Hints en antwoorden bij de vragen van de cursus Lineaire Algebra en Meetkunde

Ik heb de vragen die in de nota's staan en de vragen van de samenvattingen samengebracht in deze tekst en voorzien van hints en antwoorden.
Gebruik de vragen om inzicht te bekomen in de theorie. Bekijk de antwoorden kritisch, ik kan ook fouten maken.

Vragen bij les 1

Vraag blz. 3: Getallen waarvoor geen eindige decimale voorstelling bestaat hebben een unieke decimale voorstelling. Waarom?

antwoord: *Neem twee verschillende decimale voorstellingen waarvan de "staart" niet bestaat uit een oneindige rij nullen of een oneindige rij negens. Zoek de eerste decimaal waarin de voorstellingen verschillen. De voorstelling waarvoor dit cijfer het grootste is representeert een getal A dat groter of gelijk is aan het getal B dat voorgesteld wordt door de andere voorstelling. Door in de tweede voorstelling het eerst volgende cijfer dat geen 9 is met 1 te verhogen (we tellen bij B dus iets bij dat groter is dan 0) vinden we een getal C zodat $B < C \leq A$. Dus $A \neq B$. Twee verschillende decimale ontwikkelingen waarvan de "staart" niet bestaat uit nullen of negens stellen dus ook verschillende getallen voor.*

Vraag 1.7: Zijn er punten in het vlak die overeenkomen met complex getallen $a + bi$ waarvan we verwachten dat $(a + bi)^3 = \pm 1$?

antwoord: *Beschouw in de cirkel rond de nul met straal 1 twee gelijkzijdige driehoeken. Eén driehoek met top in (het punt op de reële rechte dat overeenkomt met) 1 en één driehoek met top in -1. De hoekpunten van deze driehoeken komen overeen met (complexe) getallen $a + bi$ die voldoen aan de voorwaarde $(a + bi)^3 = \pm 1$.*

Vraag 1.8: Het inverse van $a + bi$ is $(a - bi)/(a^2 + b^2)$. Het inverse van $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ is $\frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$.

Vragen bij les 2

Hoe verklaar je gevolg 2.7? (De linksinverse van een vierkante matrix is ook de rechtsinverse.)

antwoord: *Zij $AB = I$. Door rij-reductie op A toe te passen vinden we elementaire matrices $E_1, \ldots, E_k$ zodat $A' = E_k \cdots E_1 A$ de eenheidsmatrix is of een matrix is die eindigt op een nul-rij.*
Uit $AB = I$ volgt $A'B = E_k \cdots E_1$. Dus $A'B$ is inverteerbaar waaruit volgt dat de $A'B$ niet eindigt op een nul-rij. Dan eindigt A' ook niet op een nul-rij dus $A' = I$. Stelling 2.4 impliceert dat A inverteeerbaar is en we vinden $A^{-1} = E_k \cdots E_1 = B$.
Het andere geval, $BA = I$, volgt ook vermits we de rol van A en B kunnen omwisselen.

Vraag: Juist of fout?

(a) Het aantal spilkolommen in een $n \times m$-matrix is kleiner of gelijk aan minimum (n,m).

antwoord: *Juist. Als het aantal kolommen van de matrix kleiner of gelijk is aan het aantal rijen is de uitspraak evident. Als het aantal rijen kleiner is dan het aantal kolommen volgt de uitspraak uit het feit dat op elke rij hoogstens 1 spil kan staan.*

(b) Elke niet-spilkolom is de som van scalaire veelvouden van de spilkolommen.

antwoord: *Juist. Als de elementen op de split plaatsen gelijk zijn aan 1 is elke kolom duidelijk een lineaire combinatie van de spilkolommen die ervoor staan. De coëfficiënten van de combinatie zijn de componenten van de kolom.*

(c) Beschouw de verzameling van de 2×2 matrices

$$\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Als niet alle componenten 0 zijn, zijn deze matrices inverteerbaar, waarom?

antwoord: *De determinant is $a^2 + b^2$. De som van twee kwadraten van reële getallen kan enkel nul zijn als beide getallen nul zijn. Dus de matrix is inverteerbaar tenzij het de nul-matrix is.*

(d) De verzameling is gesloten onder optelling en vermenigvuldiging. Welke verzameling is het?

antwoord: *De verzameling met optelling en vermenigvuldiging van matrices geeft een* matrix voorstelling van de complexe getallen. *Als we een complex getal $a + bi$ voorstellen door de matrix* $\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$*, dan gaan alle berekeningen (optellingen en vermenigvuldigingen) mooi in elkaar over.*

Vragen bij les 3

Vraag 3.2 Kan je het teken in de ontwikkeling van de determinant volgens de j-de kolom verklaren?

antwoord: *Het teken van elke term moet alterneren omdat het teken van de determinant moet veranderen als twee (opeenvolgende) rijen verwisselt worden.*
Het teken van een "diagonaalplaats" moet plus zijn anders zou de determinant van de eenheidsmatrix niet 1 zijn.

Vraag: Wat verandert er aan de theorie als we de eerste eigenschap (3.1) weglaten? (Wat verandert er bijvoorbeeld aan stelling 3.1?)

antwoord: *Eigenschappen 3.2 en 3.3 bepalen geen <u>unieke</u> functie van de matrices naar het veld. Een functie die voldoet aan eigenschappen 3.2 en 3.3 is gelijk aan $\lambda \cdot \det$ met $\lambda \in K$.*

Vraag: Bewijs dat $\det A = \det A^t$.

antwoord: *Merk eerst op dat de eigenschap klopt voor de elementaire matrices.*

Zij A' de rij-echelon vorm van A. Als $A' = I$ dan volgt de eigenschap uit gevolg 3.3 punt (a) en het feit dat A een product is van elementaire matrices.
Als $A' \neq I$ dan is $\det A = 0$ en heeft A' een nul-rij en A'^t dus een nul-kolom. Dit impliceert dat $\det A'^t = 0$ (ontwikkel naar de kolom die nul is) maar dan is ook $\det A^t = 0$ vermits A'^t bekomen wordt door A^t rechts te vermenigvuldigen met elementaire matrices. (Gebruik opnieuw gevolg 3.3 (a)).

Vraag: Waarom is de echelon vorm van een random gekozen vierkante matrix bijna altijd de eenheidsmatrix?

antwoord: *We beweren dat een random gekozen vierkante matrix bijna altijd inverteerbaar zal zijn.*
Neem aan dat de componenten van een $n \times n$ matrix variabelen zijn. De determinant van de matrix is dan een veelterm van graad n in n^2 variabelen. Als we voor de variabelen random waarden substitueren zal de determinant zeer waarschijnlijk ongelijk zijn aan nul. "Random" betekent immers dat we geen relatie verwachten tussen de gekozen waarden maar de determinant gelijk aan nul betekent dat de waarden een oplossing geven van de veelterm van graad n in n^2 varaibelen, dat is een relatie tussen de gekozen waarden.
We illustreren dit nog met een voorbeeld. Kies in de matrix $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix}$ de waarden x, y, z random. Dan is de matrix niet inverteerbaar als $xz - y = 0$. Plot de oplossingsverzameling met maple, merk op dat de oplosssingsverzameling een oppervlak beschrijft in $\mathbb{R}^3$. Een random keuze van x, y, z geeft een random punt in $\mathbb{R}^3$, meestal zal dat niet op het oppervlak liggen.

Vragen bij les 4

Vraag 4.10 Kan je voor stelsels van twee vergelijkingen en twee onbekenden deze observatie op een meetkundige manier verklaren?

antwoord: *De oplossingsverzameling van een homogeen stelsel bevat de oorsprong. De* *oplossingsverzameling van een willekeurig stelsel is de "translatie" van de oplossingsverzameling van het geassocieerde homogene stelsel bekomen door de oorsprong te verschuiven naar een punt bepaalt door een bijzondere oplossing van het stelsel.*

Vraag 4.11 Stel $\det A \neq 0$. kan je inzien dat de unieke oplossing die gegeven wordt door de regel van Cramer dezelfde is als deze die we vinden met Gausseliminatie?

antwoord: *Gausseliminatie leidt tot de matrix $(I|B^*)$ waarbij de eenheidsmatrix I bekomen wordt door elimentaire rij-operaties toe te passen op de matrix A van het stelsel. De oplossing van het stelsel wordt dus gegeven door de componenten van B^*.*
B^* wordt uit de kolom B bekomen door dezelfde elementaire rij operaties. De elementaire rij operaties bekomt men door de matrices links te vermenigvuldigen met elementaire matrices. Het product van de gebruikte elementaire matrices is gelijk aan A^{-1} dus de $B^* = A^{-1}B$ dit komt overeen met de oplossing gegeven door de regel van Cramer blz. 59.

Vraag: Elk stelsel gedefinieerd over een veld K (bv. $\mathbb{Q}$) definieert een stelsel over elk groter veld L (met $K \subset L$, bv. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

- Is een stelsel (lineaire vergelijkingen) dat strijdig is over K ook strijdig over L?

  antwoord: *Ja. De echelon vorm van het stelsel over K is ook de echelon vorm van het stelsel over L. En het strijdig zijn van een stelsel hangt enkel af van de echelon vorm van het stelsel.*

- Kan een stelsel (lineaire vergelijkingen) een unieke oplossing hebben in K maar oneindig veel oplossingen in L?

  antwoord: *Neen. Opnieuw het feit dat er een unieke oplossing is lees je af van de echelon vorm van het stelsel.*

- Blijft de dimensie van de oplossingsverzameling van een stelsel gelijk als we het stelsel beschouwen over een groter veld?

antwoord: *Ja. De dimensie is het aantal onbekenden min de rang. het aantal onbekenden hangt niet af van het veld waarover het stelsel beschouwt wordt. De rang lees je af van de echelon vorm en hangt dus ook niet af van het veld waarover het stelsel beschouwt wordt.*

- Kan een stelsel (lineaire vergelijkingen) over $\mathbb{R}$ oneindig veel oplossingen hebben in $\mathbb{R}$ maar geen oplossingen in $\mathbb{Q}$?

  antwoord: *Ja dat kan. Als het stelsel niet gedefinieerd is over $\mathbb{Q}$, dit betekent dat niet alle coëfficiënten in $\mathbb{Q}$ zitten, kan het stelsel oplossingen hebben in $\mathbb{R}$ maar niet in $\mathbb{Q}$. Bijvoorbeeld het stelsel van 1 vergelijking in twee ombekenden*

$$x = \sqrt{2}y$$

  heeft oneindig veel oplossingen in $\mathbb{R}$ (je kan y vrij kiezen) maar geen oplossingen in $\mathbb{Q}$ anders zou $\sqrt{2}$ een rationaal getal zijn.

Vragen bij les 5

Vraag 5.1: Wat zijn de verschillende types van deelruimten in $\mathbb{R}^3$.

antwoord: *De nulruimte, $\{0\}$, de rechten door de oorsprong (1 dimensionale deelruimten), de vlakken door de oorsprong (2 dimensionale deelruimten) en de ruimte $\mathbb{R}^3$ zelf.*

Vraag 5.2: Aan wat is de deelruimte van de veeltermen van graad $d \leq 0$ gelijk?

antwoord: *De veeltermen van graad nul zijn juist de elementen van het veld K, de deelruimte van de veeltermen van graad nul is dus de 1-dimensionale ruimte K.*

Vraag blz. 87: Wat is de betekenis van de nullen in de tweede regel? Wat is de betekenis van de mintekens in de derde regel.

antwoord: *In de tweede regel is het de nul in V, zowel in het linker- als in het rechterlid van de gelijkheid.*

In de derde regel is (-1) in het linker lid het inverse van 1 voor de optelling in K en $(-v)$ in het rechterlid de inverse van v voor de optelling in V.

Vraag 5.6: Heeft elke vectorruimte (niet de nul-ruimte) een basis? Kan een vectorruimte meerder basissen hebben?

antwoord: (We beschouwen enkel eindig dimensionale vectorruimten.) *Het antwoord op de eerste vraag is ja. Het volgt uit (h) en het feit dat als $v \neq 0$ de verzameling $\{v\}$ een lineair onafhankelijk stel is.*

Het antwoord op de tweede vraag is ook ja. Dit volgt uit het feit dat elke lineair onafhankelijk stel kan uitgebreid worden tot een basis. ($\{v\}$ en $\{\lambda v\}$ met $\lambda \neq 1$ zijn verschillende lineaire onafhankelijks tellen. Ze breiden uit tot verschillende basissen.)

Enkel de 1-dimensionale ruimten over het veld $\mathbb{F}_2$ (dus eigenlijk enkel $\mathbb{F}_2$) is een vectorruimte met een unieke basis.

Vraag 5.9: De oplossingsverzameling van een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen over een veld K vormt een eindig dimensionale vectorruimte over K. Waarom?

antwoord: *Omdat de een lineaire combinatie van oplossingen terug een oplossing is van het stelsel. Dit volgt onmiddellijk uit de matrix vorm van een stelsel vergelijkingen.*

In les 4 hebben we het begrip *dimensie* ingevoerd voor "de grootte" van de oplossingsverzameling van zulk stelsel. Nu kunnen we ook spreken van de dimensie van de oplossingsverzameling als K-vectorruimte. Vallen deze twee definities samen?

antwoord: *Ja die begrippen vallen samen. De dimensie van de oplossingsverzameling was per definitie het aantal vrij te kiezen variabelen. Kies respectievelijk één van die variabelen gelijk aan 1 en de anderen gelijk aan 0, dan bekom je lineair onafhankelijke oplossingen zodat alle andere oplossingen lineaire combinaties zijn van deze. Die keuze geeft je dus een basis voor de oplossingsverzameling.*

Vraag 5.10: Kan je dit argument nog verfijnen en voor $V = W_1 + W_2$ het verband geven tussen $\dim V$, $\dim W_1$ en $\dim W_2$?

antwoord: *In het algemeen geldt:* $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$. *Kies een basis* B_{12} *voor* $W_1 \cap W_2$. *Breidt deze uit tot een basis* B_1 *voor* W_1 *en tot een basis* B_2 *voor* W_2. *Dan is* $B_1 \cup B_2$ *een basis voor* $W_1 + W_2$. *(Dit kan je eenvoudig verifiëren.) en* $|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2|$.

Vraag: Juist of fout (Argumenteer je antwoord.)

1. $\{v, w, z\}$ een lineair afhankelijk stel. Dan is $z \in \text{span}(\{v, w\})$.

   antwoord: *Fout. Als* $\{v, w\}$ *lineair afhankelijk is dan ook* $\{v, w, z\}$ *voor alle* z, *dus ook voor die elementen* z *die niet in de ruimte voortgebracht door* v *en* w *zitten.*

2. Als w op een uniek manier te schrijven is als lineaire combinatie van $v \neq 0$ en $z \neq 0$, dan is $\{v, z\}$ lineair onafhankelijk.

   antwoord: *Juist. Stel* $w = \mu_1 v + \mu_2 z$. *Een niet triviale relatie* $\lambda_1 v + \lambda_2 z = 0$ *geeft een nieuwe uitdrukking voor* w *namelijk* $w = (\mu_1 + \lambda_1)v + (\mu_2 + \lambda_2)z$.

3. $L \cup \{v\}$ is een lineair onafhankelijk stel dan is $v \notin \text{span}(L)$.

   antwoord: *Juist.* $v \in span(L)$ *betekent juist dat* v *een lineaire combinatie is van elementen uit* L, *dus dat* v *en de elementen uit* L *lineair afhankelijk zijn.*

4. $V = \text{span}(S)$ dan is S een basis voor V.

   antwoord: *Fout.* S *brengt* V *voort maar om een basis te zijn moet* S *ook een lineair onafhankelijk stel zijn.*

5. L een lineair onafhankelijk stel. Er zijn verschillende basissen die L bevatten.

   antwoord: *Fout. Als* L *zelf een basis is, is er maar 1 basis die* L *bevat.*

   Echter als L *een lineair onafhankelijk stel is maar* L *is geen basis voor de ruimte, dan zijn er altijd verschillende basissen die* L *bevatten.*

6. Een voortbrengend stel heeft meer elementen dan een lineair onafhankelijk stel.

antwoord: *Juist (met "meer" in de zin van "groter dan of gelijk aan"). Elk voortbrengend stel bevat een basis en heeft dus "meer" elementen dan een basis. Elk lineair onafhankelijk stel kan uitgebreid worden tot een basis en heeft dus "minder" elementen dan een basis. En alle basissen hebben evenveel elementen.*

7. Als L een lineaire onafhankelijk stel is dan is L een basis voor de deelruimte span(L).

   antwoord: *Juist. L is lineair onafhankelijk en voortbrengend voor span(L), dus per definitie een basis.*

8. Elke deelruimte heeft een uniek complement.

   antwoord: *Fout. Bekijk de tekening bladzijde 97.*

9. Er is een deelruimte met een uniek complement.

   antwoord: *Juist. De nulruimte en de ganse ruimte hebben een uniek complement.*

10. Zij W' een complement van W in V dan is $\dim W' = \dim V/W$.

    antwoord: *Juist. Volgt uit de dimensiestellingen bladzijde 97 en bladzijde 101.*

Vragen bij les 6

Vraag 6.3: Een inproduct ruimte kan niet-gedegenereerd zijn maar gedegenereerde deelruimten bevatten. Kan je hiervan voorbeelden vinden?

antwoord: *De matrix* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *definieert een symmetrisch inproduct dat niet gedegeneerd is (de determinant is niet 0!) maar de deelruimte voortgebracht door vector* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *is gedegenereerd.*

Toon aan dat als een inproductruimte geen enkele niet-nul vector bevat die loodrecht staat op zichzelf (zulk een vector noemt men ook een *isotrope* vector), elke deelruimte niet-gedegenereerd is.

antwoord: *Uit het ongerijmde. Stel* $0 \neq W$ *is een deelruimte van* (V, g) *en* W *is gedegenereerd. Neem* $0 \neq v \in W$*. Dan is* $g(v, v) = 0$ *dus staat* v *loodrecht opzichzelf.*

vraag blz. 110 onderaan. Zij (V, g) een inproductruimte en $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een orthogonale basis voor V. Dan garanderen de voorwaarden $g(e_i, e_i) \neq 0$ dat de deelruimten $V_i = \text{span}(\{e_1, \ldots, e_i\})$ niet-gedegenereerd zijn. (Bewijs dit zelf als oefening. Kies een vector v en druk uit dat deze vector loodrecht staat op de vectoren $e_1, \ldots, e_i$.)

antwoord: *Stel de vector* $\sum_{j=1}^{i} \lambda_j e_j$ *staat loodrecht op alle vectoren van de ruimte* V_i*. Dan geldt voor alle k:* $g(\sum_{j=1}^{i} \lambda_j e_j, e_k) = 0$ *wat* $\lambda_k g(e_k, e_k) = 0$ *en dus ook* $\lambda_k = 0$ *impliceert.*

- Schets de belangrijkste stappen van het bewijs van de Gram-Schmidt orthogonalisatie procedure.

  (Hoe wordt het probleem herleid tot stelsels lineaire vergelijkingen. Waarom hebben die stelsels oplossingen?)

  antwoord: *Het bewijs gaat met inductie op het aantal basisvectoren, dus met inductie op de dimensie.*

  Voor 1-dimensionale ruimten is de procedure triviaal, elke niet-nul vector geeft een orthogonale basis.

  We nemen aan dat we voor de ruimte V_{i-1} *(voortgebracht door de eerste* $i-1$ *basisvectoren) reeds een orthogonale basis* $e_1, \ldots, e_{i-1}$ *gevonden hebben (de inductie hypothese). Vermits elke vector in* V_i *op een veelvoud na een lineaire combinatie is van de vorm*

$$e'_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_j e_j$$

  proberen we x_j*'s zo te bepalen dat deze vector loodrecht staat op de reeds gevonden vectoren* $e_1, \ldots, e_{i-1}$*.*

Dit uitdrukken leidt tot een lineair stelsel van $i-1$ vergelijkingen in $i-1$ onbekenden. Dit stelsel heeft een unieke oplossing omdat de determinant van de matrix van het stelsel niet nul is (dat volgt onmiddellijk uit de gegevens).

De formule voor de oplossing van het stelsel geeft een formule voor de gezochte orthogonale vector.

- Waarom definiëren we "orthogonaliteit" enkel voor inproducten met een symmetrie eigenschap?

  antwoord: *Omdat we willen dat als v loodrecht op w staat ook geldt dat w loodrecht op v staat.*

  Juist of fout? In een symplectische ruimte staat elke vector loodrecht op zichzelf.

  antwoord: *Juist als het veld K waarover we werken geen veld van karakteristiek 2 is. Dan is $g(v,v) = -g(v,v)$ en dus $g(v,v) = 0$.*

Vragen bij les 7.

Vraag 7.1 Linkse vermenigvuldiging met een $m \times n$-matrix A geeft een lineaire afbeelding tussen de standaard vectorruimten K^n en K^m;

$$K^n \to K^m; X \mapsto A \cdot X.$$

Uit welke eigenschap van de matrix vermenigvuldiging volgt dit?

antwoord: *Distributiviteit en het feit dat A commuteert met scalaire matrices (dit zijn matrices van de vorm* $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$*).*

Vraag 7.2 Waarom moet E een afbeelding zijn van een basis van V naar W? Waarom kunnen we bijvoorbeeld met een afbeelding H van voortbrengend stel $\{v_1, \ddots, v_s\}$ naar W niet altijd een lineaire afbeelding associëren van V naar W door $H(\sum_i b_i v_i) = \sum_i b_i H(v_i)$?

antwoord: *Stel* $\{v_1, \ldots, v_s\}$ *is een lineair afhankelijk stel en* $\{H(v_1), \ldots, H(v_s)\}$ *is een lineair onafhankelijk stel. Neem* $\sum b_i v_i = 0$ *en niet alle* $b_i = 0$. *Dan kan* $0 = H(\sum b_i v_i) = \sum b_i H(v_i)$ *niet gelden.*

Vraag 7.3 Wat is het beeld van F als F de afbeelding is uit het eerste voorbeeld?

antwoord: *De ruimte voortgebracht door de kolommen van* A.

Vraag 7.6, 7.9 Wat is de betekenis van de matrix P^{-1}?

antwoord: *De kolommen van* P^{-1} *zijn de coördinaten van de vectoren* e_i' *ten opzichte van de basis* $e_1, \ldots, e_n$.

Vraag: Wanneer is het stelsel $F(X) = w$ strijdig? Wanneer heeft het homogene stelsel $F(X) = 0$ een unieke oplossing?

antwoord: $F(X) = w$ *is strijdig als* $w \notin im(F)$. $F(X) = 0$ *heeft een unieke oplossing als* F *injectief is.*

Vragen bij les 8

Vraag: Een interessante vraag is de volgende. Kies basissen in V en W en neem de duale basissen in V^* en W^*. Stel A is de matrix geassocieerd met een lineaire afbeelding $T : V \to W$ ten opzichte van de gekozen basissen. Wat is de matrix van de lineaire afbeelding T^* ten opzichte van de duale basissen?

antwoord: *De getranspondeerde van* A*!*

Vraag: Zij $F : V \to W$ een injectieve lineaire afbeelding. Toon aan dat $F^* : W^* \to V^*$ een surjectieve afbeelding is.

antwoord: *Dit volgt onmiddellijk uit het feit dat* A_F^t *de matrix voorstelling is van* F^*.

Je kan het ook direct inzien. Beschouw het diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ v^* & \searrow & \downarrow ? \\ & & K \end{array}$$

We moeten een afbeelding van $W \to K$ definiëren zodat de pijlen kloppen (zodat het niet uitmaakt hoe we van V naar K lopen, via W of rechtstreeks met v^*). Vermits F injectief is beeld van een basis in V een lineair onafhankelijk stel $\{F(v_1) = w_1, \ldots, F(v_n)w_n\}$ in W. We breiden dit stel uit tot een basis $\{w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots w_m\}$ voor W. We definiëren w^* als volgt $w * (w_i) = v^*(v_i)$ voor $i = 1, \ldots, n$ en $w^*(w_j) = 0$ voor alle $j = n+1, \ldots, m$. Men verifieert nu eenvoudig dat $w^* \circ F = v^*$.

Vraag: Zij $F : V \to W$ een surjectieve lineaire afbeelding. Wat weet je van F^*?

antwoord: *F^* is injectief. Stel namelijk $F^*(w^*) = 0$ dan is w^* de nul functie op het beeld van V dus op de ganse W.*

Vraag: Bepaal een isomorfisme tussen V en zijn biduale $V^{**} = (V^*)^*$ zonder in V en V^* basissen te kiezen.

antwoord: $V \to V^{**}; v \mapsto v^{**}$ *met* $v^{**}(f) := f(v)$ *voor* $f \in V^*$.

Vraag: Translaties of verschuivingen zijn bewegingen maar geen lineaire afbeeldingen. Je kan toch translaties met "matrices" beschrijven, hoe?

Hoe stel je dan een willekeurige beweging voor door matrices?

antwoord: *De verschuiving wordt volledig gegeven door het beeld van het nulpunt. Voor een gekozen basis heeft dit beeld een kolom-vector van coördinaten,* $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

De verschuiving wordt gegeven door: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Een willekeurige bewegeing wordt dan gegeven door

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

met A een orthogonale matrix.

Vraag: Zij A een orthogonale matrix. Als we in A twee kolommen verwisselen bekomen we dan opnieuw een orthogonale matrix?
Wat als we twee rijen verwisselen.

antwoord: *Twee kolommen verwisselen komt overeen met rechtsvermenigvuldigen met een elementaire matrix E van type II. Daarvoor geldt duidelijk dat $E^t \cdot E = I$. Dus $(AE)^t(AE) = E^t A^t AE = I$. Verder geldt $\det AE = -\det A$, dus geldt ook $\det AE = \pm 1$. Besluit als we in een orhtogonale matrix twee kolommen verwisselen dat bekomen we terug een orthogonale matrix.*
(Het argument voor het verwisselen van twee rijen is analoog.)

Vraag: Vermenigvuldigen met een niet nul complex getal bepaalt een lineaire transformatie van het vlak. De verzameling $\mathbb{C}^*$ van de complexen getallen ongelijk aan 0 komt dus overeen met een groep van 2×2-matrices. Welke groep?

antwoord: *Vermenigvuldigen met een complex getal dat niet nul is komt overeen met roteren en met een factor inzoemen of uitzoemen.*
De matrices die dit doen zijn juist de rotatie matrices (over $\mathbb{R}$) vermenigvuldigt met een scalaire matrix (over $\mathbb{R}$). De determinant van zulk een matrix is gelijk aan r^2. Het is dus de volgende groep van 2×2-matrices:

$$\{A \in M_2(\mathbb{C}) | \det A \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

met $\mathbb{R}_{>0}$ de multiplicatieve groep van de positieve reële getallen.