Voorbeeldexamen

Naam:

Stamnummer:

Procedure

- Vermeld je naam en je stamnummer op elk blad.
- Vermeld aan het begin van elke Maple-file je naam.
- Je beschikt over 3 uur 30 minuten om dit examen op te lossen (reken op ongeveer 1 uur per vraag).
- Alle meegebrachte nota's mogen gebruikt worden bij het oplossen van dit oefeningenexamen (let er echter op niet te veel tijd te verliezen door al te veel te willen opzoeken).
- Het gebruik van een rekentoestel is toegelaten, het gebruik van een GSM-toestel niet.
- Gebruik voor elke vraag de in de opgave aangegeven Maple-file die op Minerva terug te vinden is in de map `oefenexamen`.
- Het indienen van je antwoorden bestaat uit 2 delen

  1. Dit examenblad waarop je in de aangegeven plaatsen antwoorden moet invullen.
  2. De Maple files met de oplossingen.

  Stuur op het einde van het examen je Maple files door naar `linalg@cage.ugent.be`.

  Geef het examenblad af, nadat wij bevestigen dat we je bestanden ontvangen hebben.

  Voor dit oefenexamen is het niet de bedoeling je files door te sturen, enkel op het echte examen!

- Tenzij anders vermeld, moet je de in Maple bekomen resultaten niet overschrijven.
- Zorg ervoor dat je uw Maple-files regelmatig opslaat!

Vraag 1: Möbiustransformaties

Oefening

- Beschouw de transformatie van het complexe vlak die overeenkomt met "inzoomen" met een factor 3 en roteren over een hoek van 60 graden in wijzerzin. Deze transformatie is een afbeelding
$$T_\alpha : z \mapsto \alpha z,$$
met $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ (zie les 1, blz.10).

  Bepaal deze α.

- De afbeelding T_α kan echter ook gezien worden als een Möbiustransformatie (zie oefeningenles 2, 2.3.1).

  Bepaal de matrix van deze Möbiustransformatie.

- Beschouw nu de Maple-file `mobius.mw`, waar je een rode en een groene figuur ziet.

  Bepaal β zodat de afbeelding $T_\beta : z \mapsto \beta z$ de rode figuur afbeeldt op de groene. (Doe dit "op zicht", het is niet de bedoeling om te rekenen met de coördinaten van de figuur.)

- *Zoek $r \in \mathbb{R}$ en $m \in \mathbb{Z}$ zodat $T_\alpha^3 = T_r \circ T_\beta^m$. Verifiëer ook de gelijkheid die je bekomt met Maple.*

Theorie
Kunnen alle Möbiustransformaties van $\mathbb{C}$ voorgesteld worden door 2×2 matrices met determinant 1?
...
...
...
...
...

Vraag 2: Codes

Oefening
Zij A de matrix die correspondeert met een secret sharing systeem waarin elke drie personen die samenkomen een geheim getal kunnen achterhalen (elke persoon krijgt 1 rij en het geheim getal is de eerste component van de unieke oplossing van het stelsel dat ze samen kunnen vormen; zie oefeningenles 3).

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 15 \\ 4 & 2 & 0 & 10 \\ 3 & 6 & x & 15 \\ 3 & y & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

Gebruik de Maple-file `secret.mw`, waarin de matrix A terug te vinden is, om je berekeningen uit te voeren. Leg in die file (kort!) uit waarom je welke berekening uitvoert. Maar antwoord ook op volgende vragen op dit examenblad.

- *Wat is het geheime getal van dit secret sharing systeem?* . . . .
- *Bepaal de waarden van x en y in A:* $x =$ . . . . en $y =$ . . . .

Theorie

Bepaal de parity-check matrix van een $(9,5)$*-lineair code met als basis vectoren de kolommen:*

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Los deze vraag volledig op in Maple. Gebruik hiertoe de file `parity.mw` waarin de bovenstaande vectoren terug te vinden zijn. Noem de parity check matrix PC en leg terug kort uit wat je precies doet in je Maple-file.

Vraag 3: Euclidische ruimten

Oefening

Beschouw de beweging in E^3 bepaald door volgende matrix:

$$R := \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 14-9\sqrt{3} & -6\sqrt{7}-3\sqrt{21} & 12 \\ -6\sqrt{7}-3\sqrt{21} & 18-7\sqrt{3} & 4\sqrt{7} \\ -12 & -4\sqrt{7} & -16\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Gebruik de Maple-file `beweging.mw` om op volgende vragen te antwoorden. Leg opnieuw kort uit wat je precies doet in je Maple-file en vul daar waar aangegeven ook dit examenblad in.

- *Controleer dat R een rotatie bepaalt.*
- *Wat is de as van deze rotatie?*
- *Bepaal een orthonormale basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ ten opzichte waarvan de matrix die de rotatie beschrijft de volgende vorm krijgt:*

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

  Zorg ervoor dat de basisovergang ook een rotatie is.

- *Hoe kun je inzien dat de basisovergang ook een rotatie is?*

  ...
  ...
  ...

- *Wat is de hoek* θ *van de rotatie in graden?* $\theta = \ldots\ldots\ldots\ldots^\circ$.

Theorie
Geef aan of de volgende uitspraak juist of fout is en verklaar je antwoord.

- Zij A een $m \times n$-matrix, $m \geq n$, over de reële getallen. Een *kleinste-kwadraat-oplossing* van het stelsel $AX = d$ is altijd uniek.

...
...
...
...
...