

1. Gegeven de  $m \times n$  matrix  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  met  $m \geq n$  en SWO  $A = U\Sigma V^*$ .

Beschouw dan de  $(m+n) \times (m+n)$  matrix in blokvorm

$$C = \begin{bmatrix} 0_m & A \\ A^* & 0_n \end{bmatrix}$$

waarbij  $0_m$  en  $0_n$  respectievelijk een  $m \times m$  nulmatrix en een  $n \times n$  nulmatrix zijn.

- (a) Toon aan dat de eigenwaarden van de matrix  $C$  van de vorm  $\pm\sigma$  zijn, waarbij  $\sigma$  een singuliere waarde van  $A$  is, en geef voor elke eigenwaarde een eigenvector door gebruik te maken van de singuliere vectoren van  $A$ .
- (b) Veronderstel nu dat  $m = n$ . Gebruik de voorgaande resultaten om een unitaire matrix te geven die  $C$  diagonaliseert: d.w.z.  $TCT^*$  is een diagonaalmatrix.

2. Beschouw het volgende eigenwaardeprobleem:

$$-xy'' - 3y' + xy = Exy,$$

met randvoorwaarden  $y'(1) = 0$  en  $y'(2) = 0$ .

- (a) Schrijf het probleem in de vorm van de Sturm-Liouville-vergelijking

$$-\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] + q(x)y(x) = Ew(x)y(x).$$

- (b) Geef de eigenwaarden  $E_0$  en  $E_{11}$ , tot op 10 cijfers na de komma nauwkeurig.
- (c) Pas Prüfer-getransformeerde multiple shooting toe met matching point  $x = 0.5$  om numeriek te bepalen hoeveel eigenwaarden er tussen 500 en 1000 zitten, en welke indices deze eigenwaarden hebben. **Leg kort uit hoe je te werk gaat.**

3. Het modelleren van de evolutie van een ecosysteem leidt na herschaling en vereenvoudiging tot volgend 2D systeem met parameters  $\alpha > 0$  en  $\beta$  die afhangen van de vervuiling:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= \beta + \frac{x_1}{1 + |x_1|} - x_2 \end{aligned}$$

Bespreek, aan de hand van een **grafische analyse**, in functie van de parameter  $\alpha$  welke bifurcaties er optreden bij variëren van de parameter  $\beta$  (met vastgehouden  $\alpha$ ).