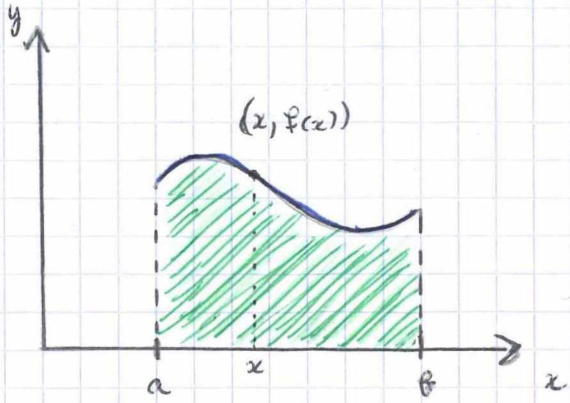
1) <u>Integraal van analyse I</u>

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



meetkundige interpretatie :

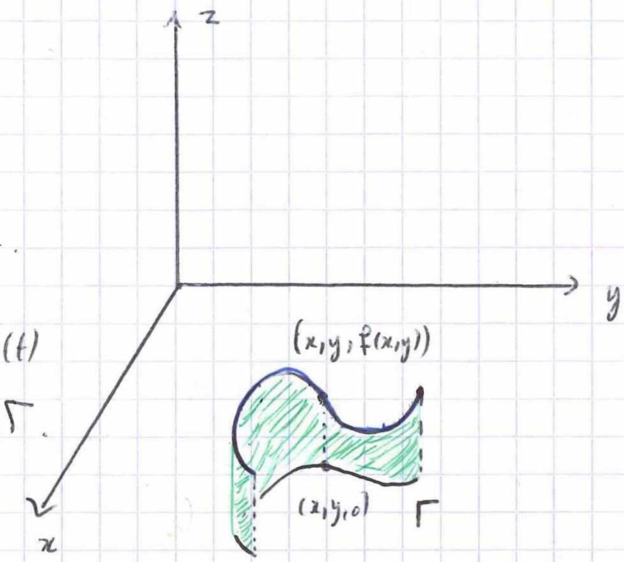
$\int_a^b f$ = groene oppervlakte

2) <u>Lijnintegraal van een scalairenveld</u>

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

meetkundige interpretatie :

$\int_\Gamma f \, ds$ = groene oppervlakte.



Zij $\vec{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \vec{\varphi}(t)$

een parametervoorstelling van Γ.

Dan is

$$\int_\Gamma f \, ds = \int_a^b f(\vec{\varphi}(t)) \cdot \| \vec{\varphi}\,'(t) \| \, dt .$$

- Waarom introduceren we de factor $\| \vec{\varphi}\,'(t) \|$, de grootte van de raakvector, in het integrandum ?

  Dit is ~~~~ opdat de waarde van de lijnintegraal onafhankelijk is van de gekozen parametervoorstelling.

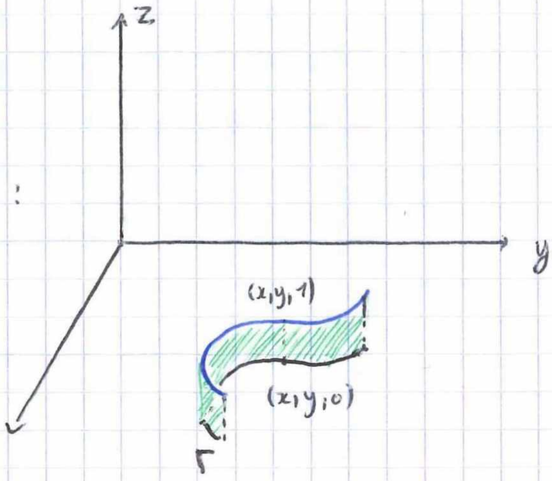
Vb. doorlopen we de kromme Γ dubbel zo snel, dan correspondeert dit met voorstelling $\vec{\psi} : [\frac{a}{2}, \frac{b}{2}] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \vec{\varphi}(2t)$.

Het integratie-interval is nu gehalveerd ($[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$ i.p.v. $[a, b]$), maar dit wordt gecompenseerd door de raakvector, die nu dubbel zo groot is ($\| \vec{\psi}\,'(t) \| = 2 \| \vec{\varphi}\,'(2t) \|$).

Zie ook stelling 3.3.3 voor algemene parametertransformaties.

- De definitie van de booglengte van Γ (definitie 3.3.4) komt via de bovenstaande meetkundige interpretatie overeen met wat we zouden verwachten :

De groene oppervlakte wordt na "platleggen" een rechthoek met basis booglengte(Γ) ~~een~~ hoogte 1 zodat inderdaad:



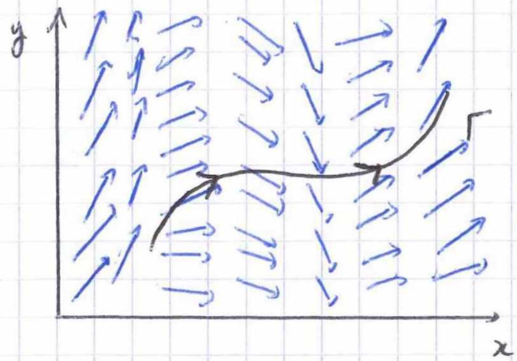
bij definitie ↓ ; meetkundige interpretatie ↓

$$\text{booglengte}(\Gamma) := \int_\Gamma 1\, ds = \text{oppervlakte groene rechthoek}$$
$$= \text{booglengte}(\Gamma)\cdot 1 = \text{booglengte}(\Gamma)$$

- Toepassingen
  - Zij Γ een draad met massadichtheid ρ, dan is
    $$\text{totale massa } \Gamma = \int_\Gamma \rho\, ds$$
  - Zij Γ een draad met ladingsdichtheid q, dan is
    $$\text{totale lading } \Gamma = \int_\Gamma q\, ds.$$

3) <u>Lijnintegraal van een vectorveld</u>

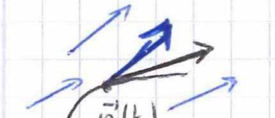
$\vec F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.



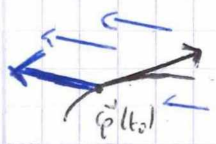
$\vec F$ kan men meetkundig voorstellen door van elk ~~pun~~ punt (x,y) de vector $\vec F(x,y)$ met aangrijpingspunt (x,y) te tekenen.

meetkundige interpretatie: $\int_\Gamma \vec F \cdot d\vec s = \int_a^b \vec F(\vec\varphi(t))\cdot \vec\varphi\,'(t)\, dt$

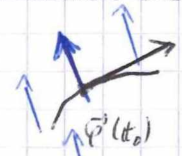
= totale stroming van $\vec F$ langs Γ:



: $\vec F(\vec\varphi(t_0))\cdot\vec\varphi\,'(t_0) > 0$: Γ gaat op dat punt "met de stroom mee"



$\vec F(\vec\varphi(t_0))\cdot\vec\varphi\,'(t_0) < 0$: Γ gaat op dat punt "tegen de stroom in"



$\vec F(\vec\varphi(t_0))\cdot\vec\varphi\,'(t_0) = 0$: Γ gaat op dat punt "loodrecht op de stroom" = (geen netto stroom)

- Merk op dat de doorloopzin van Γ van belang is (in tegenstelling tot het scalair geval).
- Toepassing: $\vec F$ is een krachtdichtheid, dan is de arbeid van de kracht langs Γ $\int \vec F \cdot d\vec s$.