Meetkunde en lineaire algebra

Daan Pape
Universiteit Gent

7 juni 2012

1 Möbius transformaties

De mobiustransformatie wordt gegeven door:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

Als we weten dat het drietal (x_1, x_2, x_3) op (x'_1, x'_2, x'_3) wordt afgebeeld volgt de mobiustransformatie uit:

$$\begin{cases} F(x_1) = x'_1 \\ F(x_2) = x'_2 \\ F(x_3) = x'_3 \end{cases}$$

We beschouwen nu twee speciale gevallen:

- ∞ wordt afgebeeld op een getal. We weten echter dat $\lim_{z\to\infty}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{a}{c}$. Dus kunnen we stellen dat de vgl dan $\frac{a}{c}$ afbeeldt op dat getal.
- een getal wordt afgebeeld op ∞. De enige manier waarop vergelijking (1) oneindig kan worden is als de noemer gelijk wordt aan 0. Er moet dus gelden dat $cz + d = 0$.

De fixpunten van de Möbiustransformatie $G(z)$ worden meteen gevonden door het oplossen van de vergelijking $G(z) = z$.

2 Basisbewerkingen matrices

De matrixvermenigvuldiging van een matrix A en een matrix B is alleen mogelijk als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B. Het matrixproduct wordt dan gegeven door:

$$(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{2}$$

Een matrix transponeren kan in maple eenvoudig met `A^%T`. Het commando `RowOperation(matrix, [rij1,rij2] , factor)` telt rij1 op bij factor keer rij2.

3 Stelsels van vergelijkingen

Het commando `RowOperation(matrix, [rij1,rij2], factor)` telt rij1 op bij factor keer rij2. Met het `subs` commando kan een variabele worden ingevuld. Stel dat in vergelijking `g1` de waarde `x=5` moet worden ingevuld, dan kan dit met `subs(x=5,g1)`.

4 Lagrange interpolatie en secret sharing

Lagrange interpolatie maakt het mogelijk om gegeven een paar functiewaarden de functie te construeren. We demonstreren dit met een voorbeeld. Stel we moeten een tweedegraadsveelterm $f(x) = ax^2 + bx + c$ en we weten volgende punten:

x	$f(x)$
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3

We veronderstellen nu dat de gegeven x-waarden nulpunten zijn. We stellen volgende vergelijkingen op door permutatie van alle nulpunten:

$$g_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$
$$g_2(x) = (x - x_2)(x - x_3)$$
$$g_3(x) = (x - x_3)(x - x_1)$$

Volgens het theorema van Lagrange moeten we nu een lineaire combinatie nemen van deze vergelijkingen:

$$f(x) := ug_1 + vg_2 + wg_3 \tag{3}$$

We evalueren nu deze functie in alle gegeven x-waarden, $\{x_1, x_2, x_3\}$. We stellen de bekomen uitdrukkingen gelijk aan de gegeven y-waarden, $\{y_1, y_2, y_3\}$. En lossen de vergelijkingen op om de lineaire combinatie (u, v, w) te weten te komen. De gezochte functie wordt nu gegeven door (u, v, w) in te vullen in functie 3.

Dit werkt ook voor veeltermen van een hogere graad en we kunnen stellen dat we de functiewaarde van $n + 1$ punten nodig hebben om een veelterm van graad n te bepalen.

Het secret sharing systeem van Adi Shamir is een toepassing van de Lagrange interpolatie. De geheime code is gelijk aan de constante term, dus de waarde in het punt $x = 0$, van een n-de graad veelterm. Opdat minimum k personen nodig zouden zijn om de veelterm te construeren moet hij dus voan graad $k - 1$ zijn. De formule voor $f(x)$ wordt nu gegeven door

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} P_j(x) \text{ met } P_j = y_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \tag{4}$$

Ook al ziet het er op het eerste zicht niet uit, toch krijgt iedere sleutelhouder een vergelijking van de zelfde graad k als de gezochte vergelijking waarbij x de x-waarde van die persoon zijn sleutel is en y, de y-waarde van zijn sleutel:

$$ax^k + bx^{k-1} + \cdots + cx + d = y \tag{5}$$

5 Determinanten en rang

De determinant van een matrix is een manier om in één getal veel informatie over een matrix uit te drukken. Volgende uitspraken gelden:

- De determinant is gelijk aan 0 als de kolommen lineair afhankelijk zijn.
- De determinant is multilineair, lineair met elke kolom, met de matrix.
- De determinant van de eenheidsmatrix is 1

De rang van een matrix, of stelsel vectoren, is het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren in het stelsel.

6 Basistransformaties

Een stel vectoren is een basis van een vectorruimte als:

- Het is een voortbrengend stel, $(span(\mathcal{B}) = V)$
- De vectoren zijn allemaal onafhankelijk, dus de determinant is niet 0

De eenheidsmatrix van grootte n is een **standaardbasis** voor een vectorruimte van dimensie n. Nu kunnen er verschillende transformaties met hun formules gedefinieerd worden:

- Gegeven is een standaardbasis en een nieuwe basis $\mathcal{B}$, de transitiematrix Q van de oude basis naar de nieuwe basis $\mathcal{B}$ is nu gegeven door $\mathcal{B}$. Er zijn nu twee mogelijkheden:

1. Stel w een vector uitgedrukt tegenover de nieuwe basis $\mathcal{B}$. Dan vind men de uitdrukking voor w tegenover de oude basis door $Q * w$
2. Stel w een vector uitgedrukt tegenover de oude basis. Dan vind men de uitdrukking voor w tegenover de nieuwe basis door $Q^{-1} * w$. De nu gevonden coördinaten geven dus de lineaire combinatie van de nieuwe basis die de vector w tegenover de oude basis uitdrukt.

- Gegeven is een oude basis V en een nieuwe basis W en we bepalen de transitiematrix Q van V naar W. Een korte manier om dit te doen is om van V naar de standaardbasis te gaan en dan van de standaardbasis naar W. Dan wordt Q gegeven door $V^{-1} * W$. Er zijn nu twee mogelijkheden:

1. Stel w een vector uitgedrukt tegenover de nieuwe basis W. Dan vind men de uitdrukking voor w tegenover de oude basis door $Q * w$
2. Stel w een vector uitgedrukt tegenover de oude basis V. Dan vind men de uitdrukking voor w tegenover de nieuwe basis door $Q^{-1} * w$. De nu gevonden coördinaten geven dus de lineaire combinatie van de nieuwe basis die de vector w tegenover de standaardbasis uitdrukt.

De transitiematrix S tussen een basis A en een basis B wordt gegeven door de lineaire combinatie van A uit B per kolom uit te drukken.

7 Lineaire afbeeldingen

Een lineaire afbeelding wordt vaak als functie opgeschreven. Men moet de functie per basisvector toepassen en dan kan men de matrixvoorstelling opschrijven, onthoudt dat iedere kolom een vector is.

Zij A een lineaire afbeelding t.o.v. de standaardbasis. Zij Q de transitiematrix van de standaardbasis naar de nieuwe basis. Dan wordt de lineaire afbeelding tegenover de nieuwe basis gegeven door $A * Q$.

Zij A een lineaire afbeelding t.o.v. een oude basis P. Zij Q de transitiematrix van de standaardbasis naar de nieuwe basis. Dan wordt de lineaire afbeelding ten opzichte van de oude basis en de nieuwe basis gegeven door $P^{-1} * A * Q$.

Zij A een lineaire afbeelding t.o.v een oude basis B. Zij Q de transitiematrix van de oude basis B naar de nieuwe basis B'. Dan wordt de lineaire afbeelding ten opzichte van de nieuwe basis B' gegeven door $Q^{-1} * A * Q$.

8 Eigenwaarden

Zij A een $n \times n$ matrix, dan is λ een eigenwaarde van A als eer een kolomvector $v \neq 0$ bestaat zodat $Av = \lambda v$. We noemen v dan de eigenvector horende bij eigenwaarde λ. We berekenen de eigenwaarden van de matrix als volgt met de hand:

1. We stellen de karakteristieke vergelijking op en stellen hem gelijk aan 0, dus $det(\lambda * I_n - A) = 0$. In maple kan dit gemakkelijk door `karveelt:=Determinant(lambda*IdentityMatrix(x)-A)=0` of via een meer gespecialiseerd commando: `CharacteristicPolynomial(A,lambda)`.
2. We lossen de karakteristieke veelterm op, dit geeft ons de eigenwaarden.
3. We zoeken de eigenvectoren v_i die bij de eigenwaarden λ_i horen door per eigenwaarde het stelsel $A - \lambda_i * I_n$ op te lossen.

9 Diagonalisatie

Een matrix is slechts diagonaliseerbaar als de algebraïsche multipliciteit van de eigenwaardes gelijk is aan de meetkundige multipliciteit van de eigenwaardes:

- Algebraïsche multipliciteit: de multipliciteit van λ in de karakteristieke veelterm.
- Meetkundige multipliciteit: de dimensie van de ruimte van eigenvectoren behordende bij de eigenwaarde λ. Dit is dus het aantal niet-nulkolommen bij eigenwaarde λ.

Om een $n \times n$ matrix A over K te diagonaliseren gaat men als volgt te werk:

1. Zoek de eigenwaarden λ_i en bijbehorende eigenvectoren v_i van A.
2. Maak een matrix P met als kolommen de eigenvectoren v_i.
3. Bepaal de matrix P^{-1}.
4. Dan is $P^{-1} * A * P$ een diagonaalmatrix met op de diagonaal de eigenwaarden van A.

De diagonaalvorm helpt bij verschillende berekeningen. Om bijvoorbeeld een hoge macht n van A te berekenen geldt: $D = P^{-1} * A * P \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$. In maple is de `JordanForm(A)` een diagonaalmatrix.

10 Markov processen

Een Markov-matrix A is een $n \times n$ matrix met eigenschappen:

- Alle componenten zijn reële getallen uit het gesloten interval $[0, 1]$.
- De som van de componenten in elke kolom van A is gelijk aan 1.
- Ze hebben steeds een eigenwaarde gelijk aan 1.

Men begint dan steeds met een kolomvector v die de startverdeling voorstelt. De toestand na i stappen wordt dan gegeven door $A^i * v$. De eigenvector die hoort bij eigenwaarde 1 geeft ons meteen deze verdeling, deze moet wel genormaliseerd worden.

Voor een eigenwaarde -1 streven de machten niet naar 0. Algemeen als er meerdere eigenwaarden met absolute waarde 1 zijn dan wordt er niet naar een stabiele situatie gestreefd.

11 Gram-Schmidt

Om een basis te ortonormeren wordt het procédé van Gram-Schmidt gebruikt. Zij $\{b'_1, b'_2\}$ een basis voor E^2, respectievelijk $\{b'_1, b'_2, b'_3\}$ een basis voor E^3. Dan gaat het systeem als volgt:

1. Stel $b_1 = \frac{b'_1}{||b'_1||}$. Dan is b_1 een vector van lengte 1, $||b_1|| = \frac{\langle b'_1, b'_2 \rangle}{||b'_1||^2} = 1$.
2. Stel $\tilde{b}_2 = b'_2 - \langle b'_2, b_1 \rangle$ en $b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{||\tilde{b}_2||}$.
3. Stel $\tilde{b}_3 = b'_3 - \langle b'_3, b_1 \rangle b_1 - \langle b'_3, b_2 \rangle b_2$ en $b_3 = \frac{\tilde{b}_3}{||\tilde{b}_3||}$.

12 Affiene transformaties en bewegingen

Hoeken moeten uitgedrukt worden in radialen, hierbij geldt dat $\pi = 180°$. Een matrix R stelt een rotatie rond de oorsprong voor (t.o.v. een gordende orthonormale basis) als en slechts als:

- $R * R^t = I$
- $\det(R) = 1$

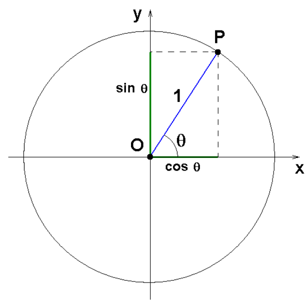
De vermnigvuldigingen van bewegingen gaan als volgt, de beweging C na B na A wordt gegeven door $R = C * B * A$. Om te controleren of een matrix R een rotatie rond de oorsprong voorstelt moet:

- $R^t * R = I_n$ zijn, in maple kan het sijn dat je een `simplify` moet doen.
- de determinant moet 1 zijn, als de determinant -1 is, is het een samenstelling van een rotatie en een reflectie.

Bij een rotatie verwachten we één eigenwaarde gelijk aan 1 en meerdere toegevoegde complexe. De as van de rotatie komt overeen met de eigenruimte van de eigenwaarde 1. Er zijn twee soorten orthonormale basissen:

1. rechtshandige orthonormale basis: determinant = 1.
2. linkshandige orhtonormale basis: determinant = -1.

Om de hoek uit een rotatie terug te vinden kijkt men naar de ligging van de sinus en de cosinus:



In het algemeen om bewegingen op een andere basis af te beelden:

- Van oude basis naar nieuwe basis: $basis^{-1} * beweging * basis$.
- Van nieuwe basis naar oude basis: $basis * beweging * basis^{-1}$

13 Kleinste-kwadraten methode

Van alle vergelijkingen moeten 2 matrices worden opgesteld:

1. Matrix A bevat alle coëfficiënten van de vergelijkingen.
2. Matrix d bevat alle uitkomsten van de vergelijkingen.

Er is een kleinste kwadraten oplossing te vinden als de rang van A gelijk is aan het aantal kolommen van A. De oplossing wordt nu gegeven door $(A^t * A)^{-1} * A^t * d$. Om te controleren of de oplossing correct is kan men controleren $\langle A^t, A * x - d \rangle$ de nulvector is.

14 Lineaire regressie

De matrix a bestaat uit een kolom 1-waarden, de andere kolom bevat de opgegeven waarden. De matrix d bevat de uitkomsten. Voor de rest werkt dit exact het zelfde als de kleinste kwadratenmethode.

15 Maple commando's

- `Column(A,i)`: geeft de i-de kolom van matrix M terug.
- `v.w`: het inproduct $< v, w >$ tussen twee vectoren, dit is dus 0 als de vectoren loodrecht op elkaar staan.
- `sqrt(v1.v1)`: de norm $||v||$ van v.
- `Vector([x,y,z])`: maakt een kolomvector.
- `GramSchmidt([v1,v2,v3], normalized)`: voert het Gramm-Schmid procédé uit op de gegeven vectoren.