

Oefeningenexamen Algebra I - 6 januari 2025

1) Groepen (6 pt.)

- Geef een voorbeeld van een (oneindige) collectie deelgroepen van G van eindige index, waarvan de doorsnede een deelgroep van oneindige index vormt.
- Bewijs dat elke deelgroep H van G van eindige index een normaaldeler N van G bevat van eindige index in G . (Hint: Beschouw de actie van G op $R_G(H)$)
- Bewijs uit b) dat

$$\bigcap_{\substack{H \leq G \\ [G:H] < \infty}} H = \bigcap_{\substack{H \trianglelefteq G \\ [G:H] < \infty}} H$$

- Bepaal alle normaaldelers van eindige index van de groep $O_2(\mathbb{R}\mathbb{R})$. Dit is de verzameling van alle rotaties en spiegelingen van $\mathbb{R}\mathbb{R}^2$ die oorsprong fixeren.

2) Sylow (4 pt.)

Bewijs dat elke groep G van orde $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$ cyclisch is. (Hint: Beschouw $\text{Aut}(G)$)

3) Ringen (5 pt.)

Zij R een ring met ideaal I van R en priemidealen $P_1, \dots, P_r$ van R .
Bewijs dat

$$I \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_r \implies \exists i \in \{1, \dots, r\} : I \subseteq P_i$$

Hint: Bewijs per inductie op r (ook de inductie basis levert al punten op).

4) Modulen (5 pt.)

Zij R een PID en M een R -moduul met voortbrengers $(m_1, \dots, m_k)$. We noemen een $l \times k$ matrix A met elementen uit R een presentatiematrix als:

$$A \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad r_1 m_1 + \dots + r_k m_k = 0 \implies \exists v_1, \dots, v_l \in R : (v_1 \quad \dots \quad v_l) \cdot A = (r_1 \quad \dots \quad r_k)$$

- Bepaal de kern van volgend morfisme:

$$\phi: R^k \rightarrow M \quad \text{met} \quad \phi(0, \dots, 1, \dots, 0) = m_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

- Gegeven presentatiematrix A voor M . Bewijs dat als we rij 2 vervangen door rij 2 + r · rij 1 (met r in R), dat we nog steeds een presentatiematrix hebben.
- Bewijs dat er altijd een presentatiematrix bestaat???
- Zij A een abelse groep. Schrijf haar corresponderende $\mathbb{Z}$ -moduul als het direct product van cyclische groepen als ze presentatiematrix P heeft.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 2 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Hint: Vereenvoudig P via b)