

Jouw oplossing zal enerzijds bestaan uit een jupyter-notebook (`achternaam_voornaam.ipynb`) die je kan indienen via de opdrachten op Ufora. Anderzijds dien je ook het geruite blad in met je oplossingen op papier. De notatie [PC] is indicatief: Je mag voor oefeningen zonder dit symbool de PC gebruiken, en natuurlijk voor oefeningen met dit symbool ook op papier schrijven.

1. (13 pt) Beschouw het onderstaande dynamisch systeem met parameters $I \neq 0$ en μ .

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y + \frac{I^3}{3} \\ \dot{y} &= \mu(x - y) \end{cases}.$$

- (a) Bepaal alle evenwichtspunten in functie van de parameters μ en I . Bepaal ook of deze evenwichtspunten hyperbolisch zijn of niet.
 - (b) Bepaal de stabiliteit van de hyperbolische evenwichtspunten.
 - (c) Een van de bifurcaties vindt plaats in $\mu = 0$. Voor $\mu = 0$, beschrijf het uitzicht van het dynamisch systeem, de ligging van de banen en de stabiliteit van de evenwichtspunten.
 - (d) Zullen er ook bifurcaties optreden voor parameterwaarden naast $\mu = 0$? Wanneer? Bepaal of het gaat om zadel-knoop-, transkritische, stemvork-of Hopf-bifurcaties.
- [PC] (e) Plot enkele faseportretten in het (x, y) -vlak om je antwoorden op deelvragen (c) en (d) te illustreren.

2. (7 pt) Beschouw het randvoorwaardeprobleem

$$\sin(x)y'' + 2\cos(x)y' + (\tan(x) + \lambda)y = 0 \quad y(0.5) + 2y'(0.5) = 0, y(1.5) = 0.$$

- (a) Schrijf dit eigenwaardeprobleem in de vorm van de Sturm-Liouville-vergelijking (9.1).
- [PC] (b) Bepaal de eigenwaarde λ_b van deze vergelijking met $|\lambda_b| \in [200, 250]$.
- [PC] (c) Stel de grafiek op van de eigenfunctie horende bij λ_b . Hoe kan je op deze grafiek de b aflezen?

Modeloplossing_oefeningen2526

July 2, 2026

```
[1]: import matplotlib.pyplot as plt

plt.rcParams["figure.figsize"] = (3,2)
```

0.1 Vraag 1

0.1.1 (a)

Evenwichtspunten zijn exact de oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} - y + \frac{I^3}{3} = 0 \\ \mu(x - y) = 0 \end{cases}.$$

Deze tweede vergelijking impliceert het opsplitsen in twee gevallen:

$\mu = 0$ In dit geval is de tweede vergelijking voldaan en vinden we als enige voorwaarde $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{I^3}{3}$. We vinden dus een kromme met evenwichtspunten, $(x, x - \frac{x^3}{3} + \frac{I^3}{3})$. Deze zijn **niet hyperbolisch**, aangezien ze niet geïsoleerd zijn. We kunnen dit nog eens narekenen. De jacobiaan wordt gegeven door

$$\begin{pmatrix} 1 - x^2 & -1 \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

In het bijzonder werken we hier in het geval $\mu = 0$. Het is duidelijk dat deze matrix dan voor eender welke x -waarde 0 heeft als een eigenwaarde.

$\mu \neq 0$ In dit geval vertelt de tweede vergelijking ons dat $x = y$. De eerste vergelijking reduceert nu simpelweg naar $x = I$. We vinden in dit geval dus altijd één evenwichtspunt: (I, I) .

De jacobiaan wordt nu gegeven door

$$\begin{pmatrix} 1 - I^2 & -1 \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

De determinant is μI^2 en het spoor $1 - I^2 - \mu$. Een 2×2 -matrix met een eigenwaarde met reëel deel 0 kan enkel indien beide eigenwaarden strikt imaginair zijn (of 0, maar merk dat $\det \neq 0$). Beide eigenwaarden zijn strikt imaginair $\iff$ spoor = 0 en $\det > 0$. Eenvoudig rekenwerk toont ons dus dat het evenwichtspunt (I, I) niet hyperbolisch is juist wanneer $\mu > 0$ en $\mu = 1 - I^2$. Als $\mu < 0$ en/of $\mu \neq 1 - I^2$, zal (I, I) dus wel hyperbolisch zijn.

0.1.2 (b)

Een hyperbolisch evenwichtspunt komt enkel voor wanneer $\mu \neq 0$. We hebben dan het evenwichtspunt (I, I) dat (meestal, zie (a)) hyperbolisch is. We bestuderen opnieuw de Jacobiaan om stabiliteit te onderzoeken:

Voor $\mu < 0$ hebben we een negatieve determinant. In dit geval zitten we met een zadelpunt en hebben we dus een instabiel evenwichtspunt. Als $\mu > 0$, kijken we naar het spoor. Als dit positief is, zitten we met een instabiel evenwichtspunt. Als het spoor negatief is, stabiel. (Als het spoor 0 is, is het evenwicht niet hyperbolisch.) We vinden dus de volgende gevallen:

$$\begin{cases} \mu < 0 & : \text{instabiel} \\ \mu > 0, \mu < 1 - I^2 & : \text{instabiel} \\ \mu > 0, \mu > 1 - I^2 & : \text{stabiel} \end{cases}$$

0.1.3 (c)

Voor $\mu = 0$ zien we dat het dynamische systeem zich reduceert tot:

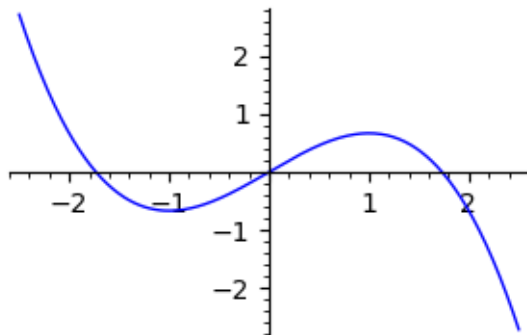
$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + \frac{I^3}{3} \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

Over een baan zal y dus constant zijn. Het volgt dat alle banen (die geen evenwichtspunten zijn) evenwijdig met de x -as lopen.

De evenwichtspunten vormen, zoals eerder afgeleid, een kromme in het (x, y) -vlak: $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{I^3}{3}$.

```
[2]: plot(x-x^3/3, xmin=-2.5,xmax=2.5) # I=0. Andere I is gewoon verticale  
↪verschuiving
```

[2]:



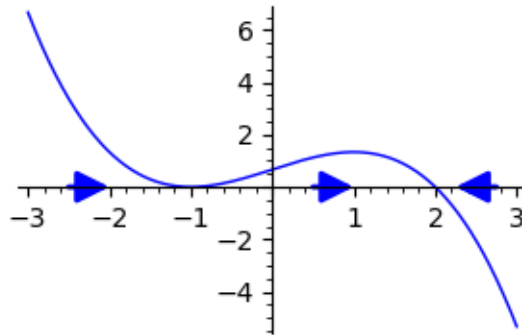
Op elke horizontale rechte liggen er een, twee of drie evenwichtspunten. Aangezien $\dot{y} = 0$ volstaat het om deze horizontale rechten te bestuderen en kunnen we de technieken van 1D-systemen hier gebruiken.

Het 1D-systeem wordt gegeven door $\dot{x} = x - \frac{x^3}{3} + \alpha$ met $\alpha = \frac{I^3}{3} - y_0$. Voor $|\alpha| = \frac{2}{3}$ zien we dat er exact twee nulpunten zijn van de functie $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \alpha$. Deze komen dus overeen met twee

evenwichtspunten in het 1D-systeem, oftewel met twee evenwichtspunten op een horizontale rechte in het 2D-systeem. We zien dat het evenwichtspunt met $|x| = 1$ instabiel is en het evenwichtspunt met $|x| = 2$ stabiel door te kijken naar de intervallen met positieve en negatieve functiewaarden.

```
[3]: plot(x-x^3/3 + 2/3, xmin=-3,xmax=3) + arrow((-2.5,0),(-2,0)) + arrow((0.5,0),(1,0)) + arrow((2.75,0),(2.25,0))
```

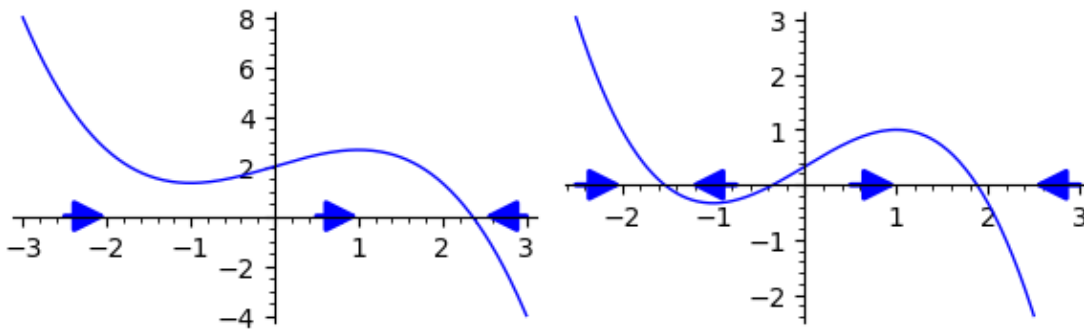
[3]:



Voor $|\alpha| > \frac{2}{3}$ is er slechts een nulpunt, en dus maar een evenwichtspunt op een horizontale rechte. Deze zal daarbij altijd stabiel zijn.

Tot slot, voor $|\alpha| < \frac{2}{3}$ vinden we drie nulpunten. Drie evenwichtspunten op elke horizontale rechte. We zien dat de twee buitenste evenwichtspunten altijd stabiel zijn, en deze in het midden instabiel.

```
[12]: p1 = plot(x-x^3/3 + 2, xmin=-3,xmax=3) + arrow((-2.5,0),(-2,0)) + arrow((0.5,0),(1,0)) + arrow((2.75,0),(2.25,0))
p2 = plot(x-x^3/3 + 1/3, xmin=-2.5,xmax=2.5) + arrow((-2.5,0),(-2,0)) + arrow((-0.75,0),(-1.25,0)) + arrow((0.5,0),(1,0)) + arrow((3,0),(2.5,0))
graphics_array([p1, p2]).show(figsize=[6,2])
```



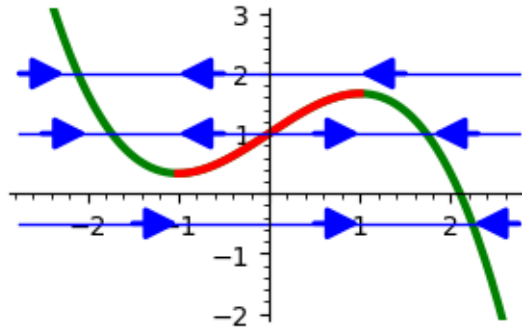
Stel dat we het systeem inderdaad tot een 1D-systeem reduceren en dan variëren over de parameter α . Dan vinden we twee zadel-knoop bifurcaties.

Laten we onze vorige bevindingen samenvatten:

In het (x, y) -vlak lopen alle banen horizontaal. De evenwichtspunten vormen de kromme $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{I^3}{3}$. De evenwichtspunten met $|x| > 1$ zijn stabiel, de evenwichtspunten met $|x| \leq 1$ zijn instabiel.

```
[5]: ep = plot(x-x^3/3 + 1, xmin=-2.75,xmax=2.75, ymin=-2, ymax=3,
             ↪color="green",thickness=3) + plot(x-x^3/3 + 1, xmin=-1,xmax=1,
             ↪color="red",thickness=3)
baan1 = plot([1], xmin=-2.75,xmax=2.75, color="blue") + arrow((-2.5,1),(-2,1))
             ↪+ arrow((-0.5,1),(-1,1)) + arrow((0.5,1),(1,1)) + arrow((2.3,1),(1.8,1))
baan2 = plot([2], xmin=-2.75,xmax=2.75, color="blue") + arrow((-2.75,2),(-2.
             ↪25,2)) + arrow((-0.5,2),(-1,2)) + arrow((1.5,2),(1,2))
baan3 = plot([-0.5], xmin=-2.75,xmax=2.75, color="blue") + arrow((2.75,-0.5),(2.
             ↪25,-0.5)) + arrow((0.5,-0.5),(1,-0.5)) + arrow((-1.5,-0.5),(-1,-0.5))

(ep+baan1+baan2+baan3).show()
```



0.1.4 (d)

Uit (a) en (b), volgt dat er ook een bifurcatie zal plaatsvinden in $\mu = 1 - I^2$ voor $\mu > 0$. We zien dat, in dit bifurcatiepunt, het spoor 0 wordt. We gaan van een stabiel naar een instabiel evenwichtspunt (of andersom) zonder andere evenwichtspunten. Dit alles wijst erop dat hier een Hopf-bifurcatie zal plaatsvinden.

0.1.5 (e)

```
[6]: from scipy.integrate import solve_ivp
import numpy as np
var('mu,I,x1, x2')
def f(t, x):
    x1, x2 = x
    return [x1 - x1**3/3 - x2 + I**3/3, mu*(x1-x2)]
```

```

def faseportret(funcie, grid = 4, plots = list_plot([]), xmin = -4, xmax = 4,
    ymin = -4, ymax = 4, titel = "Faseportret"):
    plots += plot_vector_field(funcie(0, (x1, x2)), (x1, xmin, xmax), (x2,
    ymin, ymax))

    colors= rainbow(grid^2)

    width, height = xmax-xmin,ymax-ymin

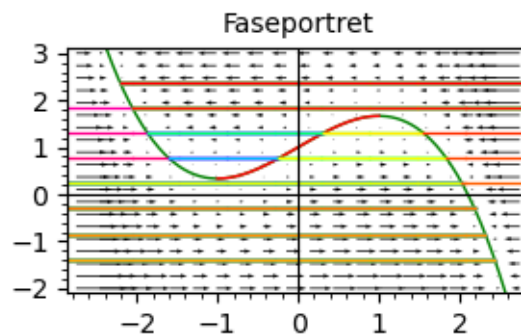
    for bv in [(i, j) for i in np.linspace(xmin+width/grid,xmax-width/grid,
    grid) for j in np.linspace(ymin+height/grid,ymax-height/grid, grid)]:

        opl1= solve_ivp(funcie, y0=bv, t_span=(0, 20),atol=1e-10, rtol=1e-10)
        opl2= solve_ivp(funcie, y0=bv, t_span=(0,-20),atol=1e-10, rtol=1e-10)
        kleur= colors.pop()
        plots+=list_plot(list(opl1.y.T), plotjoined=True, color=kleur)
        plots += list_plot(list(opl2.y.T), plotjoined=True, color=kleur)

    plots.show(title=titel, xmin=xmin, ymin=ymin, xmax=xmax, ymax=ymax)

mu = 0
I= 3^(1/3)
ep = plot(x-x^3/3 + 1, xmin=-2.75,xmax=2.75, ymin=-2, ymax=3, color="green") +
    plot(x-x^3/3 + 1, xmin=-1,xmax=1, color="red")
faseportret(f, grid=8, xmin=-2.75,xmax=2.75, ymin=-2, ymax=3, plots=ep)

```



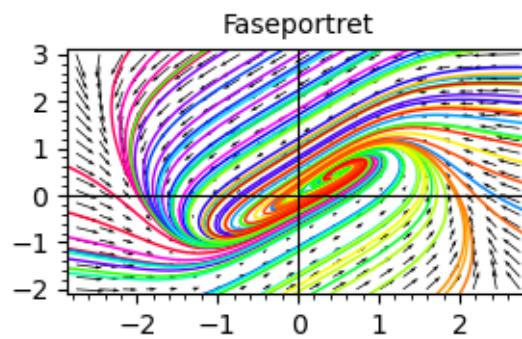
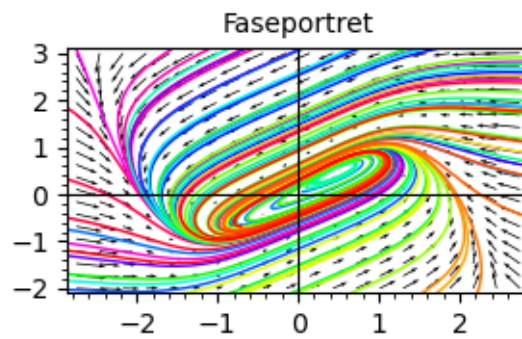
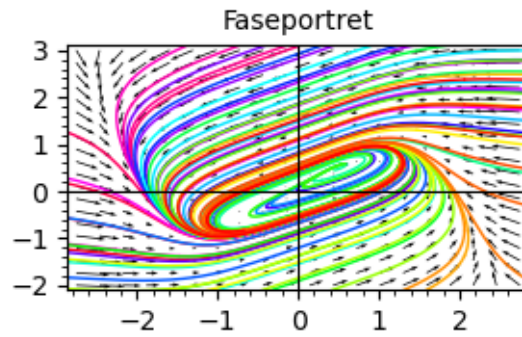
Dit komt goed overeen met onze bevindingen uit (c).

```

[7]: I = 0.5 # 1-I^2 = 0.75

for mu in [0.6, 0.75, 1]:
    faseportret(f, grid=8, xmin=-2.75,xmax=2.75, ymin=-2, ymax=3)

```



Hier zien we inderdaad duidelijk de evolutie van het dynamische systeem en de Hopf-bifurcatie.

0.2 Vraag 2

0.2.1 (a)

De gegeven vergelijking is

$$\sin(x)y'' + 2\cos(x)y' + \tan(x)y = -\lambda y.$$

We willen deze schrijven in de vorm

$$-p(x)y'' - p'(x)y' + q(x)y = Ew(x)y.$$

We vermenigvuldigen de eerste vergelijking met een onbekende functie $f(x)$ en bekomen het stelsel

$$\begin{cases} -p(x) = f(x) \sin(x) \\ -p'(x) = 2f(x) \cos(x) \\ q(x) = f(x) \tan(x) \\ w(x) = -f(x) \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \frac{p'(x)}{p(x)} = 2 \frac{\cos(x)}{\sin(x)} &\Leftrightarrow \int \frac{1}{p(x)} dp = \int 2 \cot(x) dx \\ &\Leftrightarrow \ln |p(x)| = 2 \ln |\sin(x)| + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \ln |p(x)| = \ln |C \sin^2(x)|, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

We kiezen dus bijvoorbeeld $p(x) = \sin^2(x)$ (strikt positief in het domein $]0.5, 1.5[$). Hieruit volgt $f(x) = -\sin(x)$, $w(x) = \sin(x)$ (strikt positief), $q(x) = \sin(x) \tan(x)$. Aangezien de positiviteit van p en w kloppen, kiezen we gewoon $\lambda = E$. We eindigen dus met het SLP

$$-\left[\sin^2(x) \frac{dy}{dx}\right] + \sin(x) \tan(x)y = E \sin(x)y.$$

0.2.2 (b)

```
[8]: from scipy.integrate import solve_ivp

def shooting_bi(x_neg, x_pos):
    x_new = RDF((x_neg+x_pos)/2)

    def f(t,Y):
        y1,y2 = Y
        return y2, -2*cot(t)*y2 - (tan(t) + x_new)*y1/sin(t)

    sol = solve_ivp(f,t_span=(0.5,1.5), t_eval=[1.5], y0=(-2,1), rtol=10^-10,
    ↪ atol=10^-10)
    if sol.y[0] > 0:
        return x_neg, x_new
    else:
        return x_new, x_pos
```



```

n=250 # Zie dat dit juist is
p=200

for i in range(50):
    n, p = shooting_bi(n,p)

print(n)
print(p)

```

231.72398838935368
231.72398838935362

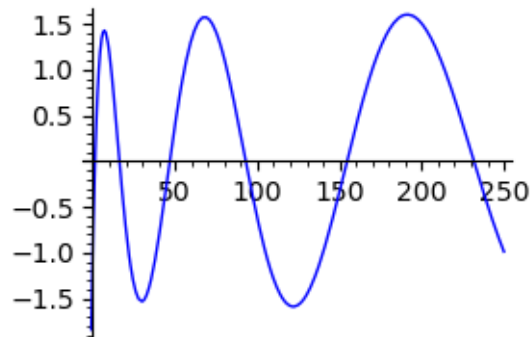
```

[9]: def multipleShooting(E):
    def f(t,Y):
        y1,y2=Y
        return y2, -2*cot(t)*y2 - (tan(t) + E)*y1/sin(t)
    y_L,dy_L = solve_ivp(f,t_span=(0.5,1),y0=(-2,1), rtol=10^-10, atol=10^-10).
    ↪ y.T[-1]
    y_R,dy_R = solve_ivp(f,t_span=(1.5,1),y0=(0,1), rtol=10^-10, atol=10^-10).y.
    ↪ T[-1]
    return y_L*dy_R - dy_L*y_R

plot(multipleShooting,-1,250)

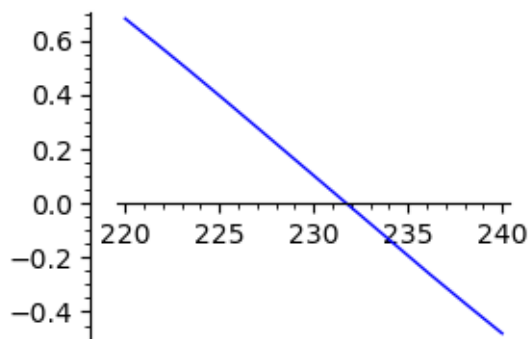
```

[9]:



```
[10]: plot(multipleShooting,220,240)
```

[10]:



0.2.3 (c)

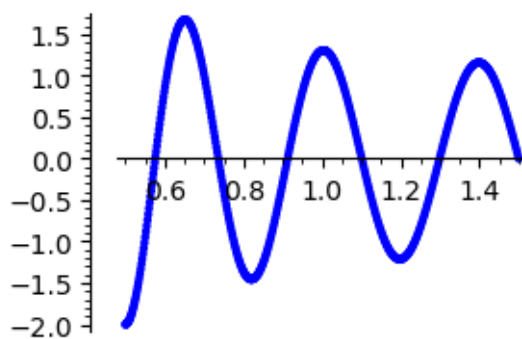
```
[11]: from scipy.integrate import solve_ivp

def f(t,Y):
    y1,y2 = Y
    return y2, -2*cot(t)*y2 - (tan(t) + 231.7239883893536)*y1/sin(t)

sol = solve_ivp(f,t_span=(0.5,1.5), y0=(-2,1), rtol=10^-10, atol=10^-10)

list_plot(list(zip(sol.t,sol.y[0])))
```

[11]:



Als we de randpunten niet meetellen, zien we vijf nulpunten. Dit is dus λ_5 !

231,7 is inderdaad ook het zesde nulpunt van de functie die we vonden in (b).