Hoe los je gep. oef op?

(De lessen zijn PC-klas lessen en komen niet altijd overeen met het boek!)

Les 1: Complexe getallen

A. Möbiustransformaties

$$\boxed{F(z) = z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{cases} F(x_1) = y_1 = \dfrac{ax_1+b}{cx_1+d} \\ F(x_2) = y_2 = \dfrac{ax_2+b}{cx_2+d} \\ F(x_3) = y_3 = \dfrac{ax_3+b}{cx_3+d} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ loop Solve $(\{1,2,3\}, \{a,b,c,d\})$;

kies 1 onbekende vrij en vul a, b, c, d in in $F(z)$

in het geval $\infty \to x$: $\frac{a}{c} = x$ (limiet)

in het geval $x \to \infty$ $cx + d = 0$ (limiet voor $z \to x$)

voor driehoek: 3 punten, vgl lijn: $t \cdot$ punt $x + (1-t)$ punt y

Les 2: Matrices en stelsels lin vgl^n

A. Oplossen van stelsels

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases}$$

⇝ solve({1, 2, 3});

Reduceren in matrixvorm

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$$

Gebruik RowOperation(Args)!
Dit doet:

Args → A, [2, 3] ⇝ wissel rij 2 en 3
Args → A, [1, 2], x ⇝ rij 1 = rij 1 + x.rij 2
Args → A, 3, x ⇝ rij 3 = x.rij 3

Los stelsel op met spilmethode's (↗ 30.)

⇝ kan ook omgekeerd!

OF Interpolatie

Geg: $f(x) = ax^2 + cx + d$ (?)

$f(x_1) = y_1$
$f(x_2) = y_2$
$f(x_3) = y_3$

$$\leadsto \begin{cases} ax_1^2 + cx_1 + d = y_1 \\ ax_2^2 + cx_2 + d = y_2 \\ ax_3^2 + cx_3 + d = y_3 \end{cases}$$

$g_1 = (x - x_2)(x - x_3)$
$g_2 = (x - x_1)(x - x_3)$
$g_3 = (x - x_1)(x - x_2)$

$\rightarrow \boxed{\rho.\ u\varphi_1 + v\varphi_2 + w g_3}$

met $u = \dfrac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$

$v = \dfrac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$

$w = \dfrac{y_3}{(x - x_1)(x - x_2)}$

Les 3:

$\boxed{A}$ Secret Sharing & lineaire onafhankelijkheid

i) Sleutels $\rightsquigarrow$ Code / Polynoom

stel 4 mensen nodig $\rightsquigarrow$ dan is de polynoom van graad 3

koppels:

1 (x_1, y_1)
2 (x_2, y_2)
3 (x_3, y_3)
4 (x_4, y_4)

$P_1 = y_1 \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$ is een van de vgl'en (zie vorige)

vindt de overige 3 door cyclisch te permuteren
tel $P_1 + P_3 + P_2 + P_4$ op en je vindt f
na vereenvoudiging vindt je een 3e graadspolynoom v/d vorm:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$\rightarrow$ de constante term d is de gezochte code.

ii) Code (stel t) $\rightsquigarrow$ Polynoom / sleutels met vlakken.

neem een punt in ~~het vlak~~ de ruimte met x, y willekeurig gekozen en $z = t$

Vb: (x_1, y_1, t)
stel de vergelijkingen van een aantal niet evenwijdige vlakken op met vgl:

$ax + by + z \rightsquigarrow ax_1 + by_1 + t$ (subs ($x=x_1, y=y_1, z=t$, vgl);)

iii) code → polynoom /sleutels   veeltermen

graad vgl = # sleutels opl − 1

→ stel code moet gelijk zijn aan t en er zijn $\overset{\text{minstens}}{3}$ sleutels nodig

kies dan willek vgl: $a_1x^2+b_1x+t$ (a_1 en b_1 vrij te kiezen)

genereer het benodigd aantal puntenkoppels

$f(x_1) = y_1$

stel met deze punten vergelijkingen van de vorm:

$$ax_1^2+bx_1+c=y_1$$ (a, b, c zijn onbekenden)

en wanneer je het stelsel van minstens 3 vgl^en oplost vindt je c wat de code is.

Les 4:

Controleren of vectoren v_1, v_2, v_3 lineair afhankelijk zijn:

$$\text{Det}\left(\begin{pmatrix} V_1 & | & V_2 & | & V_3 \end{pmatrix}\right) = 0$$

A: basisovergangen

Geg: 2 sets $\overset{\text{basis}}{\text{vectoren}}$ $\langle v_1|v_2|v_3\rangle$ en $\langle w_1|w_2|w_3\rangle$
B: standaardbasis.

Lange manier:

Om ~~van~~ Basis V → Basis W te gaan Transitiematrix Q

Stel B → V op : $\langle v_1 | v_2 | v_3\rangle$ (oude basis)

Stel B → W op : $\langle w_1 | w_2 | w_3\rangle$ (nieuwe basis)

Q wordt dan bepaald door 3 stelsels van de vorm

$$\begin{cases} v_{1(1)} \cdot Q_{ni} + v_{2(1)} \cdot Q_{(n+1)i} + v_{3(1)} \cdot Q_{(n+2)i} \\ v_{1(2)} \cdot Q_{ni} + v_{2(2)} \cdot Q_{(n+1)i} + v_{3(2)} \cdot Q_{(n+2)i} \\ v_{1(3)} \cdot Q_{ni} + v_{2(3)} Q_{(n+1)i} + v_{3(3)} Q_{(n+2)i} \end{cases}$$

$n = 1$

i → gezochte kolom

Stel Q op met de opl^n van dit stelsel.

Korte manier:

Ga van $V \to B : M^{-1}$

en van $B \to W : W$

Q wordt dan bepaald door: $\boxed{V^{-1} \cdot W}$ (gemakkelijker in maple moeilijker met de hand.)

Stel vector $u_1 \to$ basis V

om van vector t.o.v oude basis V naar nieuwe basis W te gaan:

$$\boxed{Q^{-1} \cdot u_1}$$

Stel vector $t_1 \to$ basis W

om van vector t.o.v. nieuwe basis W naar standaardbasis B te gaan:

$$\boxed{t_{1(1)} \cdot w_1 + t_{1(2)} \cdot w_2 + t_{1(3)} w_3}$$ Van $W \to B$ (standaardbasis)

Stel vector $v_1 \to$ Basis V

om van vector t.o.v. oude basis V naar standaardbasis B te gaan:

$$\boxed{V \cdot v_1}$$

B Lineaire afbeelding t.o.v nieuwe basis T

v_1 tov T

→ $\boxed{T \cdot v_1}$

Les 5:

$\boxed{A}$ Eigenwaarden en eigenruimten

Maple: Eigenvalues() → λ

Eigenvectors() → vectoren van alle λ, vectoren v. die het eigenwaardeprobleem oplossen en λ opleveren

CharacteristicPolynomial() → geeft de vgl in λ

met de hand:

- we willen dus dat $(A - \lambda I).v = 0 \rightsquigarrow \det(A - \lambda I) = 0$
- los $\det(A - \lambda I) = 0$ op naar λ (dat is de karakteristieke veelterm)
  ↳ deze oplⁿ zijn de eigenwaarden
- Om de eigenvectoren te vinden los ~~A~~ het stelsel $A - \lambda I$ apart op voor elke gevonden λ

$\boxed{B}$ Diagonalisatie

- Algebraïsche multipliciteit is het aantal keer dat een eigenwaarde de oplossing is van de karakteristieke vgl.
- Meetkundige multipliciteit is de rang van de eigenruimte bij die eigenwaarde
  1 ≤ meetk multiplic ≤ algebr. multiplic.

Als beide gelijk zijn is de matrix diagonaliseerbaar door:

$$\boxed{P^{-1}.A.P}$$

met P eigenruimte van alle eigen-vectoren

Les 6:

$\boxed{A}$ Markov-Processen

Markov-Matrix:

$$(1) \quad \begin{array}{c}\\ \text{Aandeel A} \\ \text{Aandeel B} \\ \text{Aandeel C}\end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \% & \% & \% \\ \% & \% & \% \\ \% & \% & \% \end{array}\right] \end{array}$$

(de procenten worden in decimale vorm geschreven)

$$(2) \quad \begin{array}{c}\text{Aantal A} \\ \text{Aantal B} \\ \text{Aantal C}\end{array} \left[\begin{array}{c} \# \\ \# \\ \# \end{array}\right]$$

→ starthoeveelheden

(1) x (2) → geeft de situatie na 1 tydsperiode

na een bepaalde tijd kan er een stabiele situatie ontstaan en zal het resultaat altijd hetzelfde blyven.

Les 7: ALLE Basisen moeten rechtshandig zijn dus $Det(B) = 1$ en niet -1!!!

$\boxed{A}$ Gram-Schmidt (orthonormeren v. e. basis)

Inproduct tussen 2 vectoren: $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

norm van een vector: $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

Maple: GramSchmidt(A)

Met de hand: t.o.v. Basis $\langle v_1 | v_2 | v_3 \rangle$

b_1: $\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1 \cdot v_1}}$

$b\sim 2$: $v_2 - (v_2 b_1) b_1$

b_2: $\frac{b\sim 2}{\|b\sim 2\|} = \frac{b\sim 2}{\sqrt{b\sim 2 \cdot b\sim 2}}$

$b\sim 3$: $v_3 - (v_3 b_1) b_1 - (v_3 b_2) b_2$

b_3: $\frac{b\sim 3}{\|b\sim 3\|}$

Controle: $\begin{cases} b_i \cdot b_j = 0 & (i \neq j) \\ b_i \cdot b_j = 1 & (i = j) \end{cases}$

Stel $w = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ dan kunnen we w t.o.v. nieuwe orthog. basis vinden door:

$x_b = \langle w, b_1 \rangle$

$y_b = \langle w, b_2 \rangle$

$z_b = \langle w, b_3 \rangle$

Les 8:

A Ontleden v. bewegingen

(i) Rotatie:

$$\begin{array}{r|ccc|} x\text{-as} \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ y\text{-as} \rightarrow & 0 & 1 & 0 \\ z\text{-as} \rightarrow & 0 & 0 & 1 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & x\text{-as} & y\text{-as} & z\text{-as} \end{array}$$

(*) over α in rad

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \pm \sin\alpha \\ \pm \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

+ over x-as / z-as in wijzerzin
over y-as in tegenwijzerzin

− over x-as / z-as tegenwijzerzin
over y-as in wijzerzin

± tegengesteld aan voorgaande zin

Om een rotatie weer te geven vul (*) in (i) op de plaatsen die niet van de as waarover geroteerd wordt zijn.

Samenstellen van bewegingen A na B na C $\rightarrow$ $\boxed{A.B.C}$

Stel R is een samenstelling van bewegingen dan is R een rotatie rond de oorsprong

$$\Longleftrightarrow$$

$$\det(R) = 1$$ (een eigenwaarde is 1)

De eigenvectoren bepalen de as van de rotatie

Om een beweging ~~dan~~ t.o.v. een orthonormale basis willen omzetten naar een rotatievorm bvb

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

- kies hier dan v_1 een eigenvector die de as opspant.
- kies v_2 en v_3 eenvoudig en lineair onafhankelijk v. v_1 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ bvb
- Stel de basis op dmv gram-Schmidt
- je vindt R t.o.v. nieuwe basis door: ~~B~~ $\boxed{\text{basis}^{-1} . R . \text{basis}}$
- De hoek t.o.v. nieuwe basis kan je dan gemakkelijk vinden door arccos

Stel je hebt matrix A.

Je kan nagaan of dit een beweging is door:

$\boxed{A^T \cdot A \text{ te doen als dit gelijk is aan } I_3 \Rightarrow \text{beweging}}$

Det(A) = 1 ⇒ rotatie

Det(A) = −1 ⇒ reflectie

Samenstelling

Om A te ontleden:

* Eerst orthonormeren

Zoek eigenvector horend bij (−1) kies voor v_2 en v_3 willekeurig (eenvoudig en lin onafh van v_1)

Orthogonaliseer met Gram-Schmidt (!) en aanschouw de basis B

is rechtshandig

Geef rotatie tov nieuwe basis $\boxed{B^{-1} \cdot A \cdot B}$

De rotatie is dan van de vorm bvb: $R: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ (Rotatie en dan reflectie)

dit kan dan ontleed worden: $\overset{R1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & -\sin \\ 0 & \sin & \cos \end{bmatrix}} \cdot \overset{R_2}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

Deze draaiing gebeurt in de zin van b_1 !!

Deze ontledingen kan je dan terug naar de oude basis zetten door: afzonderlijk

$\boxed{\begin{matrix} B \cdot R1 \cdot B^{-1} \\ B \cdot R2 \cdot B^{-1} \end{matrix}}$ (het product van deze 2 is gelijk aan A)

Brent Van Weyenberge

Omgekeerd: Om een beweging in de zin van een vector op te stellen:

stel richting: V_1 en hoek α Zin tegenwijzer

kies V_2 en V_3 willek lin onafh van V_1.

Vind de nieuwe basis door Gram-Schmidt van $v1, v2, v3 \to B$

Stel de rotatie voor de nieuwe basis op:

$$R: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$ (x-as is de b_1-richting!)

Zet de rotatiematrix om naar de oude basis:

$$\boxed{B \cdot R \cdot B^{-1}}$$

Les 9:

A Lineaire Regressie

Stel ~~een~~ voor

a	x_1	x_2	...	x_n
b	y_1	y_2	...	y_n

volgende matrices op: $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$ en $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

Controleer of $[A|y]$ geen opl heeft, en bepaal dan de kleinste kwadratenoplossing:

$$\boxed{opl = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot y} \to \begin{bmatrix} opl_1 \\ opl_2 \end{bmatrix}$$

je kan de regressierechte dan bepalen door: $\boxed{l = opl_2 \cdot x + opl_1}$