek welke van de volgende afbeeldingen bilineaire vormen zijn.

a. $f_3 : V \times V \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto x_1x_2 - y_1y_2$

b. $f_4 : V \times V \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto x_1x_2$

c. $f_5 : V \times V \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto x_1 + x_2$

d. $f_6 : V \times V \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto 3x_1x_2 + 7y_1y_2$

e. $f_7 : V \times V \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto x_1y_2 + x_2y_1 + 5$

---

3. Beschouw in vectorruimte $\mathbb{R}^2$ de vectoren $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ en $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ t.o.v. basis $B = \left(\overset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$.

Bepaal van de volgende bilineaire vormen de matrixvoorstelling t.o.v. basis B, bepaal ook de rang van f_i :

Oefening 2

In vectorruimte $V(2, \mathbb{R})$ met basis $b = (e_1, e_2)$ geldt $u = x_1e_1 + y_1e_2$ en $v = x_2e_1 + y_2e_2$

Onderzoek welke van de volgende afbeeldingen bilineaire vormen zijn.

a) $f_3 : V \times V \to \mathbb{R} : (u, v) \to x_1x_2 - y_1y_2$

- $f_3(k(x_1e_1 + y_1e_2) + l(x_1'e_1 + y_1'e_2), x_2e_1 + y_2e_2) = f_3((kx_1 + lx_1')e_1 + (ky_1 + ly_1')e_2, x_2e_1 + y_2e_2)$
  $= (kx_1 + lx_1')x_2 - (ky_1 + ly_1')y^2$
  $k f_3(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) + l f_3(x_1'e_1 + y_1'e_2, x_2e_1 + y_2e_2) = kx_1x_2 - ky_1y_2$
  $+ lx_1'x_2 - l y_1'y_2$ oke
- $f_3(x_1e_1 + y_1e_2, k(x_2e_1 + y_2e_2) + l(x_2'e_1 + y_2'e_2)) = f_3(x_1e_1 + y_1e_2, (kx_2 + lx_2')e_1 +$
  $(ky_2 + ly_2')e_2) = x_1(kx_2 + lx_2') - y_1(ky_2 + ly_2')$
  $k f_3(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) + l f_3(x_1e_1 + y_1e_2, x_2'e_1 + y_2'e_2) = kx_1x_2 - ky_1y_2$
  $+ lx_1x_2' - l y_1y_2'$ oke

b) $f_4 : V \times V \to \mathbb{R} : (u, v) \to x_1x_2$

- $f_4(k(x_1e_1 + y_1e_2) + l(x_1'e_1 + y_1'e_2), x_2e_1 + y_2e_2) = (kx_1 + lx_1')x_2$
  $k f_4(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) + l f_4(x_1'e_1 + y_1'e_2, x_2e_1 + y_2e_2) = kx_1x_2 + lx_1'x_2$ oke
- $f_4(x_1e_1 + y_1e_2, k(x_2e_1 + y_2e_2) + l(x_2'e_1 + y_2'e_2)) = x_1(kx_2 + lx_2')$
  $k f_4(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) + l f_4(x_1e_1 + y_1e_2, x_2'e_1 + y_2'e_2) = kx_1x_2 + lx_1x_2'$ oke

c) $f_5 : V \times V \to \mathbb{R} : (u, v) \to x_1 + x_2$

- $f_5(k(x_1e_1 + y_1e_2) + l(x_1'e_1 + y_1'e_2), x_2e_1 + y_2e_2) = kx_1 + lx_1' + x_2$
  $k f_5(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) + l f_5(x_1'e_1 + y_1'e_2, x_2e_1 + y_2e_2) = kx_1 + kx_2$
  $+ lx_1' + lx_2$ fout! → niet bilineair

d) $f_6 : V \times V \to \mathbb{R} : (u, v) \to 3x_1x_2 + 7y_1y_2$

- $f_6(k(x_1e_1 + y_1e_2) + l(x_1'e_1 + y_1'e_2), x_2e_1 + y_2e_2) = (kx_1 + lx_1')x_2 \cdot 3 + 7 \cdot y_2(ky_1 + ly_1')$
  $k f_6(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) + l f_6(x_1'e_1 + y_1'e_2, x_2e_1 + y_2e_2) = kx_1x_2 3 + 7k y_1y_2$
  $+ lx_1'x_2 3 + l7y_1'y_2$ oke
- $f_6(x_1e_1 + y_1e_2, k(x_2e_1 + y_2e_2) + l(x_2'e_1 + y_2'e_2)) = x_1(kx_2 + lx_2')3 + 7y_1(ky_2 + ly_2')$
  $k f_6(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) + l f_6(x_1e_1 + y_1e_2, x_2'e_1 + y_2'e_2) = kx_1x_2 3 + lx_1x_2' 3$
  $+ k7y_1y_2 + l7y_1y_2'$ oke

e) $f_7 : V \times V \to \mathbb{R} : (u, v) \to x_1y_2 + x_2y_1 + 5$

- $f_7(k(x_1e_1 + y_1e_2) + l(x_1'e_1 + y_1'e_2), x_2e_1 + y_2e_2) = (kx_1 + lx_1')y_2 + (ky_1 + ly_1')x_1 + 5$
  $k f_7(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) + l f_7(x_1'e_1 + y_1'e_2, x_2e_1 + y_2e_2) = kx_1y_2 + lx_1'y_2 + 5k$
  $+ ky_1x_2 + l y_1'x_2 + 5\lambda$ fout → niet bilineair

3. $f_8(u,v) = x_1x_2 + y_1y_2$

$f_9(u,v) = x_1y_2 - x_2y_1$

$f_{10}(u,v) = x_1y_2 - 4x_2y_1 + 3y_1y_2$

$f_{11}(u,v) = x_1x_2 + 7x_2y_1$

4. Beschouw in vectorruimte $\mathbb{R}^3$ de vectoren $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ t.o.v. basis $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Bepaal van de volgende bilineaire vormen de matrixvoorstelling t.o.v. basis B, bepaal ook de rang van f_i

$f_{12}(u,v) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$f_{13}(u,v) = x_1y_2 + x_2y_1 + y_1z_2$

$f_{14}(u,v) = 2x_1y_2 - 3y_1z_2$

$f_{15}(u,v) = x_1y_2 + 2y_1z_2 + 3z_1x_2$

5. Beschouw een nieuwe basis $\overline{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ van $\mathbb{R}^2$.
Bepaal de matrixvoorstelling van f_8, f_9, f_{10} en f_{11} t.o.v. deze nieuwe basis $\overline{B}$

6. Beschouw een nieuwe basis $\overline{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ van $\mathbb{R}^3$.
Bepaal de matrixvoorstelling van $f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}$ t.o.v. deze nieuwe basis $\overline{B}$

7. Onderzoek welke van de bilineaire vormen f_i symmetrisch of alternerend zijn.

8. Onderzoek welke van de bilineaire vormen f_i niet-singulier zijn.

Oefening 6

sym

$$\overline{A}_{f_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{rang}=3$$

$$\overline{A}_{f_{13}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

rang= 2

$$\overline{A}_{f_{14}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

rang=2

$$\overline{A}_{f_{15}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

rang=3

Oefening 7

symmetrisch → symmetrische matrix, alternerend → scheefsymmetrische matrix (diag= 0,0,...,0,0)

(zie matrices) ook 3, 4, 6 symmetrisch, ook 1 alternerend

Oefening 8

niet-singulier → det ≠ 0

(zie matrices) ook 1, 3, 6

Oefening 9

$f_1: v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $f_1(v,v) = \det \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = xy - xy = 0$ => elke $v \in \mathbb{R}^2$ is isotroop

logisch wegens f_1 is alternerend

=> alle vectoren zijn isotroop

$\Leftrightarrow f(v,v)=0$

$f_3: v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $f_3(v,v) = x^2 - y^2 = 0$ => alleen als $x = \pm y$ zijn de vectoren isotroop

$f_9: v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $f_9(v,v) = xy - xy = 0$ => alle vectoren zijn isotroop

$f_{15}: v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $f_{15}(v,v) = xy + 2yz + 3zx = 0$ => vectoren die aan deze vergelijking voldoen zijn isotroop

Oefening 10

$x^T A y = 0 \ \forall y$

$x^T A = 0$

$\Downarrow$

rang $M_B(f) = n$

=> Rad $V = \{0\}$

f_1: niet-singulier → Rad $V = \{0\}$

f_4: $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ Rad $V \Leftrightarrow (x \ \ y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, y = willekeurig => $v = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in$ Rad V

f_{12}: niet-singulier → Rad $V = \{0\}$

Oefening 11

a) $f(kv + lv', w) = \alpha(kv + lv')\beta(w) = [k\alpha(v) + l\alpha(v')]\beta(w) = k f(v,w) + l f(v',w)$

$f(v, mw + nw') = \alpha(v)\beta(mw + mw') = \alpha(v)[m\beta(w) + n\beta(w')] = m f(v,w) + n f(v,w')$

b) $M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 \end{pmatrix} \Rightarrow f(v,w) = (x_1 \cdot y_1) M_B(f) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$= \lambda_1\mu_1 x_1 x_2 + \lambda_2\mu_1 y_1 x_2 + \lambda_1\mu_2 x_1 y_2 + \lambda_2\mu_2 y_1 y_2$

Oefening 12

a) $f(2.1, 1) = 2 + 1 = 3$

$2 f(1, 1) = 2(1+1) = 4$

$\ne$ 4 => geen bilineaire vorm

b) analoog tegenvoorbeeld

c) symmetrische bilineaire vorm

d) niet-symmetrische bilineaire vorm: $f(p,q) = p(1).q'(1) \neq q(1)p'(1) = f(q,p)$

Oefening 13

- $\text{spoor}((A_1 + A_2)^T B) = \text{spoor}(A_1^T B + A_2^T B) = \text{spoor}(A_1^T B) + \text{spoor}(A_2^T B)$
- $\text{spoor}(A^T(B_1 + B_2)) = \text{spoor}(A^T B_1 + A^T B_2) = \text{spoor}(A^T B_1) + \text{spoor}(A^T B_2)$
- $\text{spoor}((\lambda A^T B) = \text{spoor}(\lambda(A^T B)) = \text{spoor}(A^T(\lambda B)) = \lambda\,\text{spoor}(A^T B)$
- symmetrisch: $\text{spoor}(B^T A) = \text{spoor}(B^T A)^T = \text{spoor}(A^T B)$

Bilineaire en sesquilineaire vormen (reeks 2)

Oefening 6

- A is symmetrische matrix: $A^T = A \Rightarrow A.A^T = A^2 = A^T A$

  $(A^2)^T = A^T A^T = A A = A^2$

- A is scheefsymmetrische matrix: $A = -A^T \Rightarrow A.A^T = -A^2 = A^T A$

  $(A^2)^T = A^T A^T = A A = A^2$

Oefening 8

$\text{diag}(A) \rightarrow \text{diag}(A^{(s)})$

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij}^{(s)} + a_{ij}^{(as)} \\ a_{ji} &= a_{ji}^{(s)} + a_{ji}^{(as)} = a_{ij}^{(s)} - a_{ij}^{(as)} \end{aligned}\right\} a_{ij}^{(s)} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \text{ en } a_{ij}^{(as)} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$$

2 vergelijkingen, 2 onbekenden → unieke oplossing

Oefening 10

$v_1^T A v_2 = v_1^T \lambda_2 B v_2 = \lambda_2 v_1^T B v_2$

↳ transponeren

$v_2^T A^T v_1 = v_2^T A v_1 = v_2^T B v_1 \lambda_1 = \lambda_1 v_2^T B v_1 \overset{\text{transponeren}}{=} \lambda_1 v_1^T B^T v_2 = \lambda_1 v_1^T B v_2$

$\Rightarrow \lambda_2 v_1^T B v_2 = \lambda_1 v_1^T B v_2 \Leftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) v_1^T B v_2 = 0 \Rightarrow v_1^T B v_2 = 0$ want $\lambda_1 \neq \lambda_2$

9. Zoek de isotrope vectoren in de bilineaire ruimten (V, f_i) voor $f_i = f_1, f_3, f_9, f_{15}$

---

10. Zoek rad V voor f_1, f_4, f_{12}

---

11. Beschouw een vectorruimte $V(n, K)$ en twee lineaire vormen $\alpha : V \to K$ en $\beta : V \to K$.

a) Bewijs dat de afbeelding $f : V \times V \to K : f(v, w) = \alpha(v) . \beta(w)$ voor $\forall v, w \in V$ een bilineaire vorm over $V(n, K)$ is.

b) Als $n = 2$ en $B = \{e_1, e_2\}$ een basis van $V(n, K)$ is met $\alpha(e_1) = \lambda_1$, $\alpha(e_2) = \lambda_2$, $\beta(e_1) = \mu_1$, $\beta(e_2) = \mu_2$ bepaal dan $m_B(f)$ en een uitdrukking van f t.o.v. B ($\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in K$)

---

12. Beschouw de vectorruimte $P_n(\mathbb{R})$ van de reële n^{de} graadspolynomen in één veranderlijke x.

Zo geldt $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $a_i \in \mathbb{R}$ en

$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$, $b_i \in \mathbb{R}$

en $p(x), q(x) \in P_n(\mathbb{R})$.

Onderzoek of de volgende afbeeldingen symmetrische bilineaire vormen zijn van $P_n(\mathbb{R})$ als

a) $f(p, q) = p(0) + q(0)$

b) $f(p, q) = p(1) + q(1)$

c) $f(p, q) = p(1) \cdot q(1)$

d) $f(p, q) = p(1) \cdot q'(1)$

(q' de afgeleide van q naar x)

---

13. Beschouw de matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Bewijs dat spoor$(A^t . B)$ een symmetrische bilineaire vorm in de vectorruimte $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ is.

-19''

LAAM 2 :

Oefeningen : Bilineaire en sesquilineaire vormen.

reeks 2

1. Toon aan met een voorbeeld dat de som van twee reële positief-semi-definiete n×n-matrices een positief-definiete matrix kan zijn.

2. Beschouw A een reële niet-singuliere n×n-matrix ($n>1$)
Toon aan met een voorbeeld dat als A een niet-symmetrische matrix is dan kan A ook positief-semi-definiet zijn.

3. Toon aan met een voorbeeld dat er reële n×n positief-semi-definiete matrices A en n×m-matrices P ($m<n$) bestaan, zodat $P^t.A.P$ positief-definiet is.

4. Toon aan met een voorbeeld dat er reële n×n-matrices A en B bestaan die niet-symmetrisch en positief-definiet zijn, zodat spoor$(AB)<0$

5. a) Toon aan met een voorbeeld dat in het algemeen
$A^t.A \neq A.A^t$
b) Bewijs dat als A een reële niet-singuliere n×n-matrix is, dan zijn $A^t.A$ en $A.A^t$ positief-definiet.
~~c)~~ Bewijs dat als A een reële (niet-singuliere) n×n-matrix is, dan zijn $A^t.A$ en $A.A^t$ symmetrisch.

$\boxed{6.}$ Als A een symmetrische of scheef-symmetrische n×n-matrix is, dan geldt $A.A^t = A^t.A$ en A^2 is symmetrisch.

7. Toon aan met een voorbeeld dat als A en B symmetrische n×n-matrices zijn, dan is niet noodzakelijk AB symmetrisch.

---

8. In een veld K met kar K $\neq 2$ kan elke vierkante matrix A op unieke wijze geschreven worden als $A = A^{(s)} + A^{(ss)}$ met $A^{(s)}$ symmetrisch en $A^{(ss)}$ scheef-symmetri

---

9. Onderstel dat A een reële symmetrische n×n-matrix is en B een reële symmetrische positief-definiete n×n-matrix i
Bewijs dat $\det(A - \lambda B) = 0$ n reële oplossingen heeft, rekening houdend met de multipliciteit.

---

10. Beschouw A en B zoals in opgave 9.
Bewijs dat als $Av_1 = \lambda_1 Bv_1$ en $Av_2 = \lambda_2 Bv_2$ met $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dan geldt $v_1^t B v_2 = 0$

---

11. Is V een eindigdimensionale vectorruimte over veld K met kar K $\neq 2$ en f een symmetrische bilineaire vorm op V en Q de met f geassocieerde kwadratische vorm op V, bewijs dan

a) $f(u,v) = \frac{1}{2}\left[Q(u+v) - Q(u-v)\right]$

b) $f(u+v, u-v) = 2Q(u) - 2Q(v)$

c) $Q(ku + mv) = k^2 Q(u) + km f(u,v) + m^2 Q(v)$

$u, v \in V$; $k, m \in K$.

---

12. Als voor een reële n×n-matrix A geldt dat $v^t A v \neq 0$ voor elke $v \neq 0$ dan is A positief-definiet of negatief-definiet. Bewijs.

opmerking:

1) positief-definiete matrix: $x^t A x > 0 \quad \forall x \setminus 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ met } \lambda_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

positief-semi-definiete matrix: $x^t A x \geq 0 \quad \forall x$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ met } \lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

2) $Q: V \to K$ is een kwadratische vorm als

$Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v), \forall \lambda \in K, \forall v \in V$

$f(v,w) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$, $\forall v, w \in V$ is geen bilineaire vorm

$\Rightarrow f(v,v) = Q(v+v) - Q(v) - Q(v) = 4\,Q(v) - 2Q(v) = 2Q(v)$

Oefening 11

a) $\frac{1}{2}\left[Q(u+v) - Q(u-v)\right] = \frac{1}{4}\left[f(u+v, u+v) - f(u-v, u-v)\right]$

$= \frac{1}{4} f(u,u) + \frac{1}{4} f(v,v) + \frac{1}{2} f(u,v) - \frac{1}{4} f(u,u) - \frac{1}{4} f(v,v) + \frac{1}{2} f(u,v) = f(u,v)$

b) $f(u+v, u-v) = f(u, u-v) + f(v, u-v) = f(u,u) - f(u,v) + f(v,u) - f(v,v)$

$= 2Q(u) - 2Q(v) - Q(u+v) + Q(u) + Q(v) + Q(u+v) - Q(u) - Q(v)$

$= 2Q(u) - 2Q(v)$

c) $Q(ku + mv) = f(ku, mv) + Q(ku) + Q(mv) = mk\, f(u,v) + k^2 Q(u) + m^2 Q(v)$

Bilineaire en sesquilineaire vormen (reeks 3)

Oefening 1

- $Q(\lambda A) = \lambda a_{11} \lambda a_{22} - \lambda a_{12} \lambda a_{21} = \lambda^2 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = \lambda^2 \det(A)$
- $f(A,B) = Q(A+B) - Q(A) - Q(B)$ is bilineaire vorm?
  - $f(\lambda C_1 + \mu D_1, B) = \lambda f(C_1, B) + \mu f(D_1, B)$
    * $\lambda c_{11} b_{22} + \lambda b_{11} c_{22} - \lambda c_{12} b_{21} - \lambda b_{12} c_{21} + \mu d_{11} b_{22} + \mu b_{11} d_{22} - \mu d_{12} b_{21} - \mu b_{12} d_{21}$
    * $(\lambda c_{11} + \mu d_{11}) b_{22} + b_{11} (\lambda c_{22} + \mu d_{22}) - (\lambda a_{12} + \mu a_{12}) b_{21} - b_{12} (\lambda a_{21} + \mu a_{21})$

$$\left.\begin{array}{l} - f(A, \lambda E_1 + \mu F_1) = \lambda f(A, E_1) + \mu f(A, F_1) \\ - f(\lambda A, B) = \lambda f(A,B) = f(A, \lambda B) \end{array}\right\} \text{analoog en triviaal}$$

- $f_w(A,A) = -2a_{11}^2 - 2a_{12}^2 = -2(a_{11}^2 + a_{12}^2) < 0$ voor $A \neq 0$

↳ restrictie op w

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}$$

Oefening 2

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 25-10\lambda+\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda=6 \text{ of } \lambda=4$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

E_1 bij $\lambda_1 = 4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_1 = \left\{ k \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$$

norm: $k^2+k^2=1 \Leftrightarrow 2k^2=1$

$\Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad e_1' = \begin{pmatrix} +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

E_2 bij $\lambda_2 = 6$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_2 = \left\{ k \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$$

norm: $k^2+k^2=1 \Leftrightarrow 2k^2=1$

$\Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad e_2' = \begin{pmatrix} +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} +\frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \overline{A} = C^T A C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow 2Q(v) = 4x_1^2 + 6x_2^2$$

Herhalingsoefeningen

Oefening 1

In de vectorruimte $V(3,\mathbb{R})$ met basis $B=(e_1, e_2, e_3)$ geldt $u = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3$; $v = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3$

(a) Toon aan dat $f(u,v) = 2x_1y_2 - 3y_1z_2$ een bilineaire vorm is

(b) Bepaal de matrixvoorstelling t.o.v. de basis B en eveneens de rang van f_B

(c) Ga na of f symmetrisch of alternerend is en onderzoek bovendien of f al dan niet singulier is

(a) $f(ku_1 + lu_2, v) = 2y_2(kx_1' + lx_1'') - 3z_2(ky_1' + ly_1'')$

$u = ku_1 + lu_2 = kx_1'e_1 + ky_1'e_2 + kz_1'e_3 + lx_1''e_1 + ly_1''e_2 + lz_1''e_3$

$= 2kx_1'y_2 + 2lx_1''y_2 - 3ky_1'z_2 - 3ly_1''z_2 = k(2x_1'y_2 - 3y_1'z_2) + l(2x_1''y_2 - 3y_1''z_2)$

$= k\,f(u_1,v) + l\,f(u_2,v)$

analoog voor $f(u, kv_1 + lv_2)$

of via

$$\begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & f(1,3) \\ f(2,1) & f(2,2) & f(2,3) \\ f(3,1) & f(3,2) & f(3,3) \end{pmatrix}$$

(b) $(x_1\ y_1\ z_1)\, M_{Bf} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_2 - 3y_1z_2$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rang = 2

(c) niet symmetrisch of alternerend, det = 0 ⇒ f is singulier