
Mechanica: Formularium

$$\theta < 15^\circ \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$$

1 Inleiding

2 Kinematica: 1 dim.

Cte a:

1. $v = v_0 + at$
2. $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
3. $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
4. $\bar{v} = \frac{v+v_0}{2}$

3 Kinematica: 2,3 dim.

Goniometrische formules:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
 $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$
2. $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
 $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
3. $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$
 $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$
4. $\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$
 $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha}$
5. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

6. Max. bereik:
 $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$
 $v = \sqrt{2gh}$

Inhoud en oppervlakte:

1. bol:
 - $A = 4\pi r^2$
 - $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
2. kegel:
 - $A = \pi r^2 + \pi r l$
 - $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

3. cilinder:

- $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
- $V = \pi r^2 h$

4 Dynamica: 3 wetten van Newton

1. Traagheidswet
2. $\sum F = m \cdot a$
3. Actie = Reactie

5 Dynamica: wrijving, cirk. beweging, weerstandskrachten

1. Wrijving:

- kin: $F_{wr} = \mu_{kin} F_N$
- stat: $F_{wr} \leq \mu_{stat} F_N$

2. ECB:

- $a_{rad} = \frac{v^2}{r}$
- $T = \frac{1}{f}$
- $v = \frac{2\pi r}{T}$
- $\sum F_R = m a_R = \frac{mv^2}{r}$

3. Snelheids afhankelijke krachten (b is cte):

- eindsnelheid: $\sum F_y = mg - bv_T = 0$
- eindsnelheid: $v_T = \frac{mg}{b}$

6 De zwaartekracht en de synthese van Newton

1. Zwaartekracht:

- $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
- $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$
- $\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$

2. Voorwerpen dicht bij het aardoppervlak:

- $mg = G \frac{m m_A}{r_A^2} \Rightarrow g = G \frac{m_A}{r_A^2}$

3. Voor voorwerpen ver van het aardoppervlak:

$$\bullet G \frac{mm_A}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (r = r_A + h)$$

4. 3e wet van Kepler:

- De Planeten hebben elliptische baan
- Perkenwet
- $(\frac{T_1}{T_2})^2 = (\frac{r_1}{r_2})^3$ (met $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{middenpunt}}$)

5. Veldsterkte:

$$\bullet \vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \text{ [N/kg]}$$

7 Arbeid en Energie

1. Arbeid:

- Constante kracht:
 $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta$
- Variabele kracht
 $W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b F_{\perp} dl = \int_a^b F \cos \theta dl$

2. Inproduct vectoren: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$

3. Veersysteem:

- $F_v = -kx$
- $F_p = kx$
- $W_{net} = \int_{x_1}^{x_2} F_p(x) dx = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2$

4. Kinetische energie:

- $K = \frac{1}{2} mv^2$ (zie hfdstuk 36)
- $W = \Delta K = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$

8 Behoud van energie

1. Potentiële energie (ver van de aarde):

- $U = -G \frac{m \cdot M_A}{r}$
- $W = \Delta U = -G \frac{m \cdot M_A}{r_2} + G \frac{m \cdot M_A}{r_1}$

2. Potentiële energie (dichtbij de aarde):

- $U_G = mgy$
- $-W_G = \Delta U = mgy_2 - mgy_1$

3. Potentiële energie (elastisch):

- $U_{el} = \frac{1}{2} kx^2$
- $U(x) = -\int F(x) dx + C$
- $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$

4. Behoud van energie:

- $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$
- $\Rightarrow \frac{1}{2} mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} mv_2^2 + mgy_2$

5. Met wrijving:

- $\Delta K + \Delta U + F_{wr} l = 0$
- $\frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) + mg(y_2 - y_1) + F_{wr} l = 0$
- $\frac{1}{2} mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} mv_2^2 + mgy_2 + F_{wr} l$

6. ontsnappingssnelheid:

$$\bullet v_{ontsn} = \sqrt{\frac{2GM_A}{r_A}} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

7. Vermogen:

- $P = \frac{dW}{dt} (= \frac{dE}{dt}) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$
- 1 pk = 746 Watt
- rendement: $e = \frac{P_{uit}}{P_{in}}$

9 Impuls

1. Impuls:

- $\vec{p} = m\vec{v}$
- $\sum F = \frac{d\vec{p}}{dt}$

2. Behoud van impuls:

$$\bullet m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v}'_A + m_B \vec{v}'_B$$

3. De stoot \vec{J} :

$$\bullet \vec{J} = \Delta \vec{p} = \vec{p}_{eind} - \vec{p}_{begin} = \int_{t_b}^{t_e} \vec{F} dt$$

4. Elastische botsing:

$$\bullet \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

• 1 Dimensie:

$$v_A - v_B = -(v'_A - v'_B)$$

• 2 Dimensies:

$$p_{Ax} + p_{Bx} = p'_{Ax} + p'_{Bx}$$

$$m_A v_A = m_A v'_A \cos \theta'_A + m_B v'_B \cos \theta'_B$$

$$p_{Ay} + p_{By} = p'_{Ay} + p'_{By}$$

$$0 = m_A v'_A \sin \theta'_A + m_B v'_B \sin \theta'_B$$

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

$$\Rightarrow v_A^2 = v_A'^2 + v_B'^2$$

5. Massamiddelpunt:

$$\bullet x_{MM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A + m_B x_B}{M}$$

$$\bullet x_{MM} = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}$$

$$\bullet \vec{r}_{MM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\bullet \vec{r}_{MM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

10 Rotatiebeweging

1. hoek in radialen:

- $\theta = \frac{l}{R}$
- GRM: $\theta(\text{rad}) = \frac{\theta(^{\circ})}{180} \pi$

2. hoeksnelheid:

- $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
- $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

3. hoekversnelling:

- $\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
- $\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

4. lineaire snelheid:

- $v = R\omega$

5. lineaire versnelling :

- $a_{tan} = R\alpha$
- $a_R = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$
- $\vec{a} = \vec{a}_{tan} + \vec{a}_R$ met $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_{tan}}{a_R}\right)$

6. $f = \frac{\omega}{2\pi}$ [Hz]

7. $T = \frac{1}{f}$ [s]

8. kinematische bewegingsvergelijkingen (cte α):

- $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- $\omega = \theta_0 + \omega_0 + \alpha t$
- $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

9. krachtmoment [N·m (\neq J)] :

- $\tau = RF \sin\theta$
- $\sum \tau = I\alpha$ (2e wet van Newton: rotatie)

10. traagheidsmoment [kg·m²] :

- $I = mR^2$ (voor puntmassa)
- zie p.297 voor formules
- $I = \int R^2 dm$

11. Stelling van Steiner: $I = I_{MM} + Mh^2$

12. rotationele kinetische energie:

- $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
- $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega$
- $W = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$
- $P = \tau\omega$

13. totale kinetische energie:

- $K_{tot} = \frac{1}{2}I_{MM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{MM}^2$

11 Impulsmoment

1. impulsmoment

- $L = I\omega$ [kg· m²/s]
- $L = mRv$ (voor een puntmassa)

2. 2e wet van Newton voor rotatie:

- $\sum \tau = \frac{dL}{dt}$

3. behoud van impulsmoment:

- $(\sum \tau = 0) L = I\omega = \text{cte}$

4. uitwendig vectorproduct (zie p.331):

- $C = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\theta$
- $\vec{A} \times \vec{A} = 0$
- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$

5. vectoriëel:

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
- $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
- $\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

6. precessiehoeksnelheid Ω :

- $\Omega = \frac{\tau}{L \sin\phi}$
- $\Omega = \frac{Mgr}{L}$
- $\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$

7. Corioliseffect:

- $s = \omega v t^2$
- $a_{cor} = 2\omega v$

12 Statica

1. Voorwaarde voor evenwicht:

- (a) $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$
- (b) $\sum \tau = 0$

2. Spanning en vervorming:

- spanning = $\frac{F}{A}$ [N/m²]
- vervorming = $\frac{\Delta l}{l_0}$ [geen eenheid]
- synthese: $\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow E = \frac{\text{spanning}}{\text{vervorming}}$

3. Trek - Elasticiteitsmodulus E (zie p367)

- $\Delta l = \frac{1}{E} \frac{F}{A} l_0$

4. Schuif - Glijdingsmodulus G (zie p367)

- $\Delta l = \frac{1}{G} \frac{F}{A} l_0$

5. druk - Compressiemodulus K (zie p367)

- $\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{1}{K} \Delta P$
- $K = -\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V_0}}$

13 Vloeistoffen

1. Dichtheid (zie p.391)

- $\rho = \frac{m}{V}$ [kg/m³]
- Gewicht: $mg = \rho Vg$

2. Soortelijk gewicht = $\frac{\rho_{stof}}{\rho_{water(bij4graden)}}$

3. Druk P [Pa]:

- $P = \frac{F}{A}$
- $P = \rho gh$

- $\frac{dP}{dy} = -\rho g$
- $P_2 - P_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$

- $P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$
- $P = P_0 + \rho gh$
 - h is diepte in vloeistof
 - P_0 = atmosferische druk

4. Druk eenheden (zie p.399):

- 1 Pa = 1 N/m²
- 1 atm = 1,013 · 10⁵ N/m² = 101,3 kPa
- 1 bar = 1,000 · 10⁵ N/m²
- 1 torr = 1 mm Hg = 133 N/m²

5. Mechanisch voordeel (→ Wet van Pascal):

- $P_{uit} = P_{in}$
- $\frac{F_{uit}}{F_{in}} = \frac{A_{uit}}{A_{in}}$

6. Wet van Archimedes (opw. kracht F_B):

- $F_B = \rho_{vl} g A \Delta h = \rho_{vl} V g$
- $F_B = m_{vl} g$
- massa van de verplaatste vloeistof, dus volume van het voorwerp

7. Drijven:

- $F_B = mg$
- $\frac{V_{verplaatsing}}{V_{voorwerp}} = \frac{\rho_{voorwerp}}{\rho_{vloeistof}}$

8. Debiet

- massadebiet = $\frac{\Delta m}{\Delta t}$
- volumedebiet = $\frac{\Delta V}{\Delta t} = Av$

9. Continuïteitsvergelijking

- $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$
- voor vloeistof (V niet afhankelijk van P):
 $A_1 v_1 = A_2 v_2$

10. Wet van Bernoulli (behoud v. E):

- $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$

11. Wet van Torricelli:

- $v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)}$

12. Viscositeit:

- $F = \eta A \frac{v}{l}$
- voor η zie p.412

13. Oppervlaktespanning:

- $\gamma = \frac{F}{l}$
- voor γ zie p.414

14 Trillingen

1. Veersysteem:

- $F_v = -kx$
- $T = \frac{1}{f}$

2. Bewegingsvergelijkingen:

- $x = A \cos(\omega t + \phi)$
- $v = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$
- $a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

3. Synthese:

- $x = A \cos(\frac{2\pi t}{T} + \phi)$
- $x = A \cos(2\pi f t + \phi)$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

$$a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

4. Energie:

- $U_{veer} = \frac{1}{2} k x^2$
- $E_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$
 - In de extrema: $E = \frac{1}{2} k A^2$
 - In de evenwichtst: $E = \frac{1}{2} m v^2$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)}$$

$$v = \pm v_{max} \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

5. Slinger (voor $\theta < 15^\circ$):

- $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$
- $a = l\alpha$
- $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$

- $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

- $F = -mg\theta$

6. Fysische slinger ($\theta < 15^\circ$):

- $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\theta = 0$

- $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$

7. Torsieslinger (K is stugheidscte):

- $\tau = -K\theta$

- $\omega = \sqrt{K/I}$

8. Gedempte trilling (b dempingscte):

- $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$

9. Gedempte harmonische trilling:

- $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$

- $x = Ae^{-\gamma t} \cos\omega' t$

- $\gamma = \frac{b}{2m}$

- $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$

- $x = Ae^{(-b/2m)t} \cos\omega' t$

- $f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$

- Gemiddelde levensduur: $\frac{2m}{b}$

- Onderkritisch gedempt: $b^2 < 4mk$

- Kritisch gedempt: $b^2 = 4mk$

- Overkritisch gedempt: $b^2 > 4mk$

10. Eigenfrequentie f_0 :

- $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos\omega t$

- $A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}}$

- $\phi_0 = \tan^{-1} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega(b/m)}$

- Kwaliteitsfactor Q :

- $Q = \frac{m\omega_0}{b}$

- $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$

15 Relativiteit

1. $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

2. Lorentz-transformaties:

- $x = \gamma(x' + vt')$

- $y = y'$

- $z = z'$

- $t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$

- $p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{vE'}{c^2}\right)$

- $p_y = p'_y$

- $p_z = p'_z$

- $E = \gamma(E' + vp'_x)$

3. Tijddilatatie:

- $t = \gamma t_0$

4. Lengtecontractie:

- $\Delta l = l_0/\gamma$

5. Snelheidsverandering:

- $u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}$

- $u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}$

- $u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}$

6. Impuls:

- $p = \gamma mv$

7. Energie:

- $K = (\gamma - 1)mc^2$

- $E_{tot} = K + mc^2$

- Voorwerp in rust: $E = mc^2$

8. Invarianten

- $E^2 = p^2c^2 - m^2c^4 \Rightarrow E^2 - p^2c^2 = cte$

- $p^2t^2 - x^2 = p^2t'^2 - x'^2 = cte$