OPGAVEN

Opgave 1 (theorie; 5 punten).

(1) Bewijs Stelling 2.9.3: zij L een taal en T een L-theorie die enkel oneindige modellen heeft, en stel dat T κ-categorisch is voor een zeker kardinaalgetal $\kappa \geqslant \|L\|$. Dan is T compleet.

(2) Zij L een taal bestaande uit één binear relatiesymbool $<$. Toon aan dat de L-theorie T_d van dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten compleet is.

(3) Bestaat er een theorie T geformuleerd in de taal van groepen zodat $G \models T$ als en slechts als G een eindige groep is? Onderbouw je antwoord met een bewijs.

Opgave 2 (oefening; 5 punten).

Het *symmetrisch verschil* $X \triangle Y$ van twee verzamelingen X en Y wordt gedefinieerd als $X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

Zij A een oneindige verzameling. Definieer een relatie $\stackrel{\triangle}{\sim}$ op $\mathcal{P}(A)$ als volgt: voor elke twee verzamelingen $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ geldt dat

$$X \stackrel{\triangle}{\sim} Y \quad \Leftrightarrow \quad X \triangle Y \text{ is eindig.}$$

(1) Bewijs dat de relatie $\stackrel{\triangle}{\sim}$ een equivalentierelatie is.

(2) Bewijs dat elke equivalentieklasse kardinaliteit $|A|$ heeft.

(3) Zij ε de kardinaliteit van de verzameling van alle equivalentieklassen. Bewijs dat $\varepsilon > |A|$.

Opgave 3 (oefening; 5 punten).

Bewijs dat er een deelverzameling $A \subseteq \mathbb{R}$ bestaat die voldoet aan de volgende twee eigenschappen:

(i) voor elke niet-lege, eindige deelverzameling $B \subseteq A$ geldt

$$\sum_{b \in B} b^2 \notin \mathbb{Q}.$$

(ii) voor elke $x \in \mathbb{R} \setminus A$ bestaat er een deelverzameling $B \subseteq A$ zodat

$$x^2 + \sum_{b \in B} b^2 \in \mathbb{Q}.$$

[*We gebruiken de conventie* $\sum_{b \in B} b^2 := 0$ *als* $B = \emptyset$.]

Opgave 4 (oefening; 5 punten).

Zij L een taal en φ, ψ en χ drie L-zinnen. Bewijs de volgende uitspraak aan de hand van een of meerdere bewijsbomen:

$$\vdash \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \quad \longleftrightarrow \quad \varphi \to (\psi \to \chi).$$

Doe dit in 'gedecoreerde' stijl, i.e. vermeld telkens welke regel ($\wedge I$, $\to E$, ...) je toepast en, indien relevant, nummer de bijhorende gemarkeerde formules.