Herexamen Logica 2021

26/08/2021

Oefening 1 (5 punten). Zij G een eindig voortgebrachte groep en zij H een echte deelgroep van G. Toon aan dat er een maximale echte deelgroep van G bestaat die H bevat.

Oefening 2 (5 punten). Beschouw de theorie PA van de Peano rekenkunde (zie voorbeeld 2.5.4 in de cursus). Toon aan dat er een model $\mathcal{N}$ van PA bestaat die een element c bevat zodat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat de interpretatie van de term $\underline{n} := \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-keer}}$ in $\mathcal{N}$ een deler is van c (d.w.z. dat er een element $d \in \mathcal{N}$ bestaat zodat $d \cdot^{\mathcal{N}} \underline{n}^{\mathcal{N}} = c$).

Oefening 3 (3 punten). Bepaal de kardinaliteit van de volgende verzamelingen: $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is discontinu in eindig veel punten van } \mathbb{R}\}$

Oefening 4 (2 punten). Geef een gedecoreerde bewijsboom van $\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi$ zonder de falsum-eliminatie regel ($\perp E$) te gebruiken.

Oefening 5 (5 punten). Beschouw de theorie van de *dichte lineaire ordeningen met een minimum en een maximum* die bestaat uit dezelfde axioma's als de theorie T_d van de dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten (zie Definitie 2.9.4 in de cursus) maar waarbij het axioma $\forall x \exists y \exists z (y < x \wedge x < z)$ (geen eindpunten) wordt vervangen door de volgende twee axioma's:

$$\exists x \forall y (x < y \vee x = y) (\text{bestaan van een minimum})$$
$$\exists x \forall y (y < x \vee x = y) (\text{bestaan van een maximum})$$

Toon aan dat de theorie van de dichte lineaire ordeningen met een minimum en een maximum ω-categorisch is.